Topologia I*, jesień 2013 (prowadzący H. Toruńczyk).

Zadania zadane jako prace domowe i niektóre spośród omawianych na ćwiczeniach.

Zadania w dużej mierze pochodzą z zestawu zadań w rozdziale 8 skryptu autorów S. Betley, J. Chaber, E. Pol, R. Pol, czy też są do nich zbliżone. Numery 1.1 etc (dwuczęściowe arabskie) odnoszą się do zadań z tego skryptu.

Znakiem + oznaczono zadania już na ćwiczeniach omówione. Zadania, które nie są tak oznaczone, proszę traktować jako zadane do przemyślenia w domu i ewentualnej prezentacji rozwiązania na zajęciach. Jeśli plusy są wpisane błędnie lub nie zostały wpisane, to będę wdzięczny za wiadomość.

(A). Metryki, kule, izometrie.

1. $^+$ Narysować kule jednostkowe w przestrzeni $\mathbb{R}^2$, o środku w $(0,0)$, względem metryk $d_{\sup}, d_e, d_1$, odpowiednio, gdzie $d_1(x_1,x_2),(y_1,y_2) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Które z przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_{\sup}), (\mathbb{R}^2, d_e), (\mathbb{R}^2, d_1)$ są ze sobą izometryczne?

2. $^+$ Niech d będzie skończoną metryką na zbiorze X, a $C(X)$ zbiorem wszystkich funkcji ciągłych z X do $\mathbb{R}$.

a) Dla $p \in X$ oznaczmy przez f_p funkcję $f_p(x) = d(x,p)$ $(x \in X)$. Dowieść, że przyporządkowanie $X \ni p \mapsto f_p \in C(X)$ jest zanurzeniem izometrycznym przestrzeni (X,d) w $(C(X), d_{\sup})$.

b). Niech dalej $C_b(X) = \{f \in C(X) : \sup|f| < \infty\}$. Ustalmy punkt $p_0 \in X$ i dla $p \in X$ przyjmijmy $g_p(x) := d(x,p) - d(x,p_0)$. Dowieść, że $g_p \in C_b(X)$ i przyporządkowanie $X \ni p \mapsto g_p \in C_b(X)$ jest zanurzeniem izometrycznym przestrzeni (X,d) w $(C_b(X), d_{\sup})$. (Zanurzenie to pochodzi od K. Kuratowskiego.)

3. $^+$ (R. Pol.) Niech funkcja $n : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ będzie różnowartościowym przekształceniem zbioru $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych w zbiór $\mathbb{N}$ liczb naturanych, i dla $a,b \in \mathbb{R}$ przyjmijmy $d(a,b) = 0$ gdy $a = b$ oraz

$$d(a,b) = \sum\{2^{-n(q)} : q \in \mathbb{Q} \cap [\min(a,b), \max(a,b)]\}$$

Udowodnić, że d jest metryką w zbiorze $\mathbb{R}$, przy czym dla $a \in \mathbb{Q}$ jest $d(a_n, a) \to 0 \Leftrightarrow (a_n = a$ dla p.w. $n)$, zaś gdy gdy $a \notin \mathbb{Q}$, to $d(a_n,a) \to 0 \Leftrightarrow |a_n - a| \to 0$.

4. Dla liczby pierwszej p i $a \in \mathbb{Z}$ oznaczmy przez $||a||_p$ **normę p-adyczną** liczby a, zdefiniowaną tak: $||0||_p = 0$ i $||a||_p = 2^{-n}$, gdzie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ jest największą liczbą, dla której p^n dzieli a. Dowieść, że:

a) $^+$ $||a+b||_p \le \max(||a||_p, ||b||_p)$ i wobec tego wzór $d_p(a,b) := ||a-b||_p$ zadaje metrykę na zbiorze $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych.

b) $^+$ Dla liczb pierwszych $p \neq q$, metryki d_p i d_q wyznaczają w $\mathbb{Z}$ różne topologie.

c)* Powtórzyć a) przy $\mathbb{Z}$ zastąpionym przez ciało $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych i wzorze na $||a||$ dla $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ takim: $||a|| = 2^{-n}$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$ spełnia warunek $a = kp^n/l$ dla pewnych liczb całkowitych k,l, niepodzielnych przez p.

Uwaga 1. Dowód, że metryki wyznaczają różne topologie, można przeprowadzić bądź wskazując zbiór, będący otoczeniem danego punktu w jednej metryce, lecz nie będący nim w drugiej metryce, lub też wskazując ciąg punktów, zbieżny do danego punktu w jednej metryce, lecz nie w drugiej.(Oba sposoby są dobre, a jeszcze lepsze są dwa naraz, gdzie się uda.)

5. $^+$ 7.8

6. + 7.9

7. 1.5

(B). Badanie podstawowych pojęć topologicznych na przykładzie (podzbiorów) przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_k)$, $(\mathbb{R}^2, d_r)$, $(C(I), d_{\sup})$, kwadratu leksykograficznego i przestrzeni euklidesowych.

