Topologia I*, jesień 2012

Zadania omawiane na ćwiczeniach lub zadanych jako prace domowe, grupa 1 (prowadzący H. Toruńczyk).

Zadania w dużej mierze pochodzą z zestawu zadań w rozdziale 8 skryptu autorów S. Betley, J. Chaber, E. Pol, R. Pol, czy też są do nich zbliżone. Numery 1.1 etc (dwuczęściowe arabskie) odnoszą się do zadań z tego skryptu.

Znakiem + oznaczono zadania już na ćwiczeniach omówione. Zadania, które nie są tak oznaczone, proszę traktować jako zadane do przemyślenia w domu i ewentualnej prezentacji rozwiązania na zajęciach. Jeśli plusy są wpisane błędnie lub nie zostały wpisane, to będę wdzięczny za wiadomość.

(A). Metryki, kule, izometrie.

1. $^+$ Narysować kule jednostkowe w przestrzeni $\mathbb{R}^2$, o środku w $(0,0)$, względem metryk $d_{\sup}, d_e, d_1$, odpowiednio, gdzie $d_1(x_1,x_2),(y_1,y_2) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|$. Które z przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_{\sup}), (\mathbb{R}^2, d_e), (\mathbb{R}^2, d_1)$ są ze sobą izometryczne?

2. $^+$ Niech d będzie skończoną metryką na zbiorze X, a $C(X)$ zbiorem wszystkich funkcji ciągłych z X do $\mathbb{R}$.

a) Dla $p \in X$ oznaczmy przez f_p funkcję $f_p(x) = d(x,p)$ $(x \in X)$. Dowieść, że przyporządkowanie $X \ni p \mapsto f_p \in C(X)$ jest zanurzeniem izometrycznym przestrzeni (X,d) w $(C(X), d_{\sup})$.

b). Niech dalej $C_b(X) = \{f \in C(X) : \sup|f| < \infty\}$. Ustalmy punkt $p_0 \in X$ i dla $p \in X$ przyjmijmy $g_p(x) := d(x,p) - d(x,p_0)$. Dowieść, że $g_p \in C_b(X)$ i przyporządkowanie $X \ni p \mapsto g_p \in C_b(X)$ jest zanurzeniem izometrycznym przestrzeni (X,d) w $(C_b(X), d_{\sup})$. (Zanurzenie to pochodzi od K. Kuratowskiego.)

3. 1.5 $^+$

4. 7.8. $^+$

Uwaga 1. W zadaniach 4,5, 7 dowód, że metryki wyznaczają różne topologie, można przeprowadzić bądź wskazując zbiór, będący otoczeniem punktu w jednej metryce, lecz nie będący nim w drugiej metryce, lub też wskazując ciąg punktów, zbieżny do danego punktu w jednej metryce, lecz nie w drugiej. (Oba sposoby są dobre, a jeszcze lepsze są dwa naraz, gdzie się uda.)

5. 7.9. $^+$

6. $^+$ (R. Pol.) Niech funkcja $n : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ będzie różnowartościowym przekształceniem zbioru $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych w zbiór $\mathbb{N}$ liczb naturanych, i dla $a,b \in \mathbb{R}$ przyjmijmy $d(a,b) = 0$ gdy $a = b$ oraz

$$d(a,b) = \sum\{2^{-n(q)} : q \in \mathbb{Q} \cap [\min(a,b), \max(a,b)]\}$$

Udowodnić, że d jest metryką w zbiorze $\mathbb{R}$, przy czym dla $a \in \mathbb{Q}$ jest $d(a_n, a) \to 0 \Leftrightarrow (a_n = a$ dla p.w. $n)$, zaś gdy gdy $a \notin \mathbb{Q}$, to $d(a_n,a) \to 0 \Leftrightarrow |a_n - a| \to 0$.

