Zadania omawiane na ćwiczeniach lub w w pracach domowych. Znakiem + staram się oznaczyć zadania (lub ich części) już omówione, przy czym + bezpośrednio po numerze zadania oznacza, że zostało ono rozwiązane w całości, a np. po b) – że rozwiązano część b).

Porcja dotycząca twierdzenia Brouwera i definicji homotopii. (Oznaczenia jak w notatkach do wykładu.)

Przez $\mathrm{Fr}(X_0)$ oznaczam brzeg podzbioru X_0 rozważanej przestrzeni topologicznej.

A. $\diamond$ Przypomnieć sobie wiadomości dotyczące homotopii przekształceń, ujęte w zadaniu na str. 1 notatek do wykładu.

B. $\diamond$ + a) Własność punktu stałego ma charakter topologiczny: jeśli przysługuje ona pewnej przestrzeni X, to przysługuje też każdej przestrzeni homeomorficznej z X.

b) Podobnie, jeśli istnieje ciągła retrakcja przestrzeni X na jej podprzestrzeń X_0, to istnieje też ciągła retrakcja X' na X'_0, gdy para (X', X'_0) jest homomorficzna z parą (X, X_0) (tzn., gdy $X'_0 = f(X_0)$ dla pewnego homeomorfizmu $f : X \to X'$.)

c) Retrakt przestrzeni, mającej własność punktu stałego, też ma tę własność.

d) Retrakt przestrzeni ściągalnej też jest przestrzenią ściągalną.

Definicja. Zbiór $I^\infty = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in I \text{ dla każdego } n\}$ rozpatrujemy z topologią, wyznaczoną przez metrykę $d(x,y) = \max_n \frac{1}{n}|x_n - y_n|$. (Ta przestrzeń topologiczna nazywana jest **kostką Hilberta**.)

1. $\diamond$ + a) Niech (X, d) będzie zwartą przestrzenią metryczną i niech dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje przekształcenie f_ε z X w podprzestrzeń $X_\varepsilon \subset X$ mającą własność punktu stałego, takie, że $d(f_\varepsilon(x), x) < \varepsilon$ dla $x \in X$. Dowieść, że X ma własność punktu stałego.

b) Wywnioskować, że kostka Hilberta I^∞ ma własność punktu stałego. (Wskazówka: zbadać $d(f_n(x), x)$ dla $x \in I^\infty$ i f_n będącego naturalnym rzutowaniem na $\{(x_j)_{j=1}^\infty : x_j = 0 \text{ dla } j > n\}$.

2. $\diamond$ + a) Dowieść, że gdy zbiór $X \subset \mathbb{R}^n$ jest **gwiaździsty** względem pewnego punktu $p \in \mathbb{R}^n$, to jest ściągalny. („Gwiaździstość" ta oznacza, że dla każdego punktu $x \in X$, odcinek $[p, x]$ jest zawarty w X.)

b) Retrakt przestrzeni ściągalnej też jest przestrzenią ściągalną.

c) Niech $X = [0,1] \times \{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{1/n\} \times [-1/n, 1/n]$. Dowieść, że X jest przestrzenią ściągalną z własnością punkt stałego. (Wskazówka: skonstruować retrakcję trójkąta $\mathrm{conv}(X)$ na X.)

d) Dowieść też, że powyższa przestrzeń X jest retraktem płaszczyzny $\mathbb{R}^2$. (Wskazówka: j.w.)

3. $\diamond$ + a) Dane jest przekształcenie $f : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$. Dowieść **twierdzenia Bohla**: istnieje punkt stały dla f lub punkt $x \in S^{n-1}$ taki, że $f(x) = tx$ dla pewnego $t > 1$. (Wskazówka: złożyć f z retrakcją $r : \mathbb{R}^n \to \overline{B^n}$, daną wzorem $r(x) = x$ gdy $\|x\| \le 1$ i $r(x) = x/\|x\|$ gdy $\|x\| \ge 1$.)

b) Wywnioskować, że gdy przekształcenie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ma tę własność, że zbiór $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in (1,\infty)\cdot x\}$ jest ograniczony, to ma ono punkt stały. (Przez $(1,\infty)\cdot x$ oznaczyłem zbiór $\{tx : t \in (1,\infty)\}$.)

c) Wywnioskować też, że gdy przekształcenie $f : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ spełnia warunek $f(S^{n-1}) \subset \overline{B^n}$, to ma ono punkt stały.

d) Ogólniej, jest tak i gdy $\langle f(x), x\rangle \le 1$ dla $x \in S^{n-1}$.

4. $\diamond$ + a) Oznaczmy przez C stożek $[0,\infty)^n \setminus \{(0,...,0)\}$. Dowieść, że dla każdego przekształcenia $f : C \to C$ istnieje punkt $x \in C$ i skalar $t \ge 0$, dla których$f(x) = tx$. (Wskazówka: rozważyć obcięcie f do sympleksu $\Delta := \{x \in C : \sum_i x_i = 1\}$ i naturalną retrakcję $r : C \to \Delta$.)

b) Uzyskać stąd **twierdzenie Frobeniusa**: każda $n \times n$–macierz o wyrazach nieujemnych ma pewną nieujemną wartość własną.

5. $\diamond$ Niech $f : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem takim, że $0 \notin f(\overline{B^n})$.

a) Zauważyć, że przekształcenie $f_{|S^{n-1}}$ jest nieistotne w $\mathbb{R}^n_*$, więc nie jest w $\mathbb{R}^n_*$ homotopijne z włożeniem $S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. (Wskazówka: w „notatkach" wniosek 1 na str. 4 i części a), d) zadania ze str.1.)

b) Wywnioskować, że dla pewnego $x \in S^{n-1}$ zachodzi $0 \in (x, f(x))$ (inaczej: $f(x) = tx$, gdzie $t < 0$).

6. $\diamond$ + [1] Łamana L łączy lewy bok kwadratu J^2 z prawym, a łamana L' – dolny bok z górnym. (Tu, $J = [-1, 1]$.) Dowieść, że łamane te przecinają się.

7. $\diamond$ + Niech X będzie zwartym zbiorem wypukłym w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i niech $p \in \mathrm{int}(X)$. Dowieść, że istnieje taki homeomorfizm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, że $f(X) = \overline{B^n}$ i $f(p) = 0$. (Wówczas też $f(\mathrm{Fr}(X)) = S^{n-1}$.)

8. $\diamond$ + X i p są jak w zadaniu poprzednim.

a) Niech $f : X \to \mathbb{R}^n$ będzie przekszałceniem takim, że $p \in f(\mathrm{Fr}(X))$ albo przekształcenie $f_{|\mathrm{Fr}(X)} : \mathrm{Fr}(X) \to \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ jest istotne w $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$. Dowieść, że $p \in f(X)$. (Wskazówka: porównaj zad. 5a).)

b) Dowieść, że założenia w a) są spełnione, jeśli dla każdego punktu $x \in \mathrm{Fr}(X)$, punkt p nie leży na odcinku otwartym $(x, f(x))$. Dowieść też, że ma to miejsce w każdym z następujących przypadków:

i) $\|x - f(x)\| \le \|x - p\|$ dla każdego punktu $x \in \mathrm{Fr}(X)$;

ii) dla każdego punktu $x \in \mathrm{Fr}(X)$, kąt $pxf(x)$ jest niezerowy lub nieokreślony. (To ostatnie ma miejsce, gdy $x = f(x)$.)

iii) $X = [-1, 1]^n$, $p = 0$, zaś f ma tę własność, że $f(\{x \in X : x_i = -1\}) \subset \{y \in \mathbb{R}^n : y_i \le 0\}$ i $f(\{x \in X : x_i = 1\}) \subset \{y \in \mathbb{R}^n : y_i \ge 0\}$, dla $i = 1, ..., n$.

iv) X jest zwartym wielościanem wypukłym, a f przeprowadza każdą jego $(n-1)$–ścianę w jej podzbiór. (Nie definiuję, czym są taki wielościan i jego $(n-1)$–ściany; wystarcza wiedzieć, że $\mathrm{Fr}(X)$ jest skończoną sumą tych ścian i że X i one są wypukłe. Obejmuje to przypadki, gdy X to kostka lub sympleks.)

