Oznaczenia i przypomnienia.

$$\overline{B^n} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le 1\}, \quad S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}, \quad B^n := \overline{B^n} \setminus S^{n-1},$$

$$I := [0,1], \quad \mathbb{C} \text{ to ciało liczb zespolonych}, \quad \mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \mathbb{R}^n_* := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Wyżej, $\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$ dla $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$. Gdy nie powiedziano inaczej, zbiór $\mathbb{R}^n$ wyposażamy w topologię wyznaczoną przez metrykę euklidesową $d(x,y) = \|x - y\|$.

Przekształcenie oznacza ciągłą funkcję między przestrzeniami topologicznymi. Niech X i Y będą przestrzeniami topologicznymi i niech $Z \subset Y$. Dwa przekształcenia f_0 i f_1, oba z X w Y, nazywamy **homotopijnymi w** Z, jeśli istnieje przekształcenie $H : X \times I \to Y$ takie, że $\mathrm{im}(H) \subset Z$ oraz $H(x,i) = f_i(x)$ dla $(x,i) \in X \times \{0,1\}$. Mówimy wtedy, że H, a też rodzina $(h_t : X \to Y)_{t \in I}$ przekształceń danych formułą $h_t(x) = H(x,t)$, jest **homotopią między** f **i** g **w** Z. Jeśli przekształcenie $f : X \to Y$ jest w Z homotopijne z (jakimś) przekształceniem stałym, nazywamy je **nieistotnym w** Z. Gdy $Z = Y$, to wyżej możemy opuścić frazę „w Z".

Zadanie (przypomnienie z Topologii I.) a) Relacja homotopijności jest przechodnia: jeśli przekształcenie f_0 jest homotopijne z f_1, a f_1 z f_2, to f_0 jest homotopijne z f_2. (Tu, f_0, f_1, f_2 są z X w Y.) Stąd przekształcenie, homotopijne z nieistotnym, jest nieistotne.

b) Jeśli przekształcenia $f_0, f_1 : X \to Y$ są homotopijne, podobnie jak $g_0, g_1 : Y \to T$, to złożenie $g_0 \circ f_0$ jest homotopijne z $g_1 \circ f_1$. W szczególności, gdy f_0 lub g_0 są nieistotne, to nieistotne jest zlożenie $g_0 \circ f_0$.

c) Gdy przestrzeń X jest **ściągalna** (tzn. przekształcenie identycznościowe id_X jest homotopijne ze stałym, czyli jest nieistotne), to nieistotne jest każde przekształcenie o wartościach w X i każde przekształcenie określone na X. (Wynika to z b).)

d) Przekształcenie $S^{n-1} \to Y$ jest nieistotne wtedy i tylko wtedy, gdy można je przedłużyć do przekształcenia $\overline{B^n} \to Y$.

Ostrzeżenie. W zadaniu, Z nie wystepuje, więc domyślnie jest całą przeciwdziedziną. Należy uważnie śledzić, co pełni rolę podprzestrzeni Z. Dla przykładu: włożenie S^{n-1} w $\mathbb{R}^n$ jest nieistotne w $\mathbb{R}^n$ (na podstawie części c) zadania 1, bo $\mathbb{R}^n$ jest przestrzenią ściągalną); pokażemy jednak, że to samo przekształcenie jest istotne w $\mathbb{R}^n_*$. Tak więc zmiana Z choćby o punkt może mieć istotny wpływ na to, które przekształcenia są istotne w Z, lub są wzajemnie homotopijne w Z. Jest tak, bo zmieniając Z, zmieniamy zbiór wartości, które rozważane homotopie mogą przyjmować.

I Twierdzenie Brouwera i twierdzenia o rozcinaniu

§ 1. Twierdzenie Brouwera i twierdzenia równoważne mu; konsekwencje.

1. Sformułowanie twierdzenia Brouwera i twierdzenia o nieistnieniu retrakcji.

Twierdzenie 1. *Kula $\overline{B^n}$ ma* **własność punktu stałego***, tzn. dla każdego przekształcenia $f : \overline{B^n} \to \overline{B^n}$ istnieje jego punkt stały (czyli taki punkt $x \in \overline{B^n}$, że $f(x) = x$).*

To powszechnie znane i wykorzystywane twierdzenie nazywane jest twierdzeniem Brouwera, choć wcześniej Poincaré i Bohl uzyskali wyniki mocniejsze. Pokrewne mu jest:

Twierdzenie 2. *Nie istnieje ciągła retrakcja kuli $\overline{B^n}$ na sferę S^{n-1}.*

Przypomnijmy, że funkcję $r : X \to X$ nazywamy **retrakcją**, jeśli $r \circ r = r$. Przy $X_0 := r(X)$ mówimy wtedy o retrakcji X na X_0; jest nią taka funkcja $r : X \to X$, że $r(X) \subset X_0$ i $r(x) = x$ dla $x \in X_0$. (Niekiedy wygodniej jest za przeciwdziedzinę retrakcji brać jej obraz X_0, a nie X.)