7. $^+$ Dla liczby pierwszej p i $a \in \mathbb{Z}$ oznaczmy przez $||a||_p$ **normę p-adyczną** liczby a, zdefiniowaną tak: $||0||_p = 0$ i $||a||_p = 2^{-n}$, gdzie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ jest największą liczbą, dla której p^n dzieli a. Dowieść, że:

a) $||a+b||_p \leq \max(||a||_p, ||b||_p)$ i wobec tego wzór $d_p(a,b) := ||a-b||_p$ zadaje metrykę na zbiorze $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych.

b) Dla liczb pierwszych $p \neq q$, metryki d_p i d_q wyznaczają w $\mathbb{Z}$ różne topologie.

(B). Badanie podstawowych pojęć na przykładzie (podzbiorów) przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_k), (\mathbb{R}^2, d_r), \ell_f(S)$, $(C(I), d_{\sup})$, kwadratu leksykograficznego i przestrzeni euklidesowych.

1. 1.27. (Rozwiązano 1/4 zadania.)

2. 1.1 $^+$

3. 1.2 $^+$

4. 1.6 $^+$

5. $+$ Niech $z_0 = \cos\alpha + i\sin\alpha$, gdzie liczba α/π jest niewymierna.
a) * Dowieść, że zbiór $\{z_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w okręgu $S = \{z : |z| = 1\}$.
b) Dowieść, że domknięciem zbioru $A := \{(1 + \frac{1}{n})z_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ jest $A \cup S$.

6. 1.11 $+$

7. 1.18 $+$

8. $+$ (R. Pol.) Niech $(I^2, \mathcal{T})$ będzie kwadratem leksykograficznym, a $\mathbb{Q}$ zbiorem liczb wymiernych.
a) Udowodnić, że dla każdego zbioru $A \subset I^2$, domkniętego w $(I^2, \mathcal{T})$, jego rzut na pierwszą oś jest domknięty w euklidesowej topologii odcinka I.
b) Znaleźć domknięcie i wnętrze, w topologii $\mathcal{T}$, następujących zbiorów:

$$A := \{(x_1, x_2) \in I^2 : x_1 \in \mathbb{Q} \text{ i } x_2 \in [1/3, 2/3]\}, \quad B := \{(x_1, x_2) \in I^2 : x_1 \notin \mathbb{Q} \text{ i } x_2 \in [0, 1/2]\}$$

9. $+$ 7.1

10. $+$ a) Udowodnić, że strzałka jest przestrzenią ośrodkową, lecz z jej standardowej bazy $\{(a, b] : a, b \in [0, 1], a < b\}$ nie można wybrac bazy przeliczalnej. (Przez **strzałkę** rozumiem odcinek $(0, 1]$ z topologią, której bazę opisano wyżej. Jest ona homeomorficzna z podprzestrzenią $(0, 1] \times \{0\}$ kwadratu leksykograficznego.)
b) Stąd i z zadań 19a) i 20c) wywnioskować, że strzałka i kwadrat leksykograficzny nie są przestrzeniami metryzowalnymi.

(C). Własności topologii w przestrzeniach ogólnych.

1. $+$ Udowodnić, że ciągłość przekształcenia $f : X \to Y$ jest równoważna każdemu z następujących warunków:
d) $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$ dla każdego zbioru $A \subset Y$;
e) $f^{-1}(\mathrm{Int}A) \subset \mathrm{Int}(f^{-1}(A))$ dla każdego zbioru $A \subset Y$;
f) $\mathrm{Fr}(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(\mathrm{Fr}(A))$ dla każdego zbioru $A \subset Y$;
g) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ dla każdego zbioru $A \subset X$.

2. $^+$ Przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ nazywamy **ośrodkową**, jeśli istnieje zbiór przeliczalny $A \subset X$, który jest **gęsty** w X (tzn. spełnia warunek $\overline{A} = X$). Niżej przez $C(I)$ oznaczam zbiór wszystkich funkcji ciągłych z $I = [0, 1]$ do $\mathbb{R}$.
a) Dowieść, że ośrodkowa przestrzeń metryzowalna ma przeliczalną bazę swej topologii.
b) Dowieść, że przestrzeń $(C(I), \mathcal{T}(d_{\sup}))$ jest ośrodkowa.
c) Dowieść, że przestrzeń wszystkich ograniczonych ciągów rzeczywistych, z topologią generowaną przez metrykę $d_{\sup}$, nie jest ośrodkowa.

