

1. Lokalizacja pierścienia.

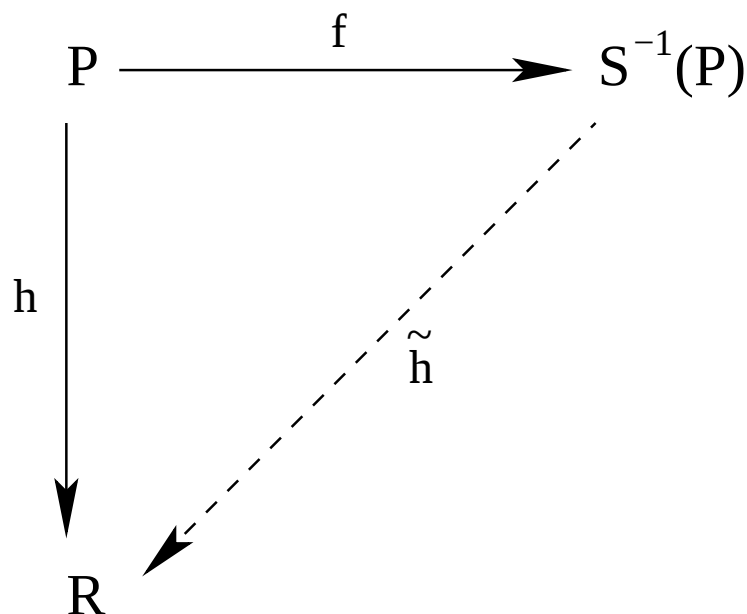
Konstrukcja ciała ułamków pozwala każdej dziedzinie całkowitości przypisać ciało, w które ta dziedzina całkowitości jest homomorficznie włożona. Opiszemy teraz niewielką modyfikację tej konstrukcji, która działa w nieco ogólniejszym przypadku.

Po pierwsze będziemy rozpatrywać w pierścieniu P pewien podzbiór S . Naszym celem jest opisanie takiego pierścienia $S^{-1}(P)$ i takiego homomorfizmu $f: P \rightarrow S^{-1}(P)$, żeby dla każdego elementu s ze zbioru S zachodziło $f(s) \in S^{-1}(P)^*$. Mamy zatem zamiar tak ulepszyć pierścień P , żeby elementy ze zbioru S stały się odwracalne. Jednocześnie jednak chcemy zmodyfikować pierścień P możliwie nieznacznie — byłoby najlepiej gdyby homomorfizm f był różnowartościowy (co oznaczałoby istnienie swego rodzaju kopii pierścienia P w $S^{-1}(P)$). Chcielibyśmy też, żeby trójka $(P, S^{-1}(P), f)$ była w jakimś sensie najlepsza.

Formalnie biorąc, przyjmujemy następującą definicję:

1.1. Definicja. Niech S będzie podzbiorem pierścienia przemennego z 1 P . Lokalizacją pierścienia P względem zbioru S nazywamy trójkę $(P, S^{-1}(P), f: P \rightarrow S^{-1}(P))$, gdzie $P \rightarrow S^{-1}(P)$ jest homomorfizmem pierścieni przemennych z 1, a ponadto:

1. Dla każdego $s \in S$ element $f(s)$ jest odwracalny w $S^{-1}(P)$,
2. Dla każdego homomorfizmu $h: P \rightarrow R$, takiego że obrazy elementów ze zbioru S są odwracalne, istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\tilde{h}: S^{-1}(P) \rightarrow R$, taki że poniższy diagram jest przemienny.



Łatwo zauważyć, że jeżeli dwa elementy x i y należą do zbioru S , to $f(xy)$ musi być elementem odwracalnym w pierścieniu $S^{-1}(P)$, jako iloczyn elementów odwracalnych $f(x)$ i $f(y)$. Wobec tego będziemy zakładać, że zbiór S jest multip-

likatywny, to znaczy ma własność

$$x, y \in S \Rightarrow xy \in S,$$

choć w zasadzie nie jest to niezbędne dla istnienia konstruowanego pierścienia. Będziemy również zakładać, że $1 \in S$ — oczywiście dołączenie jedynki do rozpatrywanego zbioru multiplikatywnego nie zepsuje multiplikatywności zbioru. Podajemy teraz standardową konstrukcję pierścienia $S^{-1}(P)$.