9. $\diamond$ + (Poprzednio kolejność zadań 8 i 9 była inna, lecz ta jest lepsza.) Oznaczmy przez J^n kostkę $[-1, 1]^n$, a przez $F_k^+ = \{x \in J^n : x_k = 1\}$ i $F_k^- = \{x \in J^n : x_k = -1\}$ jej ściany, dla $k = 1, ..., n$.

a) Dowieść **twierdzenia Poincaré'go–Mirandy**: jeśli przekształcenie $f = (f_1, ..., f_n) : J^n \to \mathbb{R}^n$ jest takie, że $f_k(F_k^-) \subset (-\infty, 0]$ i $f_k(F_k^+) \subset [0, \infty)$ dla $k = 1, ..., n$, to $f(x) = 0$ dla pewnego $x \in J^n$.

b) Niech A_k^ε będą takimi zwartymi podzbiorami kostki J^n, że $A_k^\varepsilon \supset F_k^\varepsilon$ dla $k = 1, ..., n$ i $\varepsilon = +, -$. Dowieść, że jeśli $A_k^+ \cap A_k^- = \emptyset$ dla $k = 1, ..., n$, to $\bigcup_{k=1}^n (A_k^+ \cup A_k^-) \ne [-1, 1]^n$. (Wskazówka: przyjąć $f_i(x) = \mathrm{dist}(x, A_i^-) - \mathrm{dist}(x, A_i^+)$; zbadać, czy może być $x \in A_i^+ \cup A_i^-$ jeśli $f_i(x) = 0$.)

c) Wywnioskować też z a), że gdy przekształcenie $g : J^n \to \mathbb{R}^n$ jest takie, że $g(F_k^\varepsilon) \subset F_k^\varepsilon$ dla $k = 1, ..., n$ i $\varepsilon = \pm$, zaś przekształcenie $h : J^n \to J^n$ jest dowolne, to $g(x) = h(x)$ dla pewnego $x \in J^n$. W szczególności, $g(J^n) \supset J^n$. (Wskazówka: wziąć $f = g - h$.)

10. $\diamond$ Niech X, T i Y będą przestrzeniami metryzowalnymi, przy czym przestrzeń X jest zwarta. Na przestrzeni $C(X, Y)$ rozpatrujemy metrykę $d_{\sup}(f, g) := \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$, gdzie d jest ustaloną metryką, zadającą topologię przestrzeni Y.

a) Tożsamość $f_t(x) = F(x, t)$ wiąże z każdą funkcją $F : X \times T \to Y$ rodzinę funkcji $\{f_t : X \to Y\}_{t \in T}$, i vice versa. Dowieść, że funkcja F jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie funkcje f_t i funkcja $T \ni t \mapsto f_t \in C(X, Y)$ są ciągłe.

b) Dowieść, że podbazą topologii $C(X, Y)$ jest rodzina zbiorów $N_{K,U} := \{f \in C(X, Y) : f(K) \subset U\}$, przy K i U przebiegających wszystkie zbiory zwarte $K \subset X$ i zbiory otwarte $U \subset Y$, odpowiednio.

c) Wywnioskować, że gdy metryki ρ i d wyznaczają na Y tę samą topologię, to $\rho_{\sup}$ i $d_{\sup}$ wyznaczają tę samą topologię na $C(X, Y)$.

Uwaga 1. Dla każdych przestrzeni topologicznych X, Y można w ten sposób zadać tzw. **topologię zwarto–otwartą** w $C(X, Y)$. By miała on dostatecznie dobre własności, nakłada się na X i Y pewne warunki, słabsze jednak od poczynionych wyżej.

---

[1] Na ćwiczeniach mieliśmy pewien kłopot z przyjętymi formułami. Proszę zamiast nich wypróbować następujące. Niech $a = (a_1, a_2) : J \to L$ i $a' = (a_1', a_2') : J \to L'$ będą parametryzacjami tych łamanych. Przyjmijmy $h(s, t) = ((a_1(s) - a_1'(t))/m(s, t), (a_2(s) - a_2'(t))/m(s, t))$, gdzie $m(s, t) = \max(|a_1(s) - a_1'(t)|, |a_2(s) - a_2'(t)|)$ dla $s, t \in J$. Przekształcenie h ma żądane na ćwiczenach własności, tzn. przeprowadza kwadrat J^2 i każdy z jego boków w siebie. (Por. też zad. 9a).)

11. $\diamond$ + a) Dowieść, że każdy ze zbiorów $X_k = ([1/k, 1] \times \{0\}) \cup (\{1/n : n = 1, ..., , k\} \times I)$ jest retraktem kwadratu I^2.

b) Dowieść, że zbiór $X = (\{0\} \times I) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ ma własność punktu stałego. (Wskazówka: zad. 1.)

c) Dowieść, że zbiór X nie jest retraktem kwadratu I^2.

Definicja. Gdy $X_0 \subset X$ są podzbiorami pewnej przestrzeni Y, to o homotopii $H : X \to Y$ powiemy, że jest ona homotopią **relatywnie** X_0, jeśli $H(x, t) = x$ dla $x \in X_0$ i wszystkich $t \in I$.

12. $\diamond$ Niech $\overline{B}$ będzie kulą domkniętą w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, a S będzie jej brzegiem. Dowieść, że istnieje retrakcja „pełnego walca" $X = \overline{B} \times [0, 1]$ na podprzestrzeń $X_0 := \overline{B} \times \{0\} \cup S \times [0, 1]$, która relatywnie X_0 jest w X homotopijna z id_X. (Wskazówka: wziąć wpierw $n = 1$.)

13. $\diamond$ Na okregu S^1 obieramy ciąg punktów $p_n := (\cos(1/n), \sin(1/n))$, zbieżny do $p_0 := (1, 0)$. Przez X oznaczmy zbiór $\bigcup_n [(0, 0), p_n]$ (inaczej: $X := \{tp_n : n \geq 0, t \in [0, 1]\}$), traktowany jako podprzestrzeń płaszczyzny $\mathbb{R}^2$. Dowieść, że retrakcja X na $\{p_0\}$ jest w X homotopijna z przekształceniem identycznościowym $\mathrm{id}_X : X \to X$, ale nie jest z id_X homotopijna relatywnie $\{p_0\}$.

14. $\diamond$ Piszmy $X \in ENR$ jeśli przestrzeń X jest homeomorficzna z retraktem zbioru otwartego w którejś z przestrzeni $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że:

a) Gdy $X \in ENR$ i Y jest zbiorem otwartym w X, to $Y \in ENR$.

b) Gdy Y jest retraktem przestrzeni $X \in ENR$, to $Y \in ENR$.

c) Dla $X := \mathbb{R}^n \times \{0_{\mathbb{R}}\} \cup \{0_{\mathbb{R}^n}\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ udowodnić, że $X \in ENR$.

d) Niech X_0 będzie domkniętym podzbiorem przestrzeni metryzowalnej X, zaś $f : X_0 \to Y$ będzie przekształceniem. Dowieść, że jeśli $Y \in ENR$, to f przedłuża się do przekształcenia określonego na pewnym otoczeniu zbioru X_0.