3. $+$ a) Przestrzeń z bazą przeliczalną jest ośrodkowa.
b) Podprzestrzeń przestrzeni z bazą przeliczalną ma bazę przeliczalną.
c) Gdy topologia $\mathcal{T}$ ma bazę przeliczalną, to z każdej bazy topologii można wybrać bazę przeliczalną, a także z każdej rodziny $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ można wybrać przeliczalną podrodzinę $\mathcal{U}_0$ taką, że $\bigcup\mathcal{U}_0 = \bigcup\mathcal{U}$. (Wskazówka: niech $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ będzie bazą przeliczalną i niech $I = \{i \in \mathbb{N} : B_i \subset U$ dla pewnego $U \in \mathcal{U}\}$. Rozważyć rodzinę $(U_i)_{i\in I}$, gdzie $U_i \in \mathcal{U}$ wybrano tak, by $B_i \subset U_i$ dla $i \in I$.)

4. + a) Obraz przestrzeni ośrodkowej przy przekształceniu ciągłym też jest taką przestrzenią.

b)* Iloczyn kartezjański continuum wielu (lub mniej) przestrzeni ośrodkowych jest przestrzenią ośrodkową. (Wskazówka: korzystając z a) sprowadzić to do udowodnienia, że przestrzeń $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ jest ośrodkowa.)

c) Oznaczmy przez $e_t \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ funkcję, przyjmującą wartość 1 w punkcie $t \in \mathbb{R}$, a 0 w pozostałych punktach prostej $\mathbb{R}$. Zauważyć, że podprzestrzeń $\{e_t : t \in \mathbb{R}\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (rozpatrywanej z topologią produktową) jest dyskretna i wywnioskować, że $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ nie ma bazy przeliczalnej, a ośrodkowość nie jest dziedziczona przez podprzestrzenie.

5. + Niech X_s $(s \in S)$ będzie rodziną podzbiorów przestrzeni $(Y, \mathcal{T})$, a $f : Y \to Z$ taką funkcją w przestrzeń topologiczną $(Z, \mathcal{T}_Z)$, że każde z obcięć $f_{|X_s}$ jest ciągłe, gdy na X_s rozpatrzeć topologię podprzestrzeni. Jeśli $\bigcup_s X_s = Y$, to w każdym z następujących przypadków funkcja $f : (Y, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ jest ciągła: a) wszystkie zbiory X_s są otwarte w $(Y, \mathcal{T})$, lub b) $\#S < \infty$ i wszystkie zbiory X_s są domknięte w $(Y, \mathcal{T})$.

6. + Niech ponadto A będzie przestrzenią topologiczną, a $f : A \to \prod_{s\in S} Y_s$ funkcją. Jeśli każde ze złożeń $\pi_s \circ f : A \to Y_s$ jest ciągłe, to i funkcja f jest ciągła.

7. + Dla punktów $y^0, y^1, y^2, \ldots$ iloczynu $\prod_i Y_i$ przestrzeni metryzowalnych $(Y_i, \mathcal{T}_i)$, zbieżność $y^n \xrightarrow{\mathcal{T}} y^0$ w topologii produktowej $\mathcal{T}$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $y_i^n \xrightarrow{\mathcal{T}_i} y_i^0$ $\forall i \in \mathbb{N}$. (Tu, y_i^n jest i–tą współrzędną punktu y^n.)

8. + Niech $X := \{0, 1\}^S$ (z topologią produktową), gdzie $\#S > \aleph_0$.

a) Udowodnić, że przy $A := \{(x_s)_{s\in S} \in X : x_s = 0$ tylko dla skończenie wielu $s \in S\}$ zachodzi $\mathbf{0} \in \overline{A}$, choć żaden ciąg $\{a^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ nie jest zbieżny do $\mathbf{0}$.

b) Wywnioskować, że przestrzeń X nie jest metryzowalna, a punkt $\mathbf{0}$ nie ma w niej nawet przeliczalnej bazy otoczeń.