Zadanie 0. a) Dowieść, że teza twierdzenia 1 ma charakter topologiczny: jeśli przestrzeń X ma własność punktu stałego, to ma ją też każda przestrzeń homeomorficzna z X.

b) Niech istnieje ciągła retrakcja przestrzeni X na zbiór $X_0 \subset X$. Dowieść, że jeśli X ma własność punktu stałego, to ma ją też podprzestrzeń X_0, a też, że istnieje ciągła retrakcja X' na X'_0 gdy para (X', X'_0) jest homomorficzna z parą (X, X_0) (czyli gdy $X'_0 = f(X_0)$ dla pewnego homeomorfizmu $f : X \to X'$).

c) Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie wypukłym zbiorem zwartym o niepustym wnętrzu. Z b) i zadania 5 (dalej) wywnioskować, że X ma własność punktu stałego i nie istnieje ciągła retrakcja zbioru X na jego brzeg.

Związek między oboma twierdzeniami wynika z następującego lematu:

Lemat 1. *Niech zbiór D i przekształcenie $w : D \to \overline{B^n}$ będą takie, że $S^{n-1} \subset D \subset \mathbb{R}^n$ i $w(x) \neq x$ dla każdego punktu $x \in D$. Wówczas: a) istnieje ciągła retrakcja zbioru D na sferę S^{n-1}, i b) można uzyskać, by była ona klasy C^∞ na wnętrzu zbioru D, jeśli w ma tę własność i $w(D) \subset B^n$.*

<u>Dowód.</u> Dla $x \in D$ niech $r(x) = w(x) + t(x - w(x))$, gdzie t jest niemniejszym z pierwiastków równania kwadratowego $\|w(x) + t(x - w(x))\|^2 = 1$. Skoro $w(x) \in \overline{B^n}$, to wyraz wolny równania, równy $\|w(x)\|^2 - 1$, jest ≤ 0, zaś jest < 0 jeśli $w(x) \in B^n$. Wyraz przy t^2 wynosi $\|x - w(x)\|^2 > 0$. Wyróżnik równania jest więc nieujemny/dodatni i ze szkolnego wzoru na t wynika ciągłość/gładkość r. (Gra rolę to, że pierwiastek kwadratowy jest funkcją ciągłą na $[0, \infty)$ i gładką na $(0, \infty)$. Jaka jest interpretacja geometryczna $w(x)$ i dlaczego $r(D) \subset S^{n-1}$ i $r(x) = x$ gdy $x \in S^{n-1}$?) $\boxminus$ [1]

Uwaga 1. Z a) wynika, że jeśliby istniało przekształcenie $\overline{B^n} \to \overline{B^n}$ bez punktu stałego, to istniałaby też ciągła retrakcja kuli na jej brzeg. Dowód twierdzenia 1 będzie oparty na tej obserwacji, lecz wykorzystywać będzie własności funkcji gładkich, a przez to tezę b).

---

[1] $\boxminus$ oznacza koniec rozumowania, w którym należy uzupełnić nietrudne pominięte szczegóły.

2. Dowód twierdzenia Brouwera.

Stwierdzenie 1. *Nie istnieje retrakcja kuli $\overline{B^n}$ na sferę S^{n-1}, klasy C^2 (tzn. rozszerzająca się do funkcji klasy C^2, określonej na otoczeniu kuli $\overline{B^n}$).*

Dowód (w zasadzie Dunforda i Schwartza). Będziemy dla krótkości pisać $\overline{B}$ i S w miejsce $\overline{B^n}$ i S^{n-1}, odpowiednio, zaś dla każdej funkcji $f = (f_1, ..., f_n) : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$ klasy C^2 przyjmiemy $I_f = \int_{\overline{B}} \det(\mathbf{J}_f)$, gdzie $\mathbf{J}_f = (\partial_i f_j)_{i,j=1}^n$ to macierz Jacobiego przekształcenia f i całkowanie jest względem miary Lebesgue'a μ_n na $\mathbb{R}^n$. Twierdzimy, że:

1) Jeśli $f(\overline{B}) \subset S$ (i f jest klasy C^2), to $I_f = 0$.

2) Jeśli funkcje $f, g : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$ są klasy C^2 i $f_{|S} = g_{|S}$, to $I_f = I_g$.

Stąd wyniknie już teza stwierdzenia. Istotnie, dla retrakcji $f : \overline{B} \to f(\overline{B}) = S$ klasy C^2 byłoby $I_f = 0$, patrz 1); a że dla włożenia $g : \overline{B} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ zachodzi $\mathbf{J}_g(x) = \mathbf{I}_n$ dla wszystkich x, to $I_g = \int_{\overline{B}} 1 \neq 0$, wbrew 2) i temu, że $f_{|S} = g_{|S}$ (bo f jest retrakcją).