1. 1.1

2. 1.2

3. 1.27

4. $^+$ 1.6

5. Niech $z_0 = \cos\alpha + i\sin\alpha$, gdzie liczba α/π jest niewymierna.
a) + Dowieść, że zbiór $\{z_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w okręgu $S = \{z : |z| = 1\}$.
b) Dowieść, że domknięciem zbioru $A := \{(1+\frac{1}{n})z_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ jest $A \cup S$.

6. 1.11

7. $^+$ 1.18

8. 7.1 (Rozwiązano część C.)

9. 1.7

10. 1.15

11. 1.16

12. 1.17 (N)

13. 1.24

14. 1.33

Patrz też zadanie D9.

(C). Przestrzenie metryczne zupełne.

1. $^+$ Niech $f : A \to Y$ będzie przekształceniem ciągłym podzbioru A przestrzeni (X, d) w przestrzeń (Y, ρ). Dla $x \in \overline{A}$ przyjmijmy $osc(f, x) := \inf_{r>0}\{\mathrm{diam}_\rho(f(B(x, r) \cap A)\}$. („$osc(f, x)$" jest od „oscylacja funkcji f w punkcie x".) Udowodnić, że jeśli metryka ρ jest zupełna, to f można w sposób ciągły przedłużyć na zbiór $\{x \in \overline{A} : osc(f, x) = 0\}$.

2. 3.2 +

3. 3.5

4. 3.6 +

5. 3.13 +

6. 3.14 +

7. + Niech przestrzeń X, metryzowalna w sposób zupełny, będzie sumą przeliczalnie wielu zbiorów domkniętych F_n. Dowieść, że zbiór $\bigcup_n \mathrm{Int}F_n$ jest gęsty w X. (Wskazówka: zbiory $F_n \setminus \mathrm{Int}F_n$ są brzegowe, a $\mathrm{Int}F_n$ są typu F_σ.)

8. 3.15 +

9. 3.18 +

10. 3.24 +

11. 3.29

12. Niech $\mathcal{F}$ będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni $B(X,\mathbb{R})$ wszystkich ograniczonych funkcji z X do $\mathbb{R}$, przy czym taką, że $1 \in \mathcal{F}$ i $f^2 \in \mathcal{F}$ dla każdej funkcji $f \in \mathcal{F}$. Udowodnić, że jeśli $\mathcal{F}$ jest zbiorem domkniętym w metryce $d_{\sup}$, to $\sqrt{f} \in \mathcal{F}$ dla każdej nieujemnej funkcji $f \in \mathcal{F}$. Rozumować następująco:

a) Gdy $1 \geq f \geq \varepsilon$ dla pewnego $\varepsilon > 0$, rozpatrzeć przekształcenie $u \mapsto (1 + u^2 - f)/2$ i dowieść, że przy $L := 1 - \varepsilon$ przekształca ono kulę $B(0, L)$ w siebie i spełnia na tej kuli warunek Lipschitza ze stałą $L < 1$.

b) Gdy u_ε jest punktem stałym tego przekształcenia i $v_\varepsilon := 1 - u_\varepsilon$, to $v_\varepsilon^2 = f$ i $v_\varepsilon \geq 0$.

c) Gdy $1/2 \geq f$, to rozpatrzeć ciąg funkcji $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, taki, że $v_n \geq 0$ i $v_n^2 = f + \frac{1}{n}$.

13. 3.10

14. Niech ciąg funkcji ciągłych $f_n : X \to Y$ będzie zbieżny punktowo do funkcji φ (niekoniecznie ciągłej). Dowieść, że:

a) Dla każdego $\varepsilon > 0$ pewien ze zbiorów $F_n^\varepsilon = \{x \in X : \rho(f_k(x), f_n(x)) \leq \varepsilon \ \forall k \geq n\}$ ma niepuste wnętrze; co więcej, zbiór $U^\varepsilon := \bigcup_n \mathrm{int} F_n^\varepsilon$ jest gęsty w X.

b) Zbiór $G := \bigcap_{\varepsilon>0} U^\varepsilon$ ma tę własność, że dla dowolnych $x \in G$ i $\varepsilon > 0$ istnieje otoczenie punktu x (w przestrzeni X), na którym prawie wszystkie funkcje f_i różnią się od φ o mniej, niż ε.

c) Powyższy zbiór G jest gęsty i typu G_δ w X, a funkcja graniczna φ jest ciągła w każdym punkcie $x \in G$. (Jest to jedno z twierdzeń **Baire'a**; **zbieżność punktowa** ciągu $(f_n)_{n=1}^\infty$ do φ oznacza, że $\lim_n f_n(x) = \varphi(x)\ \forall x \in X$, zaś **funkcje f i g różnią się na A o mniej, niż** ε, jeśli $\sup_{a\in A} \rho(f(a), g(a)) < \varepsilon$.)

15. Wywnioskować z powyższego zadania, że gdy $\varphi_j : X \to Y$ $(j \in \mathbb{N})$ są funkcjami, z których każda jest granicą punktową ciągu funkcji ciągłych, to istnieje taki gęsty zbiór G typu G_δ w X, że w każdym jego punkcie wszystkie funkcje φ_j są ciągłe.