9. + 1.42

10. + 1.40

11. + 1.41

12. + 1.37

13. + 1.38

14. + 7.3

15. + a) Warunek (T1) jest równoważny następującemu: dla każdej pary różnych punktów x_1, x_2 istnieje zbiór otwarty U taki, że $x_1 \in U$ i $x_2 \notin U$. Wywnioskować, że każda przestrzeń z własnością (T2) ma własność (T1).

b) Dowieść, że w przestrzeni normalnej dla każdego zbioru domkniętego K i jego otoczenia G, istnieje zawierający K zbiór otwarty, którego domknięcie jest zawarte w G.

16. + a) Niech przekształcenie $f : X \to Y$ **oddziela punkty od zbiorów domkniętych**, tzn. niech dla każdego zbioru domkniętego $K \subset X$ i punktu $x \notin K$ zachodzi $f(x) \notin \overline{f(A)}$. Dowieść, że jeśli X ma własność (T1), tzn. zbiory jednopunktowe w X są domknięte, to f jest 1-1 i przekształcenie $f^{-1} : f(X) \to X$ jest ciągłe.

b) Przekształcenie f z dowodu twierdzenia z §II.2 notatek oddziela punkty od zbiorów domkniętych.

17. + a) Jaki jest warunek konieczny i dostateczny na to, by iloczyn kartezjański rodziny niepustych zbiorów otwartych $U_s \subset X_s$ $(s \in S)$ był otwarty w $\prod_s X_s$?

b) Dowieść, że iloczyn kartezjański rodziny zbiorów domkniętych $A_s \subset X_s$ jest domknięty w $\prod_s X_s$

18. Niech $(X_0, \mathcal{T}_0)$ będzie podprzestrzenią przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$. Udowodnić, że dla każdego zbioru $A \subset X_0$ zachodzi $\mathrm{cl}_0 A = X_0 \cap \mathrm{cl} A$, gdzie cl_0 i cl oznaczają domknięcie w X_0 i w X, odpowiednio.

19. + Równoważne są warunki:
a) Funkcja $w : X \to \mathbb{R}$ jest półciągła dolnie.
b) Dla każdej liczby $r \in \mathbb{R}$, zbiór $\{x \in X : w(x) \leq r\}$ jest domknięty w X.
c) Zbiór $\{(x, t) : t < w(x)\}$ jest otwarty w $X \times \mathbb{R}$ (w topologii produktowej).
d) Funkcja $-w$ jest półciągła górnie.

20. + (c.d. poprzedniego) i) Gdy przestrzeń X jest normalna, a funkcja w jest ograniczona z dołu, to warunki te są rownoważne temu, by w była obwiednią górną pewnej rodziny $\mathcal{F}$ funkcji ciągłych, tzn., by $w(x) = \sup_{f \in \mathcal{F}} f(x)$ dla $x \in X$.

ii)* Gdy ponadto przestrzeń X jest metryzowalna to można żądać, by ta rodzina $\mathcal{F}$ była przeliczalna. (Wskazówka: założyć wpierw, że $w = 1_U$ jest funkcją charakterystyczną zbioru otwartego U.)

21. + W przestrzeni metryzowalnej, każdy podzbiór domknięty jest typu G_δ, a otwarty – typu F_σ.

22. + Niech X i Y będą przestrzeniami metryzowalnymi, niech zbiór A będzie gęsty w X i niech funkcja $f : X \to Y$ ma tę własność, że dla każdego punktu $x_0 \in X$, jej obcięcie do $A \cup \{x_0\}$ jest ciągłe. Czy wynika stąd ciągłość f?

(D) Przestrzenie zupełne: podstawowe własności, twierdzenie Banacha o punkcie stałym.

1. + Zbadać zupełność przestrzeni metrycznych:
a) $(\mathbb{R}^2, d_k)$, gdzie d_k to „metryka kolejowa";
b) To samo przy d_k zastąpionym przez „metrykę rzeka" d_r;
c) $(C(I), d)$, gdzie $d(f, g) = \int_I |f(t) - g(t)| dt$ (tu, $I = [0, 1]$);
d) $(H, d_{\sup})$, gdzie H to zbiór rosnących homeomorfizmów odcinka $I = [0, 1]$;
e) (H, ρ), gdzie H jest jak wyżej i $\rho(f, g) := d_{\sup}(f, g) + d_{\sup}(f^{-1}, g^{-1})$;
Zbadać też, czy w e) metryki d_{sup} i ρ wyznaczają tę sama topologię na H?