15. + Kostkę J^n pokryto n zbiorami domkniętymi. Dowieść, że któryś z nich zawiera zbiór spójny, przecinający dwie przeciwległe ściany kostki. (Wskazówka: zadanie 9b). Wolno korzystać z tezy poniższego zadania.)

16. + (Z Topologii 1, ale dość trudne. Wykorzystane było w zadaniu poprzednim.) A i B są domkniętymi, rozłącznymi i niepustymi podzbiorami przestrzeni zwartej X. Dowieść, że albo istnieje zwarty zbiór spójny, przecinający A i B, albo też X jest sumą dwóch rozłącznych zbiorów zwartych, z których każdy przecina tylko jeden ze zbiorów A, B. (Wskazówka: zadanie poniżej.)

17. + Udowodnić, że składowa spójności punktu w przestrzeni zwartej X jest zarazem przecięciem wszystkich zbiorów domknięto–otwartych w X, do których ten punkt należy.

18. + Niech $W = \{(1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^n$. Dla skończonego zbioru $E \subset W$ oznaczmy przez $\Delta(E)$ jego powłokę wypukłą w $\mathbb{R}^n$. Niech też $\Delta := \Delta(W)$.

a) Udowodnić **zasadę Knastera – Kuratowskiego – Mazurkiewicza**: gdy rodzina $\{K_e\}_{e \in E}$ zwartych zbiorów $K_e \subset \Delta$ spełnia warunek $\Delta(E) \subset \bigcup_{e \in E} K_e$ dla każdego $E \subset W$, to $\bigcap_{e \in W} K_e \neq \emptyset$. (Wskazówka: przy zaprzeczeniu tezy podporządkować pokryciu $\{\Delta \setminus K_e : e \in W\}$ **podział jedynki** [2]) $(\lambda_e)_{e \in W}$ i dowieść, że funkcja $\Delta \ni x \mapsto \sum_e \lambda_e(x)e$ nie ma punktu stałego.

b) Wywnioskować, że gdy $\{K_e : e \in W\}$ jest domkniętym pokryciem sympleksu Δ, takim, że $K_e \cap \Delta(W \setminus \{e\}) = \emptyset$ dla każdego $e \in W$, to $\bigcap_e K_e \neq \emptyset$.

c) Dowieść dalej istnienia takiej liczby $\delta > 0$, że każde skończone pokrycie $\mathcal{K}$ sympleksu Δ, złożone ze zbiorów domkniętych o średnicy $< \delta$, zawiera n zbiorów z niepustym przecięciem. (Wskazówka: dowieść, że jeśli liczba δ jest dostatecznie mała, to $\mathcal{K}$ można podzielić na takie podrodziny $\mathcal{K}_e, e \in W$, by przy $K_e := \bigcup \mathcal{K}_e$ spełnione były założenia w b).)

---

[2] Można przyjąć bez dowodu, że gdy $\mathcal{U}$ jest pokryciem zwartej przestrzeni X, to istnieje *podporządkowany mu podział jedynki*: taki układ $\{\lambda_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ funkcji ciągłych $\lambda_U : X \to [0, 1]$, że $\sum_U \lambda_U = 1$ i $\lambda_U(X \setminus U) = \{0\}$ dla $U \in \mathcal{U}$.

Uwaga. i) Część c) jest podstawą do zdefiniowania *wymiaru Lebesgue'a* zwartej przestrzeni metryzowalnej X: przyjmuje się $\dim X \geq n-1$, jeśli zachodzi c) przy sympleksie Δ zastąpionym przez X. (Wybór metryki d jest nieistotny, ze względu na zwartość X.)

19. * a) Odszukać wiadomości o grze Hex i dowieść, że nie może się ona zakończyć remisem. (Wskazówka: zad. 15 dla $n=2$. Odmienny, elementarny dowód jest w artykule D. Gale'a w Amer. Math. Monthly 86 (1979), str. 818–827; patrz
https://pdfs.semanticscholar.org/9282/284383aa9daf83f0616739a053fb06b26155.pdf)

b) Odszukać w książce H. Steinhausa „Kalejdoskop matematyczny" stwierdzenie o gońcu i wieży na szachownicy, i udowodnić je. NIESTETY, SAM NIE UMIEM TEGO TERAZ ODSZUKAĆ.

20. Oznaczmy przez ℓ_2 *przestrzeń Hilberta* $\{x=(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty} : \|x\| < \infty\}$, *gdzie* $\|x\| = (\sum_i x_i^2)^{1/2}$. Dowieść, że kula $B = \{x \in \ell_2 : \|x\| \leq 1\}$ nie ma własności punktu stałego. (Wskazówka: niech $e_n = (\delta_n^i)_{i=1}^{\infty}$ oznacza n-ty wersor w ℓ_2; zauważyć, że wzór $h(t) = e_n + (t-n)(e_{n+1} - e_n)$ dla $t \in [n, n+1]$ i $n \in \mathbb{N}$, określa homeomorfizm półprostej $[0,\infty)$ na domknięty podzbiór przestrzeni ℓ_2. Podzbiór ten nie ma własności punktu stałego, a jest retraktem kuli B na podstawie tw. Tietzego.)

21. $\diamond$ Niech A będzie zbiorem zwartym w $\mathbb{C}_*$. Dowieść, że podniesienie włożenia $i_A : A \hookrightarrow \mathbb{C}_*$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy 0 należy do nieograniczonej składowej zbioru $\mathbb{C} \setminus A$. (Wskazówka: patrz uwaga 3 i wniosek 1 w §3.1, oraz twierdzenia Borsuka.)

22. Niech zwarta przestrzeń metryczna X będzie sumą dwóch swych domkniętych podzbiorów A i B, mających spójne przecięcie $A \cap B$. Udowodnić, że przekształcenie $f : X \to \mathbb{C}_*$, którego oba obcięcia $f_{|A}$ i $f_{|B}$ są nieistotne, samo jest nieistotne. (Jest to **lemat Eilenberga**. Wskazówka: wziąć podniesienia funkcji $f_{|A}$ i $f_{|B}$, i dodając stałą do jednego z nich uzyskać zgodność na $A \cap B$.)

23. a) Niech przestrzeń X będzie zwarta. Dowieść, że przekształcenia $f, g : X \to \mathbb{C}_*$ są homotopijne w $\mathbb{C}_*$ wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloraz f/g jest przekształceniem nieistotnym w $\mathbb{C}_*$.

b) Wywnioskować, że zbiór zwarty $Z \subset \mathbb{C}$ rozcina $\mathbb{C}$ między p i q wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie $f_Z := (i_Z - p)/(i_Z - q)$ jest istotne (w $\mathbb{C}_*$).

c) Udowodnić **twierdzenie Janiszewskiego**: gdy $A, B \subset \mathbb{C}$ są zbiorami zwartymi o spójnym przecięciu $A \cap B$, przy czym ani A, ani B nie rozcina płaszczyzny $\mathbb{C}$ między wskazanymi punktami $p, q \in \mathbb{C} \setminus (A \cup B)$, to $A \cup B$ też nie rozcina $\mathbb{C}$ między p i q. (Wskazówka: w oparciu o lemat Eilenberga, zastosować b) przy $Z = A, B, A \cup B$.)

24. $\diamond$ Ścieżki $\gamma, \gamma' : [a,b] \to \mathbb{C}$ różnią się tylko na przedziale $(t_-, t_+) \subset [a,b]$. Dowieść, że $\Delta(\gamma, z) - \Delta(\gamma', z) = \Delta(\gamma_{|[t_-,t_+]} \star (\gamma'_{|[t_-,t_+]})^{\leftarrow}, z)$ dla $z \notin \mathrm{im}(\gamma) \cup \mathrm{im}(\gamma')$.