16. Problem 1. * Dla $n \in \mathbb{N}$, niech (X_n, d_n) będzie zupełną przestrzenią metryczną, przekształcenie $T_n : X_{n+1} \to X_n$ będzie ciągłe i ma gęsty obraz, a zbiór $U_n \subset X_n$ będzie otwarty i gęsty. Udowodnić za C. Lennardem, że zbiór $\bigcap_n T_1T_2...T_n(U_{n+1})$ jest gęsty w X_1.

(N) (Wskazówka: gdy $U_n = X_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, rozumować następująco: wychodząc od $x_1 \in X_1$ obrać indukcyjnie $x_{n+1} \in X_{n+1}$ tak, by $d_k(T_{kn}(x_n), T_{k,n+1}(x_{n+1})) < 2^{-n}$ dla $k = 1, ..., n$, gdzie przyjmujemy $T_{kl} := T_k \circ ... \circ T_{l-1}$ dla $k < l$ i $T_{kk} := id_{X_k}$. Następnie dowieść, że $\forall k \exists\ p_k := \lim_{n\to\infty} T_{kn}(x_n)$ i że $T_{k-1}(p_k) = p_{k-1}$, przy czym $d_1(p_1, x_1) \leq 1$.)

17. Problem 2. (Funkcja Weierstrassa.) Udowodnić istnienie funkcji ciągłej $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, nie różniczkowalnej w żadnym punkcie.

18. (N) Problem 3. (Twierdzenie Baire'a o rozdzielnej ciągłości; wersja późniejsza.) Niech funkcja $f : X \times S \to Y$ będzie ciągła ze względu na każdą zmienną przy ustalonej pozostałej, przy czym o S zakładamy, że ma bazę przeliczalną. Udowodnić, że:

a) Dla dowolnych podzbiorów $S_1, S_2, ...$ przestrzeni S istnieje gęsty zbiór $G \subset X$, typu G_δ w X i taki, że wszystkie funkcje $X \ni x \mapsto \mathrm{diam}_\rho f(\{x\} \times S_n)$ są ciągłe w każdym jego punkcie. (Wskazówka: użyć zadania 14 i tego, że gdy ciąg (s_j) jest gęsty w S_n, to $\mathrm{diam}_\rho f(\{x\} \times S_n) = \sup_{k,l} \rho(f(x, s_k), f(x, s_l))$.)

b) Gdy wyżej za (S_n) przyjąć bazę topologii przestrzeni S , to otrzymany zbiór G ma tę własność, że funkcja f jest ciągła w każdym punkcie zbioru $G \times S$.

(D). Własności topologii w przestrzeniach ogólnych.

1. 1.23

2. + Udowodnić, że ciągłość przekształcenia $f : X \to Y$ jest równoważna każdemu z następujących warunków:

d) $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$ dla każdego zbioru $A \subset Y$;

e) $f^{-1}(\mathrm{Int}A) \subset \mathrm{Int}(f^{-1}(A))$ dla każdego zbioru $A \subset Y$;

f) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ dla każdego zbioru $A \subset X$;

g) $\mathrm{Fr}(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(\mathrm{Fr}(A))$ dla każdego zbioru $A \subset Y$, gdzie Fr(S) oznacza część wspólną domknięcia zbioru S i domknięcia jego dopełnienia.

3. 1.12

4. 1.13

5. Udowodnić, że a) iloczyn kartezjański rodziny przestrzeni, posiadających własność (T2), też ma tę własność, oraz b) własność (T4) zachowuje się przy przejściu do podprzestrzeni domkniętych, a (T2) – do dowolnych.

6. + a) Dowieść, że obraz przestrzeni ośrodkowej (tzn. takiej, w której pewien podzbiór przeliczalny jest gęsty) przy przekształceniu ciągłym też jest taką przestrzenią.

b) Przestrzenie $\mathbb{R}^n$ są ośrodkowe w topologii produktowej, podobnie jak $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; jednak przestrzeń $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}(d_{\sup}))$ nie jest ośrodkowa. (Definicja $d_{\sup}$ jest w przykładzie 1f) z §1.)

c)* Przestrzeń $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ jest ośrodkowa.

d) Wywnioskować z a) i c), że iloczyn kartezjański continuum wielu (lub mniej) przestrzeni ośrodkowych jest przestrzenią ośrodkową.

7. Niech $X := \{0,1\}^S$ (z topologią produktową), gdzie $\#S > \aleph_0$.

a) Udowodnić, że przy $A := \{(x_s)_{s\in S} \in X : x_s = 0$ tylko dla skończenie wielu $s \in S\}$ zachodzi $\mathbf{0} \in \overline{A}$, choć żaden ciąg $\{a^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ nie jest zbieżny do $\mathbf{0}$.

b) Wywnioskować, że przestrzeń X nie jest metryzowalna, a punkt $\mathbf{0}$ nie ma w niej nawet przeliczalnej bazy otoczeń. (Definicja na stronach 23-24 notatek.)

c) Przy $S = \mathbb{R}$ zauważyć, że przestrzeń X jest ośrodkowa i zawiera nieprzeliczalną podprzestrzeń dyskretną $\{f_s : s \in \mathbb{R}\}$, gdzie f_s jest funkcją przyjmującą wartość 1 w punkcie s, zaś 0 w pozostałych punktach $s' \in \mathbb{R}$. Wywnioskować, że ośrodkowość nie jest dziedziczona przez podprzestrzenie.

d) Wywnioskować też, że gdy iloczyn $\prod_{s\in S} X_s$ niepustych przestrzeni X_s jest przestrzenią metryzowalną, to tylko przeliczalnie wiele zbiorów X_s nie jest jednopunktowych.