2. 3.9

3. + W oparciu o lekturę twierdzenia 2 w §III.2 notatek (str. 23) i jego dowodu, rozwiązać następujące po nim zadanie 1.

4. + 3.10. D)

5. + 3.25

6. 3.27

7. + 3.29

8. 3.30

9. + Niech $\mathcal{F}$ będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni $B(X, \mathbb{R})$ wszystkich ograniczonych funkcji z X do $\mathbb{R}$, przy czym taką, że $1 \in \mathcal{F}$ i $f^2 \in \mathcal{F}$ da każdej funkcji $f \in \mathcal{F}$. Udowodnić, że jeśli $\mathcal{F}$ jest zbiorem domkniętym w metryce $d_{\sup}$, to $\sqrt{f} \in \mathcal{F}$ dla każdej nieujemnej funkcji $f \in \mathcal{F}$. Rozumować następująco:

a) Gdy $1 \geq f \geq \varepsilon$ dla pewnego $\varepsilon > 0$, rozpatrzeć przekształcenie $u \mapsto (1 + u^2 - f)/2$ i dowieść, że przy $L := 1 - \varepsilon$ przekształca ono kulę $B(0, L)$ w siebie i spełnia na tej kuli warunek Lipschitza ze stałą $L < 1$.

b) Punkt stały u_0 tego przekształcenia spełnia warunek $(1 - u_0)^2 = f$.

c) Rozważyć pozostały przypadek (gdy założenie z a) nie jest spełnione).

10. + 7.13

(E) Przestrzenie zupełne: wykorzystanie twierdzenia Baire'a.

1. + 3.6

2. +3.13

3. +3.14

4. +3.24

5. + 3.15

6. + 3.18

7. + Niech przestrzeń X, metryzowalna w sposób zupełny, będzie sumą przeliczalnie wielu zbiorów domkniętych F_s. Dowieść, że zbiór $\bigcup_s \mathrm{Int} F_s$ jest gęsty w X.

8. + Dowieść następującego **twierdzenia Osgooda**: gdy X jest przestrzenią metryczną zupełną i ciąg funkcji ciągłych $f_n : X \to [0, \infty)$ jest punktowo ograniczony, to na pewnym niepustym zbiorze otwartym wszystkie funkcje f_n są z góry ograniczone wspólną stałą. (Ciąg (f_n) jest **punktowo ograniczony**, jesli $\sup_n |f_n(x)| < \infty \ \forall x \in X$.)

W zadaniach 9–11, X jest przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny, a (Y, ρ) – metryczną.

9. Niech ciąg funkcji ciągłych $f_n : X \to Y$ będzie zbieżny punktowo do funkcji φ (niekoniecznie ciągłej). Dowieść, że:

a) Dla każdego $\varepsilon > 0$ pewien ze zbiorów $F_n^\varepsilon = \{x \in X : \rho(f_k(x), f_l(x)) \le \varepsilon \ \forall k, l \ge n\}$ ma niepuste wnętrze; co więcej, zbiór $U^\varepsilon := \bigcup_n \mathrm{int} F_n^\varepsilon$ jest gęsty w X.

b) Zbiór $G := \bigcap_{\varepsilon > 0} U^\varepsilon$ ma tę własność, że dla dowolnych $x \in G$ i $\varepsilon > 0$ istnieje otoczenie punktu x (w przestrzeni X), na którym prawie wszystkie funkcje f_i różnią się od φ o mniej, niż ε.

c) Powyższy zbiór G jest gęsty i typu G_δ w X, a funkcja graniczna φ jest ciągła w punktach $x \in G$. (Jest to jedno z twierdzeń **Baire'a**; **zbieżność punktowa** ciągu $(f_n)_{n=1}^\infty$ do φ oznacza, że $\lim_n f_n(x) = \varphi(x) \ \forall x \in X$, zaś **funkcje f i g różnią się na A o mniej, niż** ε, jeśli $\sup_{a \in A} \rho(f(a), g(a)) < \varepsilon$.)