25. $\diamond$ + Niech $w(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + ... + c_1 z + c_0$ będzie zespolonym wielomianem stopnia $n \geq 1$. Dla $R > 0$ i $z \in S^1$ przyjmimy $\gamma_R(z) = w(R \cdot z)$.

a) Dowieść, że dla R dostatecznie dużych, pętla γ_R jest w $\mathbb{C}_*$ homotopijna z pętlą $S^1 \ni z \mapsto z^n \in \mathbb{C}_*$, mającą indeks n względem 0 (a więc istotną w $\mathbb{C}_*$).

b) Uzyskać stąd, że $w(z) = 0$ dla pewnego $z \in \mathbb{C}$.

26. $\diamond$ a) Przypomnieć sobie wiadomości o stopniu przekształcenia okręgu w okrąg lub przeczytać to, co zapisałem w §3.5 notatek na str. 19.

W b), c) i w zad. 27, $f : S^1 \to S^1$ jest przekształceniem. Dowieść, że:

b) Jeśli $f(-z) = f(z)$ dla wszystkich $z \in S^1$, to $\deg(f) \in 2\mathbb{Z}$. (Wskazówka: zachodzi $f(z) = g(z^2)$ dla pewnego $g : S^1 \to S^1$; skorzystać z wniosku 1b) w §3.5.)

c) Jeśli $f(-z) = -f(z)$ dla wszystkich $z \in S^1$, to $\deg(f) \in 2\mathbb{Z}+1$. (Jest to przypadek $n=1$ twierdzenia Borsuka. Wskazówka: zastosować b) do pętli $z \mapsto zf(z)$.)

27. $\diamond$ (ciąg dalszy zad. 26.) d) Jeśli $\deg(f) \neq 0$, to f jest „na". Wywnioskować, że gdy $\deg(f) \neq 1$, to f ma punkt stały. Oboma razy, czy założenie o $\deg(f)$ jest istotne?

e) Dowieść, że jeśli f jest nieistotne, to $f(p) = f(-p)$ dla pewnego $p \in S^1$. (Wskazówka: rozpatrzeć podniesienie f.)

f) Dowieść tego przy „f jest nieistotne" osłabionym do „$\deg(f) \in 2\mathbb{Z}$". (Wskazówka: rozpatrzeć $z \mapsto f(z)z^{-n}$, gdzie $n = \deg(f)$.) Co gdy $\deg(f) \in 2\mathbb{Z} + 1$?

28. Niech $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Dowieść, że każda z poniższych tez wynika z poprzedniej, a dla $n = 1, 2$ dowieść też tezy i):

i) Gdy przekształcenie $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n_*$ jest **nieparzyste**, tzn. takie, że $f(-p) = -f(p)$ dla każdego punktu p dziedziny, to jest ono istotne (w $\mathbb{R}^n_*$).

ii) Nie istnieje nieparzyste przekształcenie z S^n w $\mathbb{R}^n_*$. (Równoważnie: gdy przekształcenie $f : S^n \to \mathbb{R}^n_*$ jest nieparzyste, to $f(p) = 0$ dla pewnego $p \in S^n$.) Wskazówka: niech $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ będzie nieparzyste; obciąć f do półsfery $\{x \in S^n : x_{n+1} \geq 0\}$, a tę przez rzutowanie wzdłuż osi x_{n+1} utożsamić z kulą $\overline{B^n}$.)

iii) Każde odwzorowanie $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ przeprowadza pewne dwa antypodyczne punkty $p, -p$ we wspólny punkt. (Wskazówka: rozpatrzeć funkcję $z \mapsto f(z) - f(-z)$.)

iv) Gdy $A_0, A_1, ..., A_n$ są zbiorami takimi, że $A_0 \cup \bigcup_{i=1}^n (A_i \cup (-A_i)) = S^n$, to $A_0 \cap (-A_0) \neq \emptyset$ lub $\overline{A_i} \cap (-A_i) \neq \emptyset$ dla pewnego $i = 1, 2, ..., n$. (Wskazówka: wziąć za p punkt dany przez iii) dla $f = (f_i)_{i=1}^n : S^n \to \mathbb{R}^n$, gdzie $f_i(x) := \operatorname{dist}(x, A_i) - \operatorname{dist}(-x, A_i)$; zauważyć, że jeśli $\overline{A_i} \cap (-A_i) = \emptyset$, to $p, -p \notin A_i \cup (-A_i)$. Por. wskazówkę do zadania 9b).)

v) Gdy sferę S^n pokryć $n+1$ zbiorami, z których każdy jest domknięty lub otwarty w S^n, to któryś z nich zawiera dwa antypodyczne punkty.

(O prawdziwości tych tez orzekają twierdzenia Borsuka–Ulama i Lusternika–Sznirelmana.)

29. * Udowodnić, że teza ii) w zadaniu 28 jest równoważna każdej z poniższych:

vi) gdy $p_1, ..., p_n \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_{n+1}]$ są wielomianami jednorodnymi tego samego nieparzystego stopnia, to pewien punkt przestrzeni $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ jest ich wspólnym zerem.

vii) gdy każdy z wielomianów $p_1, ..., p_n \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_{n+1}]$ jest sumą jednomianów nieparzystych stopni, to pewien punkt sfery S^n jest ich wspólnym zerem.

Wskazówki: a) Do vi)$\Rightarrow$vii): wykorzystać to, że wielomian $\sum_{j=1}^{n+1} x_j^2$ jest na S^n stale równy 1. b) Do vii)$\Rightarrow$ii): nieparzystą funkcję ciągłą $u : S^n \to \mathbb{R}$ można ε–aproksymować przez funkcję $u + v$, gdzie u i v są sumami jednomianów stopni nieparzystych i parzystych, odpowiednio; zauważyć, że $|v(x)| < 2\varepsilon$ dla $x \in S^n$

30. * Odszukać dowód lub udowodnić „twierdzenie o kanapkach" („Ham–Sandwich Theorem") dla $n = 3$: gdy każdy z trzech danych zbiorów mierzalnych w $\mathbb{R}^3$ ma miarę skończoną i dodatnią, to pewna płaszczyzna przepoławia każdy z nich (co do miary). Uogólnić na przypadek $n > 3$. (Można przyjmować za prawdziwą którąkolwiek z tez zadania 28.

31. $\diamond$ We wstędze Möbiusa i płaszczyźnie rzutowej wskazać nierozcinającą krzywą Jordana, w przypadku wstęgi różną od krzywej brzegowej.

32. Niech p będzie punktem krzywej Jordana J, zaś f pętlą w ograniczonej składowej zbioru $\mathbb{C} \setminus J$. Dowieść, że $\operatorname{ind}(f, p) = 0$.

33. Niech J i J' będą krzywymi Jordana, zaś G i G' ograniczonymi składowymi zbiorów $\mathbb{C} \setminus J$ i $\mathbb{C} \setminus J'$, odpowiednio.

a) Dowieść, że jeśli $J' \subset G$, to $\overline{G'} \subset G$.

b) Dowieść, że jeśli $J' \cap \overline{G} = \emptyset$, to $G' \cap \overline{G} = \emptyset$ lub $G' \supset \overline{G}$.

34. * Niech L_1, L_2, L_3 będą takimi łukami w $\mathbb{C}$, że $L_1 \cap L_2 = L_1 \cap L_3 = L_2 \cap L_3 = \{0, 1\}$. Dowieść, że zbiór $\mathbb{C} \setminus (L_1 \cup L_2 \cup L_3)$ ma trzy składowe.