8. + a) Przestrzeń z bazą przeliczalną jest ośrodkowa.

b) Metryzowalna przestrzeń ośrodkowa ma bazę przeliczalną.

c) Podprzestrzeń przestrzeni z bazą przeliczalną też ma taką bazę, wobec czego podprzestrzeń metryzowalnej przestrzeni ośrodkowej jest ośrodkowa.

d) Gdy topologia $\mathcal{T}$ ma bazę przeliczalną, to z każdej bazy topologii można wybrać bazę przeliczalną, a także z każdej rodziny $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ można wybrać przeliczalną podrodzinę $\mathcal{U}_0$ taką, że $\bigcup \mathcal{U}_0 = \bigcup \mathcal{U}$. (Wskazówka: niech $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ będzie bazą przeliczalną i niech $I = \{i \in \mathbb{N} : B_i \subset U$ dla pewnego $U \in \mathcal{U}\}$. Rozważyć rodzinę $(U_i)_{i\in I}$, gdzie $U_i \in \mathcal{U}$ wybrano tak, by $B_i \subset U_i$ dla $i \in I$.)

9. a) „Strzałka” z przykładu 5 w §II.3 jest przestrzenią ośrodkową i spełnia tzw. drugi aksjomat przeliczalności (każdy jej punkt ma przeliczalną bazę otoczeń). Z jej standardowej bazy $\{(a, b] : a, b \in [0, 1], a < b\}$ nie można jednak wybrać bazy przeliczalnej.

b) Stąd i z zadania D8 wywnioskować, że strzałka i kwadrat leksykograficzny z przykładu 1b) w §II.2 nie są przestrzeniami metryzowalnymi.

c) Kwadrat leksykograficzny nie jest przestrzenią ośrodkową.

10. + a) Niech przekształcenie $f : X \to Y$ **oddziela punkty od zbiorów domkniętych**, tzn. niech dla każdego punktu $x \in X$ i jego otoczenia G zachodzi $f(x) \notin \mathrm{cl}(f(X \setminus G))$. Dowieść, że jeśli X

ma własność (T1), tzn. zbiory jednopunktowe w X są domknięte, to f jest 1-1 i przekształcenie $f^{-1} : f(X) \to X$ jest ciągłe.

b) Przekształcenie f z dowodu twierdzenia 1 z §II.6 notatek oddziela punkty od zbiorów domkniętych.

11. + Przeczytać w `http://en.wikipedia.org/wiki/Furstenberg%27s_proof_of_the_infinitude_of_primes` i zreferować studencki dowód Furstenberga, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych. (Kopiowanie adresu mi nie wyszło, jest lepiej zapisany na str. 18 notatek do wykładu.)

12. + Jaki jest warunek konieczny i dostateczny na to, by iloczyn kartezjański rodziny niepustych zbiorów otwartych $A_s \subset X_s$ $(s \in S)$ był otwarty w $\prod_s X_s$? A żeby był domknięty?

13. (N) Udowodnić następującą *zasadę redukcji (Brouwera)*: jeśli topologia $\mathcal{T}$ ma bazę przeliczalną i $\mathcal{K}$ jest taką rodziną niepustych zbiorów domkniętych, że $\bigcap K_n \in \mathcal{K}$ dla każdego ciągu zbiorów $K_1 \supset K_2 \supset ...$, należących do $\mathcal{K}$, to każdy zbiór $K \in \mathcal{K}$ zawiera minimalny zbiór $K' \in \mathcal{K}$ (tzn. $K'' \notin \mathcal{K}$ dla $K'' \subsetneq K'$.)

(E) Zwartość w przestrzeniach metryzowalnych.

1. + 2.1

2. + 2.9

3. + 2.10 (Niektóre implikacje zostały udowodnione na wykładzie, na co można się powołać.)

4. 2.2

5. 2.3

6. + 2.4 (Omówiono na ćwiczeniach.)

7. + 2.5 (Omówiono na ćwiczeniach.)

8. + 2.6 (Omówiono na ćwiczeniach.)

9. + 2.7

10. 2.11

11. + Niech (X, d) i (Y, ρ) będą zwartymi przestrzeniami metrycznymi.

a) Udowodnić, że dla każdej stałej $C > 0$ zbiór tych funkcji z X do Y, które spełniają warunek Lipschitza ze stałą C, jest zwarty w metryce $\rho_{\sup}$.

b) Udowodnić, że gdy U jest podzbiorem przestrzeni X, to dla każdej stałej $C > 0$ zbiór tych funkcji z U do Y, które spełniają warunek Lipschitza ze stałą C, jest zwarty w metryce $\rho_{\sup}$. (Wskazówka: każda z rozpatrywanych funkcji przedłuża sie na $\mathrm{cl}_X U$.)

12. + Dla zwartej przestrzeni metrycznej (X, d) oznaczmy przez $\Gamma(X)$ zbiór wszystkich izometrii z (X, d) do (X, d). Udowodnić zwartość przestrzeni $(\Gamma(X), d_{\sup})$.