10. Wywnioskować z powyższego zadania, że gdy $\varphi_j : X \to Y$ $(j \in \mathbb{N})$ są funkcjami, z których każda jest granicą punktową ciągu funkcji ciągłych, to istnieje taki gęsty zbiór G typu G_δ w X, że w każdym jego punkcie wszystkie funkcje φ_j są ciągłe.

11. (Twierdzenie Baire'a o rozdzielnej ciągłości; wersja późniejsza.) Niech funkcja $f : X \times S \to Y$ będzie ciągła ze względu na każdą zmienną przy ustalonej pozostałej, przy czym o przestrzeni S zakładamy, że ma bazę przeliczalną. Udowodnić, że:

a) Dla dowolnych podzbiorów $S_1, S_2, \ldots$ przestrzeni S istnieje gęsty zbiór $G \subset X$, typu G_δ w X i taki, że wszystkie funkcje $X \ni x \mapsto \mathrm{diam}_\rho f(\{x\} \times S_n)$ są ciągłe w każdym jego punkcie. (Wskazówka: użyć poprzedniego zadania i tego, że gdy ciąg (s_j) jest gęsty w S_n, to $\mathrm{diam}_\rho f(\{x\} \times S_n) = \sup_{k,l} \rho(f(x, s_k), f(x, s_l))$.)

b) Gdy wyżej za (S_n) przyjąć bazę topologii przestrzeni S , to otrzymany zbiór G ma tę własność, że funkcja f jest ciągła w każdym punkcie zbioru $G \times S$.

12. (Funkcja Weierstrassa.) Udowodnić istnienie funkcji ciągłej $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, która w żadnym punkcie nie ma pochodnej.

(F) Zwartość w przestrzeniach metryzowalnych.

1. + 2.1

2. + 2.9

3. + 2.10

4. + 2.2

5. + 2.3

6. 2.4

7. + 2.5

8. 2.6

9. + 2.7

10. 2.12

11. + Niech (X, d) i (Y, ρ) będą zwartymi przestrzeniami metrycznymi.
a) Udowodnić, że dla każdej stałej $C > 0$ zbiór tych funkcji z X do Y, które spełniają warunek Lipschitza ze stałą C, jest zwarty w metryce ρ_{sup}.
b) Udowodnić, że gdy U jest podzbiorem przestrzeni X, to dla każdej stałej $C > 0$ zbiór tych funkcji z U do Y, które spełniają warunek Lipschitza ze stałą C, jest zwarty w metryce ρ_{sup}. (Wskazówka: każda z rozpatrywanych funkcji przedłuża sie na $\text{cl}_X U$.)
c) Udowodnić zwartość przestrzeni $(\Gamma(X), d_{\text{sup}})$ wszystkich izometrii z X na X.

(G) Zwartość w ogólnych przestrzeniach topologicznych.

1. + Dowieść zwartości przestrzeni Hausdorffa X, zawierającej podzbiór zwarty taki, że dopełnienie każdego jego otwartego otoczenia w X też jest zwarte. Uzyskać tezy zadań 2.16(B) i 2.11 jako przypadki szczególne.

2. 2.17.

3. 2.19. Czy wynika stąd zwartość kwadratu leksykograficznego?

4. + W przestrzeni Hausdorffa, suma dwóch podzbiorów zwartych jest zbiorem zwartym, a każde dwa rozłączne zbiory zwarte mają rozłączne otoczenia.

5. + Gdy $\mathcal{F}$ jest rodziną zwartych podzbiorów przestrzeni i $\bigcap \mathcal{F} \subset U$, gdzie U jest zbiorem otwartym, to $\bigcap \mathcal{F}_0 \subset U$ dla pewnej skończonej podrodziny $\mathcal{F}_0$ rodziny $\mathcal{F}$.