35. $\diamond$ (Przypomnienie Top. 1) Przypomnijmy, że przestrzeń jest **lokalnie łukowo spójna**, jeśli każdy jej punkt ma bazę otoczeń, złożoną ze zbiorów łukowo spójnych. Dowieść, że lokalnie łukowo spójna przestrzeń spójna X jest łukowo spójna, a jej składowe są otwarte w X i łukowo spójne. [3]

36. Opanować pominięte dowody twierdzenia 1 i uwagi 3 ze str. 22 notatek do wykładu.

37. $\diamond$ Niech grupa G będzie generowana w sposób wolny przez zbiór S. Dowieść, że:

a) Każdy element grupy jednoznacznie przedstawia się jako zredukowany iloczyn elementów zbioru S.

b) Dla każdej grupy H i każdej funkcji $f : S \to H$ istnieje jedyny homomorfizm $\overline{f} : G \to H$ taki, że $\overline{f}_{|S} = f$. (Jest to **własność uniwersalności grupy G względem zbioru S jej wolnych generatorów**.)

c) Przy oznaczeniach z b), jeśli funkcja f jest różnowartościowa i zbiór $f(S)$ generuje grupę H w sposób wolny, to $\overline{f}$ jest izomorfizmem grup.

38. + a) $\diamond$ Niech ścieżki ω, ν mają wspólny początek x_0 i wspólny koniec x_1. Wówczas izomorfizmy $\omega_\#, \nu_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ różnią się o automorfizm wewnętrzny: $\nu_\# = \omega_\# \circ z$, gdzie z jest operacją sprzęgania w grupie $\pi_1(X, x_0)$ przez odpowiedni element $[\lambda]$ tej grupy, tzn. $z([\gamma]) = [\lambda][\gamma][\lambda]^{-1}$ dla wszystkich $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$.

b) * Gdy elementy $[\lambda], [\mu]$ grupy $\pi_1(X, x_0)$ są w niej sprzężone, to ścieżki λ i μ można połączyć homotopią ścieżek zamkniętych.

39. $\diamond$ Przy oznaczeniach uwagi 1e) ze str. 24 wywnioskować, że jądrem homomorfizmu f^1_* jest obraz, przy $\omega_\#$, jądra homomorfizmu f^0_*. Sformułować zależność między obrazami f^0_* i f^1_* i dowieść jej.

40. Dane są przekształcenia $f : X \to Y$ oraz $g, h : Y \to X$. Dowieść, że:

a) $\diamond$ Jeśli $f \circ g$ i $h \circ f$ są homotopijne z id_Y i id_X, odpowiednio, to f jest homotopijną równoważnością. (Wskazówka: homotopijną odwrotnością okazuje się być $h \circ f \circ g$.)

b) * Tak samo jest, jeśli $f \circ g$ i $h \circ f$ są homotopijnymi równoważnościami.

41. $\diamond$ + a) Dowieść, że brzeg kwadratu jest retraktem deformacyjnym[4] kwadratu, nakłutego w jego punkcie wenętrznym.

b) Dowieść, że nakłuty torus (tzn. przestrzeń $S^1 \times S^1$, z której usunięto punkt) deformacyjnie retrahuje się na bukiet $S^1 \vee S^1$ –czyli zbiór, homeomorficzny ze znakiem ∞.

c) Na jaki jednowymiarowy zbiór można deformacyjnie zretrahować cylinder $S^1 \times [-1, 1] \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, nakłuty w $(1, 0)$?

d) Przez jaki zbiór jednowymiarowy można zastąpić ∂I^2 w a), zaś $S^1 \vee S^1$ w b), gdy nakłuć jest n?

42. $X = S^1 \vee S^1$, zaś Y jest sumą dwóch rozłącznych okręgów i łuku, mającego z każdym z tych okręgów 1 punkt wspólny. Dowieść, że przestrzenie X i Y są homotopijnie równoważne. (Wskazówka: znaleźć przestrzeń, deformacyjnie retrahującą się na każdą z wymienionych.)

43. + a) $\diamond$ Niech r będzie retrakcją przestrzeni X na jej podprzestrzeń A, zaś $i : A \hookrightarrow X$ włożeniem A w X. Niech dalej $a \in A$. Dowieść, że $r_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a)$ jest epimorfizmem, zaś $i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ jest monomorfizmem.

b) Dowieść, że w każdym z następujących przypadków nie istnieje retrakcja X na A:

i) $\diamond$ $X = \mathbb{R}^3$ i podprzestrzeń A jest homeomorficzna z S^1;

ii) $\diamond$ $X = S^1 \times \overline{B^2}$ i $A = S^1 \times S^1$;

iii) X jest wstęgą Möbiusa i A jest jej brzegiem.

Uwaga. Wywiesiłem plik Przestrz.iloraz.pdf , przypominający wiadomości z Top. I o przestrzeniach ilorazowych.

---

[3] Czerwonym kolorem oznaczam zmianę pierwotnie wywieszonej treści.

[4] Definicja jest w notatkach, na str. 25.

44. $\diamond$ Zaznajomić się ze str. 1 tego pliku. (Część p.3, ujęta na str. 3, została omówiona na wykładzie.)

45. Oznaczmy przez $\pi_0(X)$ zbiór wszystkich składowych łukowej spójności danej przestrzeni X, zaś dla łukowo spójnego zbioru $C \subset X$ oznaczmy przez $[C]$ składową łukowej spójnosci przestrzeni X, zawierającą zbiór C. Udowodnić, że gdy przekształcenia $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$ są wzajemnie homotopijnie odwrotne (tzn. $gf \sim \mathrm{id}_X$ i $fg \sim \mathrm{id}_Y$), to funkcje $A \mapsto [f(A)]$ i $B \mapsto [g(B)]$ są poprawnie określonymi, wzajemnie odwrotnymi bijekcjami między zbiorami $\pi_0(X)$ i $\pi_0(Y)$.

46. + Dla każdej grupy G i jej podzbiorów A i B, grupa $G/\langle\langle A \cup B \rangle\rangle$ jest izomorficzna z $(G/\langle\langle A \rangle\rangle)/\langle\langle p(B) \rangle\rangle$, gdzie $p : G \to G/\langle\langle A \rangle\rangle$ jest rzutowaniem ilorazowym.

47. + $\diamond$ a) Do diagramu (7) ze strony 27 notatek do wykładu dostawmy następny, którego górną strzałką jest $u_1' : G_1 \to G_1'$, dolną $v_2' : G \to G'$, a pionowymi są v_1 i $v_1' : G_1' \to G'$. (Oba te diagramy mają być diagramami wypchnięcia.) Dowieść, że diagram którego poziomymi strzałkami są $u_1' \circ u_1$ i $v_2' \circ v_2$, a pionowymi u_2 i v_1', jest diagramem wypchnięcia.

b) Dowieść, że jeśli w diagramie wypchnięcia (7) zachodzi $G_2 = \{1\}$, to v_1 jest epimorfizmem i $\ker(v_1) = \langle\langle u_1(G_0) \rangle\rangle$. W szczególności, jeśli dodatkowo $G_0 = \langle s \rangle$, to $\ker(v_1) = \langle\langle u_1(s) \rangle\rangle$; w tym v_1 jest izomorfizmem jeśli (dodatkowo) $G_0 = \{1\}$.

48. $\diamond$ Niech $p \in U$, gdzie U jest spójnym zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$ i $n \geq 3$. Dowieść, że zbiór $U \setminus \{p\}$ jest spójny i inkluzja $U \setminus \{p\} \hookrightarrow U$ indukuje izomorfizm $\pi_1(U \setminus \{p\}, x) \to \pi_1(U, x)$, dla $x \in U \setminus \{p\}$. (Wskazówka: napisać $U = (U \setminus \{p\}) \cup B$, gdzie B to mała kula wokół p; skorzystać z zadania 47b). Inna metoda to naśladować dowód twierdzenia 1 na str. 26 „Notatek".)