(F) Zwartość w ogólnych przestrzeniach topologicznych.

1. + Dowieść zwartości przestrzeni Hausdorffa X, zawierającej podzbiór zwarty taki, że dopełnienie każdego jego otwartego otoczenia w X też jest zwarte. Uzyskać tezy zadań 2.13 i 2.16(B) jako przypadki szczególne (por.niżej zad. F3).

2. + 2.12 (Omówiono na ćwiczeniach.)

3. + 2.13 gdy $U = X$ –omówiono na ćwiczeniach.

4. + 2.17.

5. + Dowieść, że w przestrzeni Hausdorffa, suma dwóch podzbiorów zwartych jest zbiorem zwartym, a każde dwa rozłączne zbiory zwarte mają rozłączne otoczenia.

6. + Dowieść, że gdy $\mathcal{F}$ jest rodziną zwartych podzbiorów przestrzeni i $\bigcap \mathcal{F} \subset U$, gdzie U jest zbiorem otwartym, to $\bigcap \mathcal{F}_0 \subset U$ dla pewnej skończonej podrodziny $\mathcal{F}_0$ rodziny $\mathcal{F}$.

7. + a) (Twierdzenie Diniego.) Niech X będzie przestrzenią zwartą i ciąg funkcji $f_n : X \to \mathbb{R}$ będzie monotonicznie punktowo zbieżny do funkcji $f : X \to \mathbb{R}$. Dowieść, że jeśli f i wszystkie funkcje f_n są ciągłe, to zbieżność jest jednostajna.

b) Niech $X = [0,1]$ i przyjmijmy $f_0 = j$ oraz indukcyjnie $f_{n+1} = f_n + \frac{1}{2}(i - f_n^2)$, gdzie $j(x) = x$ dla $x \in [0,1]$. Udowodnić, że ciąg f_n jest monotonicznie zbieżny do funkcji $\sqrt{j}$ i wywnioskować, że $\sqrt{j}$ jest jednostajną granicą ciągu funkcji wielomianowych.

8. + Udowodnić, że w przestrzeni zwartej każdy ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ma punkt skupienia –tzn. istnieje punkt przestrzeni, którego każde otoczenie zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu.

9. + Zadanie 1 ze str. 41 notatek (dotyczy przestrzeni lokalnie zwartych).

10. + Zadanie 2 ze str. 41 notatek.

(G) Spójność i łukowa spójność.

Uwaga: o wszystkich przestrzeniach wolno założyć, że są Hausdorffa, jeśli to pomaga. (Mogłem pomijać to założenie.)

1. 4.1

2. + (por. 4.7.) Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną.

a) Dowieść, że jeśli przestrzeń ta jest spójna, to dla każdych $a, b \in X$ i $\varepsilon > 0$ istnieją punkty $x_1, ..., x_n \in X$ takie, że $x_1 = a, x_n = b$ i $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ dla $i = 1, ..., n-1$.

b) Dowieść implikacji odwrotnej przy założeniu zwartości przestrzeni X.

3. 4.4

4. 4.10

5. 4.15

6. 4.2

7. 4.6

8. 4.11 i 4.20.

9. (por. 4.8 i 4.9). Niech X i Y będą spójnymi przestrzeniami topologicznymi, a $f_0 : X_0 \to Y$ funkcją określoną na podprzestrzeni X_0 przestrzeni X. Dowieść, że jeśli

a) zbiór $X \setminus X_0$ jest gęsty w X, lub

b) zbiór X_0 jest otwarty w X, funkcja f jest ciągła, a przestrzeń Y jest zwarta,

to podprzestrzeń $Z := \{(x, f(x)) : x \in X_0\} \cup (X \setminus X_0) \times Y$ przestrzeni $X \times Y$ jest spójna.
W b), zbadać też istotność ostatnich dwóch założeń. (Wskazówka do b): wykorzystać twierdzenie Kuratowskiego o domkniętości rzutowania wzdłuż Y.)

10. 4.18

11. 4.19

12. 4.26

13. 4.28

14. 4.27

15. 4.31

16. *4.29

17. (N) a) Niech U będzie obszarem (tzn. zbiorem spójnym i otwartym) w $\mathbb{R}^2$, zaś A jej podzbiorem, nie mającym w A punktów skupienia. Udowodnić, że zbiór $U \setminus A$ jest łukowo spójny. (Wskazówka: niech wpierw zbiór A będzie jednopunktowy.)

b) * Dowieść tego samego, gdy zbiór A jest przeliczalny (lecz może mieć punkty skupienia).

(H) Przekształcenia ilorazowe, (nie)homeomorficzność przestrzeni, zbiór Cantora.

1. + Niech dane będą funkcje $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$. Dowieść, że:
a) Gdy przekształcenie f jest ilorazowe, a $g \circ f$ jest ciągłe, to i g jest ciągłe.
b) Gdy przekształcenia f i $g \circ f$ są ilorazowe, to g też jest.
c) Gdy przekształcenia f i g są ilorazowe, to $g \circ f$ też jest.