6. + a) (Twierdzenie Diniego.) Niech X będzie przestrzenią zwartą i ciąg funkcji $f_n : X \to \mathbb{R}$ będzie monotonicznie punktowo zbieżny do funkcji $f : X \to \mathbb{R}$. Dowieść, że jeśli f i wszystkie funkcje f_n są ciągłe, to zbieżność jest jednostajna.
b) Niech $X = [0, 1]$ i przyjmijmy $f_0 = i$ oraz indukcyjnie $f_{n+1} = f_n + \frac{1}{2}(i - f_n^2)$, gdzie $i(x) = x$ dla $x \in [0, 1]$. Udowodnić, że ciąg f_n jest monotonicznie zbieżny do funkcji $\sqrt{i}$ i wywnioskować, że funkcja ta jest jednostajną granicą ciągu funkcji wielomianowych.

7. + Udowodnić, że w przestrzeni zwartej każdy ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ma punkt skupienia –tzn. istnieje punkt przestrzeni, którego każde otoczenie zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu.

8. + (N) 2.14 (Twierdzenie Kuratowskiego o rzutowaniu wzdłuż osi zwartej.)

9. + Zadanie 1 z §IV.5 notatek do wykładu.

10. + Zadanie 2 z §IV.5 notatek do wykładu.

11. + Zadanie 3 z §IV.5 notatek do wykładu.

(H) Zbiór Cantora; (nie)homeomorficzność przestrzeni.

1. + Niech X i Y będą zwartymi przestrzeniami metrycznymi, a $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ – bazami topologii $\mathcal{T}_X$ i $\mathcal{T}_Y$, odpowiednio, złożonymi ze zbiorów domknięto–otwartych. (Dalece nie każda przestrzeń ma taką bazę!) Niech dalej $\Phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ będzie bijekcją taką, że

a) dla każdej skończonej rodziny $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ zachodzi $\bigcap \mathcal{F}' \neq \emptyset \Leftrightarrow \bigcap \Phi(\mathcal{F}') \neq \emptyset$, oraz

b) dla każdych $F_1, F_2, ... \in \mathcal{F}$ zachodzi $\mathrm{diam}(F_n) \to 0 \Leftrightarrow \mathrm{diam}(\Phi(F_n)) \to 0$.

Udowodnić, że wzór $\varphi(x) = \bigcap\{\Phi(F) : F \in \mathcal{F} \text{ i } x \in F\}$ poprawnie określa homeomorfizm $\varphi : X \to Y$. (Wskazówka: dowieść ciągłości φ i wykorzystać ją też przy Φ zastąpionym przez Φ^{-1}.)

2. + Niech X będzie zwartą, niepustą przestrzenią metryzowalną bez puntów izolowanych, taką, że każdy jej punkt ma dowolnie małe otoczenia domknięto–otwarte w X. Niech dalej przestrzeń Y ma te same własności. Udowodnić, że przestrzenie te są homeomorficzne, na następującej drodze:

a) Dowieść, że gdy Z jest niepustym domknięto–otwartym podzbiorem w X lub w Y, to Z można rozbić na dwa niepuste zbiory domknięto–otwarte, a także dla każdego $\varepsilon > 0$ można Z rozbić na skończenie wiele zbiorów domknięto–otwartych o średnicach $< \varepsilon$. („Rozbić" oznacza tu „pokryć rodziną zbiorów parami rozłączch".)

b) Wywnioskować, że gdy Z jest jak wyżej i $\varepsilon > 0$, to dla prawie wszystkich n można Z rozbić na dokładnie n niepustych zbiorów domknięto–otwartych o średnicach $< \varepsilon$.

c) W oparciu o to, skonstruować rodziny $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ domknięto–otwartych podzbiorów w X i w Y, odpowiednio, oraz bijekcję $\Phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, spełniające warunki a) i b) poprzedniego zadania.

3. + Wywnioskować z poprzedniego zadania, że zbiór Cantora C jest homeomorficzny z przeliczalnym iloczynem kartezjańskim dowolnych zbiorów skończonych, z których każdy liczy więcej niż jeden punkt, a także jest homeomorficzny z przestrzenią $C \times H$, dla dowolnego niepustego zbioru domkniętego $H \subset C$.