49. $\diamond$ + Zadać strukturę CW-kompleksu na a) $S^2 \cup J$, gdzie J to odcinek, którego końcami są południowy i północny biegun sfery, b) na przestrzeni ilorazowej S^2/S^0, gdzie S^0 to dwupunktowy podzbiór S^2.

Uwaga 2. Niech X będzie zwartą CW–przestrzenią, a $X_0 \subset X$ zbiorem ściągalnym, będącym sumą pewnych doklejanych komórek jej CW-kompleksu. Można dowieść, że przestrzeń ilorazowa X/X_0 jest homotopijnie równoważna przestrzeni X. Będziemy z tego korzystać, odkładając dowód na później.

50. Opierając się na tej uwadze i na zadaniu 58b), w każdym z następujących przypadków dowieść homotopijnej równoważności przestrzeni X i Y:

a) + X i Y to przestrzenie, którym w zadaniu 49 nadano CW–strukturę.

b) + $X = S^2/S^0$, a Y to bukiet $S^2 \vee S^1$. (Wskazówka: wobec a) można zastąpić X przestrzenią z zad. 49a). Korzystając z zad. 58b) dowieść homotopijnej równoważności tej przestrzeni z Y.)

c) + $X = (S^1 \times S^1)/(S^1 \times \{s_0\})$ i $Y = S^2 \vee S^1$.

d) + $X = S^n/S^k$ i $Y = S^n \vee S^{k+1}$, gdzie $S^k = \{(x_i) \in S^n : x_i = 0 \text{ dla } i \geq k+2\} \subset S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

e) + X jest wynikiem doklejenia 3–komórki do sfery S^3, wzdłuż przekształcenia określonego na brzegu S^2 tej komórki, zaś $Y = S^3 \vee S^3$. (Można korzystać z tego, że przekształcenie takie jest nieistotne.)

f)* $X = (\overline{B^2} \times S^1)/(S^1 \times S^1)$ i $Y = S^3 \vee S^2$.

Uwaga: Pod https://pi.math.cornell.edu/ hatcher/AT/ATchapters.html dostępny jest bardzo dobry podręcznik A. Hatchera. W zakresie tych zajęć warto zaglądać do Chapters 0 i 1.

51. (ciąg dalszy zadania 43). Nie istnieje też retrakcja X na A gdy:

iv) $X = S^1 \times B^2$ i A jest okręgiem, który narysuję na tablicy lub można go zobaczyć na str. 39 w Chapter 1 u Hatchera.

v) $X = \overline{B^2} \vee \overline{B^2}$ i $A = S^1 \vee S^1$ jest bukietem okręgów brzegowych.

vi)* $X = \overline{B^2}/\{\mathbf{i}, -\mathbf{i}\}$ (dysk z utożsamionymi dwoma punktami na brzegu) i $A \cong S^1 \vee S^1$ jest obrazem S^1 w X przy rzutowaniu $\overline{B^2} \to X$.

52. $\diamond$ Przeczytać p.2 w pliku Przestrz.ilorazowe.pdf lub na innej drodze przypomnieć sobie zawarty w nim materiał.

53. $+\diamond$ Znaleźć prezentację grupy $\pi_1(X)$ w następujących przypadkach:

a) X jest obrazem pełnego n–kąta foremnego po dokonaniu w nim minimalnych identyfikacji, które każdy bok liniowo i bijektywnie identyfikują z kolejnym bokiem, z zachowaniem orientacji.

b) $X = S^1 \times S^1$ jest torusem.

c) X jest butelką Kleina.

d) X jest „trąbką Borsuka” (w literaturze częściej nazywaną „dunce hat”), czyli jest obrazem „pełnego” trójkąta ABC po dokonaniu w nim minimalnych identyfikacji, które bok AB liniowo i bijektywnie identyfikują z bokiem BC zachowując orientację, zaś z bokiem CA zmieniając orientację.

(Wskazówka: traktować X jako obraz wielokąta, wyznaczyć obraz Y brzegu tego wielokąta, który okaże się bukietem okręgów; zastosować wniosek 3 ze str. 33 notatek do wykładu.)

54. $\diamond$ Niech dany będzie diagram $G_1 \xleftarrow{u_1} G_0 \xrightarrow{u_2} G_2$ w kategorii zbiorów, tzn. G_0, G_1, G_2 są zbiorami, a u_1 i u_2 funkcjami. Wypchnięcie tego diagramu (w tej kategorii) definiuje się jak na str. 27 notatek, zastępując słowa "grupa" przez "zbiór", a "homomorfizm" przez "funkcja" (odpowiednio odmienione). Dla uproszczenia załóżmy, że $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

a) Dowieść, że wypchnięcie to istnieje, przy czym za H można przyjąć $(G_1 \cup G_2)/\sim$, gdzie $\sim$ jest najsłabszą spośród tych relacji równoważności na $G_1 \cup G_2$, dla których zachodzi $u_1(x) \sim u_2(x)$ dla każdego $x \in G_0$.

b) Jak zdefiniować v_1 i v_2? Dowieść, że $\operatorname{im}(v_1) \cap \operatorname{im}(v_2) = \operatorname{im}(v_1 \circ u_1)$, i że gdy u_1 jest 1-1, to v_2 też.

c) Niech wyżej $G_0 = G_1 = \{1, 2\}$, $G_2 = \{3\}$, zaś u_1 i u_2 będą identycznością i jedyną funkcją z G_0 w G_2, odpowiednio. Ile elementów ma zbiór H?

55. Niech tym razem rolę G_0, G_1, G_2 w diagramie (7) grają przestrzenie topologiczne: rozpatrujemy diagram $Y \xleftarrow{f} A \xrightarrow{i} X$, gdzie A jest domkniętym podzbiorem przestrzeni X, i oznacza jego włożenie w X, zaś f pewne przekształcenie. Dowieść, że w wypchnięciu tego diagramu w kategorii przestrzeni topologicznych (należy się domyślić, co to oznacza), za przestrzeń w prawym rogu można przyjąć $X \cup_f Y$.

56. Niech K, M, K' i M' bedą przestrzeniami zwartymi (w tym T_2), zaś $p : K \to M$, $p' : K' \to M'$ i $H : K \to K'$ przekształceniami takimi, że dla każdego punktu $m \in M$ zbiór $p' \circ H(p^{-1}(m))$ jest jednopunktowy. Dowieść, że jeśli p jest „na”, to istnienieje takie przekształcenie $H' : M \to M'$, że $H' \circ p = p' \circ H$.

57. Niech X_0 będzie silnym retraktem deformacyjnym zwartej przestrzeni X, zaś $A \subset X_0$ będzie zbiorem domkniętym. Dla pewnego przekształcenia $f : A \to Y$ tworzymy przestrzeń $X \cup_f Y$. Dowieść, że jeśli jest ona T_2, to zawiera $X_0 \cup_f Y$ jako silny retrakt deformacyjny. (Wskazówka: zadanie poprzednie, przy $M' = X \cup_f Y$, $K' = X \sqcup Y$ i $M = M' \times I$, $K = K' \times I$.)

