

Zadanie 2.3.

Teza: Jeżeli $\varphi : G \rightarrow H$ jest epimorfizmem, a K podgrupą H , to $[G: \varphi^{-1}(K)] = [H: K]$

Dowód:

Określmy odwzorowanie $\Phi : G/\varphi^{-1}(K) \rightarrow H/K$, takie, że dla $g \in G$, $\Phi(g\varphi^{-1}(K)) = \varphi(g)K$.

Chcemy pokazać, że odwzorowanie Φ jest bijekcją między zbiorami warstw lewostronnych $G/\varphi^{-1}(K)$ i H/K . Będzie to równoznaczne z tym, że zbiory te są równoliczne.

- 1) Sprawdźmy, czy odwzorowanie Φ jest dobrze określone, tzn. czy dla $g_1, g_2 \in G$ takich, że $g_1\varphi^{-1}(K) = g_2\varphi^{-1}(K)$ zachodzi $\varphi(g_1)K = \varphi(g_2)K$?

Mamy, że

$$\begin{aligned} g_1\varphi^{-1}(K) = g_2\varphi^{-1}(K) &\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} g_2^{-1}g_1 \in \varphi^{-1}(K) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \varphi(g_2^{-1}g_1) \in K \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} (\varphi(g_2))^{-1}\varphi(g_1) \in K \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \varphi(g_1)K = \varphi(g_2)K \end{aligned}$$

Przy czym równoważności (1) i (4) wynikają z definicji warstwy lewostronnej, natomiast (2) i (3) z własności homomorfizmu. Zatem Φ jest dobrze określone.

- 2) Kiedy zachodzi $\Phi(g_1\varphi^{-1}(K)) = \Phi(g_2\varphi^{-1}(K))$?

Zauważmy, że lewa i prawa strona równania mają postać:

$$L = \Phi(g_1\varphi^{-1}(K)) = \varphi(g_1)K, \quad P = \Phi(g_2\varphi^{-1}(K)) = \varphi(g_2)K$$

$$\begin{aligned} L = P &\Leftrightarrow \varphi(g_1)K = \varphi(g_2)K \stackrel{(5)}{\Leftrightarrow} (\varphi(g_2))^{-1}\varphi(g_1) \in K \stackrel{(6)}{\Leftrightarrow} \varphi(g_2^{-1}g_1) \in K \stackrel{(7)}{\Leftrightarrow} g_2^{-1}g_1 \in \varphi^{-1}(K) \stackrel{(8)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow g_1\varphi^{-1}(K) = g_2\varphi^{-1}(K) \end{aligned}$$

Przy czym równoważności (5) i (8) wynikają z definicji warstwy lewostronnej, natomiast (6) i (7) z własności homomorfizmu. Zatem otrzymujemy, że Φ jest różnowartościowe.

- 3) Odwzorowanie Φ jest „na”.

Dla dowolnego ustalonego $h \in H$ rozważmy warstwę lewostronną postaci hK . Z faktu, iż φ jest epimorfizmem wiemy, że istnieje $g' \in G$ takie, że $\varphi(g') = h$. Wówczas $\Phi(g'\varphi^{-1}(K)) = \varphi(g')K = hK$. Zatem Φ jest również „na”.

Ostatecznie otrzymaliśmy, iż odwzorowanie Φ jest bijekcją, i w rezultacie $[G: \varphi^{-1}(K)] = [H: K]$.

■