Elementami pierścienia są klasy abstrakcji par uporządkowanych $(r, s) \in P \times S$ względem pewnej relacji równoważności $\sim$. Elementy pierścienia będziemy zapisywać w postaci ułamków $\frac{r}{s}$, nie przejmując się zbytnio tym, czy w danym momencie napis taki oznacza konkretnego reprezentanta, czy klasę abstrakcji. Zapowiedziana relacja równoważności jest zadana następująco:

$$\frac{p}{s} \sim \frac{p'}{s'} \iff \exists_{d \in S} d(ps' - p's) = 0.$$

Zacznijmy od wykazania że $\sim$ jest relacją równoważności. Zwrotność i symetryczność nie budzą wątpliwości. Zanim udowodnimy przechodność, zauważmy że każde dwa ułamki różniące się rozszerzeniem lub skróceniem przez element ze zbioru S są we wskazanej relacji, a co więcej są w relacji z dokładnie tymi samymi ułamkami. Pokazujemy zatem, że

$$\forall_{s, s', s'' \in S} \forall_{p, p' \in P} \frac{p}{s} \sim \frac{p'}{s'} \iff \frac{ps''}{ss''} \sim \frac{p'}{s'}.$$

Dowód powyższego szczegółu pomijamy jako oczywisty (w dowodzie trzeba skorzystać z multiplikatywności zbioru S).

Przejdźmy już bezpośrednio do dowodu przechodności. Zakładamy, że

$$\frac{p}{s} \sim \frac{p'}{s'} \wedge \frac{p'}{s'} \sim \frac{p''}{s''}.$$

W świetle uwagi zrobionej powyżej jest to równoważne przyjęciu założenia, że

$$\frac{ps's''}{ss's''} \sim \frac{p'ss''}{ss's''} \wedge \frac{p'ss''}{ss's''} \sim \frac{p''ss'}{ss's''},$$

a do udowodnienia jest stwierdzenie, że

$$\frac{ps's''}{ss's''} \sim \frac{p''ss'}{ss's''}.$$

jak widać mamy do czynienia z trzema ułamkami o wspólnym mianowniku $t = ss's'' \in S$ (skorzystaliśmy ponownie z multiplikatywności zbioru S) i licznikach r, r', r'' . W tych oznaczeniach założenia przyjmują postać

$$\frac{r}{t} \sim \frac{r'}{t} \wedge \frac{r'}{t} \sim \frac{r''}{t},$$

a do udowodnienia jest stwierdzenie

$$\frac{r}{t} \sim \frac{r''}{t}.$$

Ale w sytuacji wspólnego i należącego do S mianownika trzech ułamków taka implikacja wynika w oczywisty sposób z definicji relacji $\sim$ (choć trzeba jeszcze raz skorzystać z multiplikatywności zbioru S).

Na tak zdefiniowanym zbiorze $S^{-1}(P)$ określamy działania:

1. $0 = \frac{0}{1}$
2. $1 = \frac{1}{1}$
3. $-\frac{p}{s} = \frac{-p}{s}$
4. $\frac{p}{s} + \frac{p'}{s'} = \frac{ps' + p's}{ss'}$
5. $\frac{p}{s} \cdot \frac{p'}{s'} = \frac{pp'}{ss'}$

Ponadto określamy homomorfizm $f: P \longrightarrow S^{-1}(P)$ wzorem $f(x) = \frac{x}{1}$.

Sprawdźmy, że dodawanie nie zależy od wyboru reprezentantów. Przypuśćmy, że licząc sumę $\frac{p}{s} + \frac{p'}{s'}$ zastąpimy składnik $\frac{p}{s}$ równoważnym mu składnikiem $\frac{p''}{s''}$ (zakładamy więc, że istnieje $d \in S$, takie że $d(ps'' - p's) = 0$). Należy pokazać, że

$$\frac{ps' + p's}{ss'} \sim \frac{p''s' + p's''}{s's''}.$$

Zgodnie z definicją relacji $\sim$ wystarczy udowodnić, że

$$d(ps's's'' + p'ss's'' - p''s'ss' - p's''ss') = 0.$$

Drugi i czwarty składnik w nawiasie są tożsame, różnią się jednak znakiem, więc ulegają redukcji. Po niewielkiej reorganizacji dwóch pozostałych składników otrzymujemy po lewej stronie wyrażenie $s's'd(ps'' - p's)$, a to rzeczywiście jest równe 0, co mieliśmy udowodnić.

Chociaż pozostaje jeszcze kilka rzeczy do sprawdzenia — niezależność wyniku mnożenia od wyboru reprezentantów, własności działań wymagane w aksjomatyce pierścienia, to jednak pominiemy te rachunki jako nazbyt już rutynowe. Pozostaje sprawdzenie, że odwzorowanie zadane wzorem $f(x) = \frac{x}{1}$ jest homomorfizmem pierścienia (co jest łatwe) oraz określenie odwzorowania $\tilde{h}: S^{-1}(P) \longrightarrow R$ domykającego trójkąt na rysunku. Nie mamy wielkiego wyboru: jeżeli diagram ma być przemienny, to musimy przyjąć, że $\tilde{h}(\frac{x}{1}) = h(x)$. To z kolei zmusza nas do przyjęcia, że $\tilde{h}(\frac{p}{s}) = \frac{h(p)}{h(s)}$. Zwróćmy uwagę, że $h(s)$ jest z założenia (o odwzorowaniu h) elementem odwracalnym, zatem ma prawo pojawić się w mianowniku ostatniego wyrażenia. Ten ostatni wzór określa odwzorowanie $\tilde{h}$ już dla wszystkich elementów pierścienia $S^{-1}(P)$. Pomijamy rutynowe sprawdzenie, że $\tilde{h}$ nie zależy od wyboru ułamka reprezentującego argument, że definicja nie jest dwuznaczna i że $\tilde{h}$ jest naprawdę homomorfizmem.

