

**Zadanie 1:** Niech  $Q_8 = \langle j, k \rangle \leq GL(2, \mathbb{C})$ , gdzie

$$j = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Udowodnić, że  $|Q_8| = 8$ .

Działaniem dwuargumentowym w  $q8$  jest mnożenie macierzy. Oznaczmy je symbolem  $\circ$ . Udowodnimy, że  $Q_8 = \{ 1, -1, j, -j, k, -k, i, -i \}$ , gdzie 1 jest macierzą jednostkową, elementy z minusem są elementami pomnożonymi przez  $-1$  w zwykłym sensie, natomiast

$$i = j \circ k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Należy w tym miejscu zwrócić uwagę, aby nie pomylić macierzy  $i$  z liczbą oznaczoną tym samym symbolem. Ponadto elementy "minusowe" nie są tu definiowane jako elementy odwrotne - obowiązuje zapis multiplikatywny, a nie addytywny. Natomiast żeby ułatwić sobie życie, możemy skorzystać z faktu, że są to elementy przemnożone skalarnie przez  $-1$ , zatem można wykorzystać standardowe własności takiego mnożenia. Na przykład  $-j \circ -k = ((-1) \cdot j) \circ ((-1) \cdot k) = (-1) \cdot (-1) \cdot (j \circ k) = j \circ k = i$ . Nie jest to jednakże sytuacja w pełni standardowa, a raczej pewne oszustwo.

W grupie  $q8$  występują następujące zależności:

$$rj \circ k \circ j = k, \quad k \circ j \circ k = j \tag{1}$$

$$k^2 = j^2 = -1 \tag{2}$$

$$o(j) = o(k) = 4 \tag{3}$$

$$k \circ j = -i \tag{4}$$

co można sprawdzić na drodze rachunku macierzy.

Możemy od razu zauważyć, że mnożenie jest tu nieprzemienne, czego zresztą należało się spodziewać po mnożeniu macierzy:  $jk = i \neq kj = -i$ .

Aby pokazać, że nasza grupa jest zamknięta ze względu na mnożenie macierzy, sporządzimy tabelkę tego działania. Wypiszmy wszystkie wielokrotności  $j$ :

$$\begin{aligned} j \circ k &= i \\ k \circ j &= -i \\ j \circ k^2 &= k^2 \circ j = (-1) \circ j = -1 \cdot j = -j \\ j \circ k^3 &= j \circ k \circ k^2 = -1 \cdot (j \circ k) = -i \\ k^3 \circ j &= -(k \circ j) = -(-i) = i \\ j^3 &= j^2 \circ j = -j \\ j \circ i &= j^2 \circ k = -k \\ i \circ j &= j \circ k \circ j \end{aligned}$$

Pozostałe elementy tabeli obliczamy w analogiczny sposób korzystając z własności (1) - (4). Ostatecznie:

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|      | 1    | -1   | $j$  | $-j$ | $k$  | $-k$ | $i$  | $-i$ |
| 1    | 1    | -1   | $j$  | $-j$ | $k$  | $-k$ | $i$  | $-i$ |
| -1   | -1   | 1    | $-j$ | $j$  | $-k$ | $k$  | $-i$ | $i$  |
| $j$  | $j$  | $-j$ | -1   | 1    | $i$  | $-i$ | $k$  | $-k$ |
| $-j$ | $-j$ | $j$  | 1    | -1   | $-i$ | $i$  | $-k$ | $k$  |
| $k$  | $k$  | $-k$ | $-i$ | $i$  | -1   | 1    | $j$  | $-j$ |
| $-k$ | $-k$ | $k$  | $i$  | $-i$ | 1    | -1   | $-j$ | $j$  |
| $i$  | $i$  | $-i$ | $k$  | $-k$ | $-j$ | $j$  | -1   | 1    |
| $-i$ | $-i$ | $i$  | $-k$ | $k$  | $j$  | $-j$ | 1    | -1   |

Udowodniliśmy więc, że  $\{1, -1, j, -j, k, -k, i, -i\}$  jest podgrupą zawartą w  $GL(2, \mathbb{C})$ . Jest przy tym najmniejszą grupą zawierającą elementy  $j$  i  $k$ , zatem jest to grupa  $Q_8$ , co kończy dowód.

**Zadanie 2:** Znaleźć wszystkie podgrupy zawarte w  $Q_8$

Poza podgrupą trywialną oraz samą grupą  $Q_8$ , są w niej zawarte jeszcze 4 inne podgrupy:  $\langle j \rangle$ ,  $\langle k \rangle$ ,  $\langle -1 \rangle$  oraz  $\langle i \rangle$ .

|                     |      |      |      |      |
|---------------------|------|------|------|------|
| $\langle j \rangle$ | 1    | -1   | $j$  | $-j$ |
| 1                   | 1    | -1   | $j$  | $-j$ |
| -1                  | -1   | 1    | $-j$ | $j$  |
| $j$                 | $j$  | $-j$ | -1   | 1    |
| $-j$                | $-j$ | $j$  | 1    | -1   |

|                     |      |      |      |      |
|---------------------|------|------|------|------|
| $\langle k \rangle$ | 1    | -1   | $k$  | $-k$ |
| 1                   | 1    | -1   | $k$  | $-k$ |
| -1                  | -1   | 1    | $-k$ | $k$  |
| $k$                 | $k$  | $-k$ | -1   | 1    |
| $-k$                | $-k$ | $k$  | 1    | -1   |

|                     |      |      |      |      |
|---------------------|------|------|------|------|
| $\langle i \rangle$ | 1    | -1   | $i$  | $-i$ |
| 1                   | 1    | -1   | $i$  | $-i$ |
| -1                  | -1   | 1    | $-i$ | $i$  |
| $i$                 | $i$  | $-i$ | -1   | 1    |
| $-i$                | $-i$ | $i$  | 1    | -1   |

|                      |    |    |
|----------------------|----|----|
| $\langle -1 \rangle$ | 1  | -1 |
| 1                    | 1  | -1 |
| -1                   | -1 | 1  |

Wszystkie podgrupy 4-elementowe są izomorficzne z  $\mathbb{Z}_4$ , ponieważ są cykliczne, natomiast podgrupa  $\langle -1 \rangle$  jest oczywiście izomorficzna z  $\mathbb{Z}_2$ . Co ciekawe, wszystkie podgrupy właściwe w  $Q_8$  są abelowe, pomimo tego że sama  $Q_8$  taka nie jest.