58. a) „Pełny walec” $\overline{B}^n \times I$ przyklejamy do przestrzeni Y poprzez przekształcenie $H : S^{n-1} \times I \to Y$. Dowieść, że otrzymana przestrzeń $(\overline{B}^n \times I) \cup_H Y$ zawiera jak swój silny retrakt deformacyjny podprzestrzeń $\overline{B}^n \cup_f Y$, gdzie f oznacza przekształcenie $S^{n-1} \ni x \mapsto H(x, 0) \in Y$. (Wykorzystać zadanie poprzednie i to, że $(S^{n-1} \times I) \cup (\overline{B}^n \times \{0\})$ jest silnym retraktem deformacyjnym walca $\overline{B}^n \times I$; zrobić szkic dla $n = 1$.)

b) Wywnioskować, że gdy przekształcenia $f, g : S^{n-1} \to Y$ są homotopijne, to przestrzenie $\overline{B}^n \cup_f Y$ i $\overline{B}^n \cup_g Y$ są homotopijnie równoważne. (Wskazówka: obie są silnymi retraktami deformacyjnymi pewnej wspólnej przestrzeni.)

@@@@@@@@@@@@@@

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

Zadania rekapitulujące końcowy materiał. (Więcej zadań w tym semestrze nie będzie.)

A. Ogólne własności nakryć

59. $\diamond$ a) Niech $p \in \mathbb{C}[x]$ będzie wielomianem stopnia dodatniego i niech S oznacza zbiór jego **wartości krytycznych**, tzn. $S = \{p(z) : p'(z) = 0\}$. Przyjmijmy $T := \mathbb{C} \setminus p^{-1}(S)$. Dowieść, że $p_{|T} : T \to \mathbb{C} \setminus S$ jest nakryciem.

b) Dowieść, że nakryciem jest przekształcenie $p : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$, dane wzorem $p(z_1, z_2) = (z_1^3, z_2^2)$. Ilukrotne jest to nakrycie?

60. $\diamond$ a) Niech $f : X \to Y$ będzie **lokalnym homeomorfizmem**, tzn. dla każdego punktu $x \in X$ niech istnieje takie jego otoczenie U w przestrzeni X, że $f_{|U} : U \to f(U)$ jest homeomorfizmem i zbiór $f(U)$ jest otwarty w Y. Dowieść, że jeśli przestrzeń X jest zwarta, to zbiór $f(X)$ jest domknięto-otwarty w Y i $f : X \to f(X)$ jest nakryciem. (Zakładamy, że Y jest T_2; w razie potrzeby wolno w rozwiązaniach zadań nakładać samemu dodatkowe założenia podobnego typu - aż do metryzowalności.)

b) Znaleźć przekształcenie $S^1 \to S^1 \vee S^1$, które jest nie jest lokalnym homeomorfizmem, choć jest lokalnie 1-1 (tzn. każdy punkt ma otoczenie, na którym jest ono 1-1).

c) Znaleźć lokalny homeomorfizm $p : (-10, 10) \to S^1$, ścieżkę $\lambda : I \to S^1$ i punkt $\widetilde{x} \in p^{-1}(\lambda(0))$, dla których nie istnieje podniesienie $\widetilde{\lambda}$ ścieżki λ względem p, spełniające warunek $\widetilde{\lambda}(0) = \widetilde{x}$.

61. $\diamond$ Niech $p : \widetilde{X} \to X$ będzie nakryciem. Dowieść, że:

a) Dla ścieżki $\lambda : I \to X$ od $x = \lambda(0)$ do $y = \lambda(1)$, formuła $\widetilde{x} \mapsto \widetilde{x}[\lambda]$ określa bijekcję v_λ włókna $p^{-1}(x)$ na $p^{-1}(y)$, taką, że $v_\lambda(p^{-1}(x) \cap S) = p^{-1}(y) \cap S$ dla każdej składowej łukowej spójności S przestrzeni $\widetilde{X}$. Ponadto, $v_{\lambda \star \mu} = v_\mu \circ v_\lambda$ gdy $\lambda \star \mu$ ma sens.

b) Jeśli S jest składową łukowej spójności przestrzeni $\widetilde{X}$, to $p(S)$ jest składową łukowej spójności przestrzeni X.

c) Gdy w b) przestrzeń $\widetilde{X}$ jest lokalnie łukowo spójna, to $p_{|S} : S \to p(S)$ jest nakryciem.

62. $p : \widetilde{X} \to X$ jest nakryciem k–krotnym. Dowieść, że jeśli X jest bryłą skończonego CW–kompleksu wymiaru 1, mającego j_n n–komórek dla $n = 0, 1$, to podobnie jest dla $\widetilde{X}$, przy j_n zastąpionym przez kj_n.

63. Niech $f : A \to B$, $g : B \to C$ i $h := g \circ f : A \to C$ będą przekszałceniami między przestrzeniami spójnymi i lokalnie łukowo spójnymi. Dowieść, że:

a) $\diamond$ jeśli h i jedno z pozostałych przekształceń są nakryciami, to i trzecie nim jest,

b) jeśli f i g są nakryciami, to i h nim jest, o ile ponadto

i) nakrycie g jest skończenie krotne (tzn. $\#g^{-1}(c) < \infty$ dla $c \in C$), lub

ii)* C spełnia warunek małych pętli ze str. 50 notatek do wykładu. (Wskazówka: dowieść, że gdy U spełnia warunek $(*)$ ze str. 50, przy X zastąpionym przez C, to g jest 1-1 na składowych zbioru $g^{-1}(U)$, a $g^{-1}(U)$ spełnia ten warunek przy X zastąpionym przez B.)

B. Nakrycia a grupa podstawowa

64. $\diamond$ (C.d. zadania 53.) Ogólniej, identyfikacje dokonywane w podobnych sytuacjach na zorientowanym brzegu n–kąta można oznaczać następująco: wypisujemy przy każdym boku literę, symbolizującą zorientowany okrąg, do którego bok ten jest przyklejany, przy czym literę tę opatrujemy dodatkowo znakiem $^{-1}$, jeśli sklejenie odwraca orientację. (Zakładamy, że brzeg wielokąta przyklejany jest do bukietu okręgów. Dla przykładu, w zadaniu 53 identyfikacje byłyby opisane ciągiem (słowem) $aa....a$ w części a), zaś słowem $aba^{-1}b$ w części b).)

Znaleźć prezentacje grup podstawowych w przypadkach, gdy $n = 6$, zaś identyfikacje są opisane słowami: 1) $aaabbb$, 2) $aaaa^{-1}bb^{-1}$, 3) $aabbcc$.

65. $\diamond$ Niech $X = Y/\sim$, gdzie Y jest domkniętym pięciokątem, z którego usunięto wnętrze trójkąta (wierzchołki trójkąta nie leżą na brzegu pięciokąta), zaś $\sim$ jest minimalną relacją równoważności, która każdy bok pięciokąta afinicznie utożsamia z kolejnym jego bokiem, a też każdy bok trójkąta afinicznie utożsamia z kolejnym jego bokiem, w obu przypadkach z zachowaniem orientacji i surjektywnie. (Orientacje na brzegach pięciokąta i trójkąta są zgodne.) Wyznaczyć prezentację grupy $\pi_1(X)$

Uwaga i wskazówka. Zadanie to można rozwiązać na różne sposoby, lecz następujące spojrzenie ma zastosowanie w wielu podobnych sytuacjach. Oznaczmy przez P pięciokąt z usuniętym trójkątem (bez utożsamień). Na przestrzeń X można spojrzeć jako na wynik dolepienia przestrzeni P do dwóch zorientowanych okręgów A i B, przy czym kolejne boki pięciokąta nawijamy na A, a boki trójkąta na B, z zachowaniem orientacji. Pewien kłopot sprawia to, że P nie jest 2-komórką. Możemy jednak rozciąć P wzdłuż odcinka L, łączącego pewien wierzchołek pięciokąta z bliskim mu wierzchołkiem trójkąta, i wtedy otrzymamy 2-komórkę. Inaczej to ujmując, P jest obrazem (5+1+3+1)-kąta, następująco: kolejnych 5 boków dziesięciokąta przyklejamy do kolejnych „zewnętrznych" boków figury P, następny bok do odcinka L, kolejne 3 boki do kolejnych „wewnętrznych" boków figury P, a ostatni znów do L, odwracając orientację.