2. + Niech X będzie zwartą przestrzenią metryzowalną, a A jej domkniętym podzbiorem. Dowieść, że

a) Przestrzeń X/A jest homeomorficzna z podzbiorem przestrzeni $cX := X \times [0,1]/X \times \{1\}$ (zwanej *stożkiem* nad X).

b) Jeśli X jest podprzestrzenią przestrzeni euklidsowej $\mathbb{R}^n$, to stożek cX jest hoeomorficzny ze zbiorem $\{ty : t \in [0,1], y \in X \times \{1\}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

3. + a) Niech $D = I^2 \subset \mathbb{R}^2$. Korzystając ze wzoru

$$\mathrm{Fr(D \times D) = Fr(D) \times D \cup D \times Fr(D)}$$

dowieść, że sfera S^3 jest sumą dwóch pełnych torusów, sklejonych brzegami.

b)* Wywnioskować, że gdy z przestrzeni $\mathbb{R}^3$ wyjąć wnętrze standardowo położonego pełnego torusa, to otrzymamy przestrzeń homeomorficzną z pełnym torusem bez punktu.

c)* Sprobować wyobrazić to sobie!

Problem 4. Wobrazić sobie **trąbkę Borsuka**, zdefiniowaną na rysunku, lub zrobić jej model plastelinowy. Czy trąbka ta jest przestrzenią ściągalną ?

4. + Ustalić, czy któreś dwie z poniższych przestrzeni są ze sobą homeomorficzne: okrąg $x^2+y^2 = 1$, zbiór liczb wymiernych, zbiór licz niewymiernych, odcinki $[0,1]$, $[0,1)$, $(0,1)$, kostka $[0,1]^2$ (wszystkie traktowane jako poprzestrzenie $(\mathbb{R}^2, d_e)$ lub $(\mathbb{R}, d_e)$, odpowiednio), kostka Hilberta $[0,1]^{\mathbb{N}}$ i kostki Tichonowa $[0,1]^{\mathbb{R}}$ i $[0,1]^A$, gdzie $\#A > \#\mathbb{R}$. (Odpowiedź: nie, choć dla pary $[0,1]^2, [0,1]^{\mathbb{N}}$ może to wymagać dodatkowych środków.)

5. Udowodnić, że każdy zwarty zbiór wypukły w $\mathbb{R}^n$, o niepustym wnętrzu, jest homeomorficzny z kulą $\overline{B^n}$.

6. Niech X i Y będą zwartymi przestrzeniami metrycznymi, a $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ – bazami topologii $\mathcal{T}_X$ i $\mathcal{T}_Y$, odpowiednio, złożonymi ze zbiorów domknięto–otwartych. (Dalece nie każda przestrzeń ma taką bazę!) Niech dalej $\Phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ będzie bijekcją taką, że

a) dla każdej skończonej rodziny $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ zachodzi $\bigcap \mathcal{F}' \neq \emptyset \Leftrightarrow \bigcap \Phi(\mathcal{F}') \neq \emptyset$, oraz

b) dla każdych $F_1, F_2, ... \in \mathcal{F}$ zachodzi $\mathrm{diam}(F_n) \to 0 \Leftrightarrow \mathrm{diam}(\Phi(F_n)) \to 0$.

Udowodnić, że wzór $\varphi(x) = \bigcap\{\Phi(F) : F \in \mathcal{F} \text{ i } x \in F\}$ poprawnie określa homeomorfizm $\varphi : X \to Y$. (Wskazówka: dowieść ciągłości φ i wykorzystać ją też przy Φ zastąpionym przez Φ^{-1}.)

7. + Niech X będzie zwartą, niepustą przestrzenią metryzowalną bez punktów izolowanych, taką, że każdy jej punkt ma dowolnie małe otoczenia domknięto–otwarte. Niech dalej przestrzeń Y ma te same własności. Udowodnić, że przestrzenie te są homeomorficzne, na następującej drodze:

a) Dowieść, że gdy Z jest niepustym domknięto–otwartym podzbiorem w X lub w Y, to Z można rozbić na dwa niepuste zbiory domknięto–otwarte, a także dla każdego $\varepsilon > 0$ można Z rozbić na skończenie wiele zbiorów domknięto–otwartych o średnicach $< \varepsilon$. („Rozbić" oznacza tu „pokryć rodziną zbiorów parami rozłącznych".)

b) Wywnioskować, że gdy Z jest jak wyżej i $\varepsilon > 0$, to dla prawie wszystkich n można Z rozbić na dokładnie n niepustych zbiorów domknięto–otwartych o średnicach $< \varepsilon$.

c) W oparciu o to, skonstruować rodziny $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ domknięto–otwartych podzbiorów w X i w Y, odpowiednio, oraz bijekcję $\Phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, spełniające warunki a) i b) zadania 1.

8. Wywnioskować z poprzedniego zadania, że zbiór Cantora C jest homeomorficzny z iloczynem kartezjańskim przeliczalnie wielu dowolnych zbiorów skończonych, z których każdy liczy więcej niż jeden punkt, a także jest homeomorficzny z przestrzenią $C \times H$, dla dowolnego niepustego zbioru domkniętego $H \subset C$.