4. Niech X będzie zwartą przestrzenią metryzowalną.

a) + Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ obierzmy skończone pokrycie $\mathcal{F}_n$ przestrzeni X, złożone ze zbiorów domkniętych o średnicach $< 1/n$, i niech $C = \prod_n \mathcal{F}_n$ i $H = \{(F_n) \in C : \bigcap F_n \neq \emptyset\}$. Dowieść ciągłości i surjektywności przekształcenia $u : H \to X$, określonego wzorem $u(F) = \bigcap_n F_n$ dla $F = (F_n) \in H$.

b) W oparciu o poprzednie zadanie wywnioskować istnienie ciągłej surjekcji zbioru Cantora na X.

c) Wywnioskować z b), że gdy X jest zwartym, wypukłym podzbiorem kostki Hilberta $I^{\mathbb{N}}$, to istnieje ciągła surjekcja odcinka I na X. (Wskazówka: rozszerzyć surjekcję z b) liniowo na składowe zbioru $I \setminus C$.)

5. (N) 1.33

6. (N) 1.36

7. (N) 4.17

8. (N) 4.24

9. (N) 5.2

(I) Spójność i łukowa spójność.

Uwaga: o wszystkich przestrzeniach wolno założyć, że są Hausdorffa, jeśli to pomaga. (Mogłem pomijać to założenie.)

1. 4.1

2. + (por. 4.7.) Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną.
a) Dowieść, że jeśli przestrzeń ta jest spójna, to dla każdych $a, b \in X$ i $\varepsilon > 0$ istnieją punkty $x_1, ..., x_n \in X$ takie, że $x_1 = a, x_n = b$ i $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ dla $i = 1, ..., n-1$.
b) Dowieść implikacji odwrotnej przy założeniu zwartości przestrzeni X.

3. + 4.4

4. + 4.10

5. + 4.15

6. + 4.2

7. + 4.6

8. + 4.11 i +4.20.

9. (por. 4.8 i 4.9). Niech X i Y będą spójnymi przestrzeniami topologicznymi, a $f_0 : X_0 \to Y$ funkcją określoną na podprzestrzeni X_0 przestrzeni X. Dowieść, że jeśli
a) + zbiór $X \setminus X_0$ jest gęsty w X, lub
b) zbiór X_0 jest otwarty w X, funkcja f jest ciągła, a przestrzeń Y jest zwarta,
to podprzestrzeń $Z := \{(x, f(x)) : x \in X_0\} \cup (X \setminus X_0) \times Y$ przestrzeni $X \times Y$ jest spójna.
W b), zbadać też istotność ostatnich dwóch założeń. (Wskazówka do b): rozważyć naturalne rzutowanie Z na X, patrz zad. G8.)

10. + 4.18

11. + 4.19

12. (N) 4.26

13. (N) 4.28

14. (N) 4.27

15. (N) 4.31

16. (N) *4.29

J. Topologia ilorazowa.

1. + a) Niech A i B będą domknietymi podzbiorami zwartych przestrzeni X i Y, odpowiednio. Udowodnić, że jeśli ich dopełnienia $X \setminus A$ i $Y \setminus B$ są ze sobą homeomorficzne, to przestrzenie ilorazowe X/A i Y/B też są ze sobą homeomorficzne. (Wskazówka: zauważyć, że X/A i Y/B są jednopunktowymi uzwarceniami przestrzeni $X \setminus A$ i $Y \setminus B$, odp.)
+ b) (N) 5.2 i 5.3.

2. 5.8

3. Zadanie 2 z §VI.1 notatek do wykładu.

4. Zadanie 3 z §VI.1 notatek do wykładu.

5. Zadanie 4 z §VI.1 notatek do wykładu.

6. + Zadanie 5 z z §VI.1 notatek do wykładu.

7. * Zadanie 7 z §VI.1 notatek do wykładu.

J. Homotopie; twierdzenie Brouwera i pokrewne.

1. + 6.1

2. + 6.2

3. 6.4

4. 6.5

5. Zadanie 1 z §VII. 3 notatek do wykładu.

6. Przemyśleć rozwiązania zadań 1 i 2 z §VII.5 notatek do wykładu.

7. Zadanie 3 z §VII.5 notatek do wykładu.

8. Zadanie 4 z §VII.5 notatek do wykładu.

9. + Zadanie 5 z §VII.5 notatek do wykładu.

10. + Zadanie 6 z §VII.5 notatek do wykładu.

11. 7.29