To pozwala spojrzeć na X jako na wynik doklejenia dziesięciokąta do figury F, wyglądającej jak O–O, przy czym każdy bok dziesięciokąta jest doklejony do okręgu A lub do okręgu B lub do łączącego je łącznika C. Gdy okręgi i łącznik zorientujemy, to doklejenie odbywa się wzdłuż ścieżki $A^5CB^3C^{\leftarrow}$, przy czym grupa podstawowa figury F ma 2 wolne generatory, którymi są A i $CBC^{\leftarrow}$.(Za punkt bazowy rzyjmujemy punkt z $A\cap C$.) Teraz poprzednie techniki powinny bez kłopotu dać się zastosować.

66. Wyznaczyć prezentację grupy $\pi_1(X)$ w następujących przypadkach:
a) X jest torusem $S^1\times S^1$, z którego wycięto dziurę $J\times J$, gdzie J jest łukiem otwartym w S^1.
b) X jest dwupreclem, tzn. jest sumą dwóch powyżej opisanych przestrzeni, zlepionych homeomorficznie wzdłuż brzegów wyciętych dziur.

67. * Do bukietu $\vee_{i=1}^4 S^1$ dolepiono ośmiokąt foremny przekształcając jego kolejne boki na $a, b, a^{\leftarrow}, b^{\leftarrow}, c, d, c^{\leftarrow}, d^{\leftarrow}$, gdzie a, b, c, d to zorientowane okręgi bukietu. Dowieść, że otrzymana przestrzeń jest dwupreclem z powyższego zadania i ponownie wyznaczyć prezentację jej grupy podstawowej.

68. Niech $p:(\widetilde{X},\widetilde{x})\to(X,x)$ będzie nakryciem punktowanym, z łukowo spójną przestrzenią $\widetilde{X}$.
a) Dowieść, że p jest homeomorfizmem jeśli $p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}))=\pi_1(X,x)$.
b) Dowieść, że p jest homeomorfizmem jeśli przestrzeń X jest jednospójna.

69. $\diamond$ Wyznaczyć wszystkie, z dokładnością do izomorfizmu, nakrycia następujących przestrzeni:
a) przestrzeni $\mathbb{R}P^n$, gdzie $n\geq 2$ jest dane, b) okręgu S^1, c) pierścienia $B^2\setminus\frac{1}{2}\overline{B}^2$, d) torusa $S^1\times S^1$, e) sfery S^2, f) bukietu $S^1\vee S^2$. (Wskazówka: twierdzenie 1 na str. 48.)

C. Nakrywające działania grup; nakrycia regularne

70. $\diamond$ Dowieść, że każde wolne działanie grupy skończonej na przestrzeni Hausdorffa przez jej homeomorfizmy jest nakrywające. Podobnie, działanie grupy G na przestrzeni metrycznej (X,d) przez jej izometrie jest nakrywające, jeśli dla pewnej stałej $m>0$ i każdego $g\in G\setminus\{1_G\}$ zachodzi $\inf\{d(x,gx):x\in X\}>m$.

71. Znaleźć nakrywające działanie grupy na płaszczyznę przez jej izometrie, takie, że przestrzeń orbit jest torusem.

72. Dla $n,m\in\mathbb{Z}$ określmy przekształcenie $f_{n,m}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ wzorem $f_{n,m}(x,y)=(x,(-1)^n y)+(n,m)$.
a) Dowieść, że $G=\{f_{n,m}:n,m\in\mathbb{Z}\}$ jest grupą przekształceń płaszczyzny, złożoną z jej izometrii.
b) Dowieść, że działanie G na $\mathbb{R}^2$ jest nakrywające, a przestrzeń orbit $\mathbb{R}^2/G$ jest butelką Kleina.
c) Czy grupa $(G,\circ)$ jest izomorficzna z $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$?

73. Zadanie ze str. 46 notatek do wykładu, dotyczące grafu Cayley'a grupy F_2.

74. $\diamond$ ($\diamondsuit$) Dla nakrycia $p:\widetilde{X}\to X$ dowieść równoważności warunków:

a) nakrycie to jest regularne;

b) dla każdej ścieżki $\lambda : I \to X$, jeśli pewne jej podniesienie jest ścieżką zamkniętą, to każde jej podniesienie (być może gdzie indziej zaczepione) jest ścieżką zamkniętą;

c) gdy $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in \widetilde{X}$ spełniają warunek $p(\widetilde{x}_1) = p(\widetilde{x}_2)$, to $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)) = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_2))$.

75. W podręczniku Hatchera (przypominam link: https://pi.math.cornell.edu/ hatcher/AT/ATchapters.html) na str. 58 w Chapter I są rysunki "Some covering spaces of $S^1 \vee S^1$". Postarać się zrozumieć napisy towarzyszące wybranym rysunkom i uzasadnić nieregularność dwóch wybranych nakryć. (Nieregularne mają numery (3), (4), (9), (10).)

76. $\diamond$ Wyobrazić sobie 3–krotne[5] nakrycie przestrzeni $S^1 \vee S^1$ takie, że przestrzenią nakrywającą jest:

a) suma okręgów S_1, S_2, S_3, S_4, z których każdy prócz ostatniego jest zewnętrznie styczny do następnego, i $S_i \cap S_j = \emptyset$ gdy $|i - j| \geq 2$;

b) suma okręgów S_1, S_2, S_3, S_4, z których S_2, S_3, S_4 są parami rozłączne i zewnętrznie styczne do S_1.

W a) tworzyć nakrycie tak, by S_1 i S_3 przeszły przy p na jeden z okręgów bukietu, a S_2 i S_4 na drugi; w b) niech S_1 przejdzie na jeden z okręgów, a S_2, S_3 i S_4 na drugi.

Uwaga 3. Inspiracją do tworzenia nakryć bukietu $S^1 \vee S^1$ mogą być wymienione rysunki u Hatchera.

D. Jeszcze o grupie podstawowej

77. $\diamond$ Opierając się na konstrukcji z twierdzenia 2 na str. 34 notatek, podać przykład spójnej przestrzeni X, dla której $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$.

78. $\diamond$ Niech X będzie skończonym grafem spójnym (=zwartą CW-przestrzenią spójną, wymiaru 1), a D maksymalnym drzewem w X, tzn. maksymalnym podzbiorem w X, nie zawierającym zamkniętych dróg krawędziowych. Obierzmy punkt bazowy $x \in D$ i dla każdej zorientowanej krawędzi l, przecinającej D tylko w swych krańcach, określmy $\bar{l}$ jako konkatenację $\alpha * l * \beta$, gdzie α jest ścieżką w D od x do początku krawędzi l, a β jest ścieżką w D od końca krawędzi l do x. Dowieść, że $\pi_1(X)$ jest grupą wolną, w sposób wolny generowaną przez klasy $[\bar{l}]$ (przy l przebiegającym wszystkie opisane krawędzie).

79. * a) Niech $X = \mathbb{Z}\times\mathbb{R}\cup\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$. Dowieść, że $\pi_1(X)$ jest grupą wolną, mającą $\aleph_0$ wolnych generatorów. (Wskazówka: rozumować jak wyżej, przyjmując $D = \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{0\}$.)

b) W oparciu o to, znaleźć nieskończony i wolny podzbiór grupy F_2. (Por. strona 54/5 notatek do wykładu.)

[5] nakrycie $p : \widetilde{X} \to X$ jest n–**krotne**, jeśli każde jego włókno $p^{-1}(x)$ jest n–elementowe.