9. + Niech X będzie zwartą przestrzenią metryzowalną.

a) Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ obierzmy skończone pokrycie $\mathcal{F}_n$ przestrzeni X, złożone ze zbiorów domkniętych o średnicach $< 1/n$, i niech $C = \prod_n \mathcal{F}_n$ i $H = \{(F_n) \in C : \bigcap F_n \neq \emptyset\}$. Dowieść ciągłości i surjektywności przekształcenia $u : H \to X$, określonego wzorem $u(F) = \bigcap_n F_n$ dla $F = (F_n) \in H$.

b) W oparciu o zadanie 3 wywnioskować istnienie ciągłej surjekcji zbioru Cantora na X.

10. Niech X będzie zwartym zbiorem wypukłym w $\mathbb{R}^n$ lub w $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Skonstruować ciągłą surjekcję odcinka $[0, 1]$ na X, na następującej drodze: obrać ciągłą surjekcję z C na X, gdzie C jest zbiorem Cantora, reprezentowanym tym razem w standardowy sposób jako podzbiór odcinka $I = [0, 1]$, i rozszerzyć ją liniowo na każdą składową zbioru $I \setminus C$.

(I) Homotopie, twierdzenia Brouwera i Borsuka-Ulama, indeks pętli płaskiej, tematy pokrewne.

1. + a) Projekcja $\Pi : \mathbb{R}^n_* \to \mathbb{R}^n_*$, dana wzorem $\Pi(x) = x/||x||$, jest w $\mathbb{R}^n_*$ homotopijna z przekształceniem identycznościowym.

b) W związku z tym, dla dowolnej przestrzeni X, przekształcenia $u, v : X \to \mathbb{R}^n_*$ są homotopijne w $\mathbb{R}^n_*$ wtedy i tylko wtedy, gdy złożenia $\Pi \circ u$ i $\Pi \circ v$ są homotopijne w S^{n-1}. W szczególności, przekszałcenie u jest nieistotne w $\mathbb{R}^n_*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Pi \circ u$ jest nieistotne w S^{n-1}.

c) Wywnioskować, że przekształcenie $f : X \to S^{n-1}$ jest nieistotne w S^{n-1} wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieistotne w $\mathbb{R}^n_*$.

2. + 6.2

3. + 6.4

4. 6.5

5. + Niech X_0 będzie domknietym podzbiorem zwartej przestrzeni metrycznej X i niech $f : X_0 \to \mathbb{R}^n_*$ będzie przekształceniem, nie przedłużajacym się w sposób ciągły na X. Wówczas wśród zawierających X_0 zbiorów zwartych, na które f nie można w sposób ciągły przedłużyć, istnieje minimalny względem inkluzji. (Przedłużenia mają mieć wartości w $\mathbb{R}^n_*$.)

Wskazówka: skorzystać z lematu Zorna–Kuratowskiego i tego, że jeśli f przedłuża się na zwarty zbiór $X' \subset X$, to przedłuża się na jego otoczenie (co wymaga uzasadnienia).

6. + Niech przekształcenie $f : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ będzie takie, że $f(S^{n-1}) \subset S^{n-1}$ i $f_{|S^{n-1}} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ jest istotne. Przyjmując twierdzenie Brouwera w wymiarze n dowieść, że:

a) Gdy $g : \overline{B^n} \to \overline{B^n}$ jest ciągłe, to $f(x_0) = g(x_0)$ dla pewnego $x_0 \in \overline{B^n}$. (Wskazówka: dowód $\neg$iii)$\Rightarrow$ $\neg$ii) w twierdzeniu 2 z §VI.3.)

b) $\operatorname{im}(f) \supset \overline{B^n}$ oraz $f(x_0) = x_0$ dla pewnego x_0.

Definicja. Mówimy, że przestrzeń X ma **własność punktu stałego**, jeśli każde przekształcenie $f : X \to X$ ma punkt stały.

7. Niech przestrzeń X_0 będzie homeomorficzna z retraktem przestrzeni X. Dowieść, że:

a) Jeśli przestrzeń X jest ściągalna, to X_0 też.

b) Jeśli X ma własność punktu stałego, to X_0 też ją ma.

Wywnioskować, że własność punktu stałego ma każdy zwarty zbiór wypukły w $\mathbb{R}^n$ o niepustym wnętrzu. (Patrz zadanie 2 w §V.2.)

8. a) Niech (X, d) będzie zwartą przestrzenią metryczną. Dowieść, że jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje przekształcenie $f_\varepsilon : X \to X_\varepsilon$ takie, że X_ε jest podprzestrzenią X z własnością punktu stałego i $d(f_\varepsilon(x), x) < \varepsilon$ dla $x \in X$, to X ma własność punktu stałego. (Wskazówka: przypuśćmy, że $f : X \to X$ i $f(x) \neq x$ $\forall x \in X$; przyjąć $\varepsilon := \inf\{d(f(x), x) : x \in X\}$, dowieść, że $\varepsilon > 0$ i rozpatrzeć punkt $p \in X_\varepsilon$ taki, że $f_\varepsilon f(p) = p$.)

b) Wywnioskować z twierdzenia Brouwera, że kostka Hilberta $I^{\mathbb{N}}$ ma własność punktu stałego. (Wskazówka: zbadać $d(f_n(x), x)$ dla $x \in X$ i f_n będącego naturalnym rzutowaniem na $\{(x_j)_{j=1}^\infty : x_j = 0 \text{ dla } j > n\}$; tu d jest dogodną metryką zadającą topologię przestrzeni $I^{\mathbb{N}}$.)