Poniżej przedstawiamy kilka ważnych przykładów i własności.

1.2. Stwierdzenie. *Lokalizacja pierścienia P względem podzbioru multiplikatywnego S jest pierścieniem zerowym wtedy i tylko wtedy, gdy $0 \in S$. W szczególności, jeżeli do s należy jakikolwiek element nilpotentny, to $S^{-1}(P)$ jest pierścieniem zerowym.*

Dowód. Trzeba sprawdzić, kiedy $\frac{1}{1} = \frac{0}{1}$. Z definicji relacji $\sim$ zachodzi to wtedy, gdy istnieje $s \in S$, takie że $s(1 - 0) = s = 0$, czyli wtedy i tylko wtedy gdy $s = 0$. $\square$

1.3. Stwierdzenie. Niech P będzie niezerowym pierścieniem, a $S \subseteq P$ zbiorem multiplikatywnym. Homomorfizm lokalizacji jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór S nie zawiera dzielników zera. W szczególności, jeżeli P jest dziedziną całkowitości, a 0 nie należy do S , to homomorfizm lokalizacji jest różnowartościowy.

□

1.4. Stwierdzenie. Lokalizacja pierścienia P względem podzbioru multiplikatywnego $S \subseteq P^*$ jest izomorficzna z pierścieniem P .

□

1.5. Przykład. Niech P będzie pierścieniem, w którym każdy element jest albo odwracalny albo nilpotentny (np. $\mathbb{Z}_9$). Wówczas lokalizacja pierścienia P jest albo pierścieniem zerowym (gdy w S jest jakiś element nieodwracalny, a zatem nilpotentny) albo jest izomorficzna z pierścieniem P .

1.6. Przykład. Niech $P = \mathbb{Z}$ i niech S będzie zbiorem potęg o wykładnikach naturalnych liczby 2, w tym $2^0 = 1$. Wówczas $S^{-1}(P) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

1.7. Przykład. Niech P będzie dziedziną całkowitości, a S zbiorem złożonym ze wszystkich elementów niezerowych. Wówczas $S^{-1}(P) = Q(P)$ — te dwa rozpatrywane obiekty są zdefiniowane w taki sam dosłownie sposób.

1.8. Przykład. Niech P będzie pierścieniem niezerowym, a S zbiorem złożonym ze wszystkich elementów, które nie są dzielnikami zera. Wówczas $S^{-1}(P) = Q(P)$ nazywamy totalnym pierścieniem ułamków (total quotient ring). Rozpatrywany pierścień powstaje przez dołączenie wszystkich odwrotności jakie można dołączyć nie rezygnując z różnowartościowości homomorfizmu h .

Szczególnie ważny jest przykład następujący.

1.9. Przykład. Niech P będzie pierścieniem niezerowym. Niech I będzie ideałem pierwszym w P . Oczywiście $S = P \setminus I$ jest wówczas zbiorem multiplikatywnym. Pierścień $S^{-1}(P)$ nazywamy lokalizacją pierścienia P względem ideału I .

Pokażemy teraz, że niezerowy pierścień zlokalizowany względem ideału pierwszego I jest tzw. **pierścieniem lokalnym**, czyli zawiera dokładnie jeden ideał maksymalny.

Dowód. Ideał właściwy J w pierścieniu $S^{-1}(P)$ nie zawiera elementów odwracalnych. W takim razie w ideał właściwym J mogą być tylko elementy postaci $\frac{x}{s}$, gdzie $x \in I$, $s \in S = P \setminus I$. Łatwo sprawdzić, że zbiór wszystkich elementów takiej postaci jest ideałem właściwym w $S^{-1}(P)$, a w takim razie jest to ideał maksymalny i faktycznie jest to jedyny ideał maksymalny (trochę dokładniej: J jest ideałem właściwym, bo łatwo się przekonać, że $1 \notin J$. J jest maksymalny, bo zawiera wszystkie elementy jakie w ogóle mają szansę pojawić się w ideał właściwym, a więc zawiera w sobie każdy ideał właściwy).

□