9. + Dla $j = 1, ..., n$ i $\varepsilon = +, -$ oznaczamy przez $F_j^\varepsilon = \{(x_1, ..., x_n) \in [-1, 1]^n : x_i = \varepsilon 1\}$ ściany kostki $J^n := [-1, 1]^n$. Dowieść, że jeśli zbiory zwarte $A_j^\varepsilon \subset J^n$ są takie, że $\bigcup_{j,\varepsilon} A_j^\varepsilon = J^n$ i $A_j^\varepsilon \supset F_j^\varepsilon$ dla $j = 1, ..., n, \varepsilon = \pm$, to $A_j^+ \cap A_j^- \neq \emptyset$ dla pewnego j. (Wskazówka: przyjąć przeciwnie i dowieść, że nie istnieje punkt stały przekształcenia $f := (-f_j)_{j=1}^n$, gdzie $f_j : J^n \to J$ spełnia warunki $f_j(A_j^\varepsilon) = \{\varepsilon 1\}$ dla każdych j i ε jak wyżej.)

10. Problem 5. Niech $W = \{(1, 0, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 1)\} \subset \mathbb{R}^n$. Dla skończonego zbioru $E \subset W$ oznaczmy przez $\Delta(E)$ jego powłokę wypukłą w $\mathbb{R}^n$, tzn. $\Delta(E) := \{\sum t(e)e : e \in I^E \text{ i } \sum_{e \in E} t(e) = 1\}$. Niech też $\Delta := \Delta(W)$. Zakładając twierdzenie Brouwera,

a) Udowodnić **zasadę Knastera – Kuratowskiego – Mazurkiewicza**: gdy każdemu punktowi $e \in W$ przyporządkować domknięty podzbiór F_e sympleksu Δ tak, by $\Delta(E) \subset \bigcup_{e \in E} F_e$ dla każdego $E \subset W$, to $\bigcap_{e \in W} F_e \neq \emptyset$. (Wskazówka: przy zaprzeczeniu tezy podporządkować pokryciu $\{\Delta \setminus F_e : e \in W\}$ podział jedynki $(\lambda_e)_{e \in W}$ i dowieść, że funkcja $\Delta \ni x \mapsto \sum_e \lambda_e(x)e$ nie ma punktu stałego.)

b) Wywnioskować, że gdy $\{C_e : e \in W\}$ jest domkniętym pokryciem sympleksu Δ takim, że $C_e \cap \Delta(W \setminus \{e\}) = \emptyset$ dla każdego $e \in W$, to $\bigcap_e C_e \neq \emptyset$.

c) Dowieść dalej istnienia liczby $\delta > 0$ takiej, że każde pokrycie domknięte $\mathcal{F}$ sympleksu Δ, spełniające warunek $\operatorname{diam}(F) < \delta$ $\forall F \in \mathcal{F}$, zawiera n zbiorów z niepustym przecięciem. (Wskazówka: przy $C_e := \bigcup\{F : F \in \mathcal{F} \text{ i } F \cap \Delta(W \setminus \{e\}) = \emptyset\}$ dowieść, że jeśli liczba δ jest dostatecznie mała, to $\{C_e : e \in W\}$ jest pokryciem sympleksu Δ.)

11. + We wstędze Moebiusa i płaszczyźnie rzutowej wskazać nierozcinającą krzywą Jordana, w przypadku wstęgi różną od krzywej brzegowej.

12. + Dowieść, że gdy $Y = \mathbb{R}^n_*$ lub $Y = S^{n-1}$, to dla $k < n - 1$ każde przekształcenie z S^k w Y jest nieistotne. (Można korzystać z tego, że gdy $l < n$, to każde przekształcenie z A w $\mathbb{R}^n_*$, gdzie A jest zbiorem zwartym w $\overline{B^l}$, przedłuża się do przekształcenia z $\overline{B^l}$ w $\mathbb{R}^n_*$; patrz też wniosek 2 w §1.)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

Uwaga. a) Zadania są różnej trudności – proszę nie zaniedbywać zadań łatwiejszych i upewniać się, czy nie sprawiają trudności „zadania z pikami” z [BCPP], które są uważane za podstawowe na potoku ogólnym. (Sporo takich zadań umieściłem wyżej; nie wszystkie są „oczywiste"!)

b) Zadania, których nie było w pliku zad(5), a pojawiły się w zad(8), to B12, C13–C18 i D3–D12. Do pliku zad(9) dopisałem tylko zadanie (problem) C18, uzupełniłem D9 i D10 i dopisałem D12. W pliku zad(10) dopisałem sekcje E i F, w tym w zad(11) – E11, E12, F9 i F10.

W pliku zad(12) dopisałem sekcję G.

W pliku zad(13) dopisałem sekcje H i I oraz zadanie(a?) z literą (N). W pliku zad(14) rozbudowałem sekcję I i dopisałem wskazówkę do zadania (problemu) C16. W zad(15) dopisałem zadania I11 oraz I12.