Dowód tezy 1). Różniczkując tożsamość $\sum_j f_j^2(x) = 1$ względem kolejnych zmiennych x_i uzyskujemy równości $\sum_j (\partial_i f_j)(x) f_j(x) = 0$. Zatem w każdym punkcie x, pewna kombinacja liniowa kolumn macierzy $\mathbf{J}_f(x)$ znika (współczynniki kombinacji to $f_1(x), ..., f_n(x)$). Znika więc też wyznacznik tej macierzy i rozważana w 1) całka I_f.

Dowód tezy 2). Teza ta wynika z twierdzenia Stokesa, przy czym z tak prostego jego przypadku, że damy dowód bez powołania się na twierdzenie.[2] Rozwińmy jakobian $\det(\mathbf{J}_f(x))$ względem pierwszej kolumny, uzyskując po scałkowaniu równość $I_f = \sum_i \int_{\overline{B}} (\partial_i f_1) a_i$, gdzie funkcje a_i nie ulegną zmianie, gdy zmienimy f_1, lecz nie $f_2, ..., f_n$. Następnie, ze wzoru na pochodną iloczynu otrzymamy $I_f = \sum_i \int_{\overline{B}} \partial_i (f_1 a_i) - \int_{\overline{B}} \sum_i f_1 \partial_i a_i$.

Korzystając z równości pochodnych mieszanych nietrudno jest udowodnić (dowód pomijam), że funkcja $\sum_i \partial_i a_i$ jest zerowa, wobec czego $I_f = \sum_i \int_{\overline{B}} \partial_i (f_1 a_i)$.

Zauważmy teraz, że żadna z całek w ostatniej sumie nie zmieni wartości przy zmianie f_1 na funkcję g_1. Jest tak, bo całkując względem $\mathrm{d}x_i$ na początku, uzyskujemy $\int_{\overline{B}} \partial_i (f_1 a_i) = \int_{\overline{B'}} \big((f_1 a_i)(y_+) - (f_1 a_i)(y_-)\big) \mathrm{d}\mu_{n-1}(y)$, gdzie $\overline{B'}$ to kula jednostkowa w przestrzeni $x_i = 0$, a y_+ i y_- są dla $y \in \overline{B'}$ pewnymi punktami sfery S. Punkty te łatwo wyrazić wzorem; gra jednak rolę tylko to, że $f_1(z) = g_1(z)$ dla $z = y_\pm$.

Wynika stąd, że $I_f = \sum_i \int_{\overline{B}} \partial_i (f_1 a_i) = \sum_i \int_{\overline{B}} \partial_i (g_1 a_i) = I_h$, gdzie $h = (g_1, f_2, ..., f_n)$. Tak samo, można w h zmienić f_2 na g_2 itd., co na koniec da żądaną równość $I_f = I_g$. $\square$

Dowod twierdzenia 1. Przypuśćmy, wbrew tezie, że przekształcenie $u : \overline{B^n} \to \overline{B^n}$ nie ma punktu stałego. Obierzmy liczbę dodatnią $\varepsilon < \inf_{x \in \overline{B^n}} \|u(x) - x\|/2$ i przyjmijmy $v = (1 - \varepsilon) u$; wtedy $\|v(x) - x\| > \varepsilon$ dla $x \in \overline{B^n}$. Rozszerzmy v do przekształcenia z $\mathbb{R}^n$ w $(1 - \varepsilon) B^n$ (twierdzenie Tietzego!), wciąż oznaczanego przez v. Dla wszystkich x z pewnego zwartego otoczenia D kuli $\overline{B^n}$ zachodzi $v(x) \in (1 - \varepsilon/2) B^n$ oraz $\|v(x) - x\| > \varepsilon$.

---

[2] Dla zainteresowanych podam też uzasadnienie oparte o tw. Stokesa. Mamy $\det(\mathbf{J}_f) \mathrm{d}x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_n = \mathrm{d}f_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}f_n = \mathrm{d}(f_1 \wedge \mathrm{d}f_2 \wedge ... \wedge \mathrm{d}f_n)$, więc (z tego twierdzenia) $I_f = \int_S f_1 \mathrm{d}f_2 \wedge ... \wedge \mathrm{d}f_n$. W całce można zastąpić f_1 przez g_1, bo na S funkcje te są równe. To da równość $I_f = I_h$ z przedostatniego zdania dowodu, do którego należy teraz przejść.

Na koniec, w oparciu o twierdzenie Wierstrassa, znajdźmy funkcję $w : D \to \mathbb{R}^n$ klasy C^∞, tak bliską $v_{|D}$, by $d_{\sup}(v_{|D}, w) < \varepsilon/2$; wtedy $w(D) \subset B^n$ i $w(x) \neq x$ dla wszystkich $x \in D$. Z lematu w p.1 wynika więc istnienie retrakcji $D \to S^{n-1}$, będącej klasy C^∞ na wnętrzu zbioru D, w tym na $\overline{B}$. Jak już wiemy, jest to niemożliwe, co kończy dowód. □

Dowod twierdzenia 2. Jeśliby istniała ciągła retrakcja r kuli na jej brzeg, to przekształcenie $\overline{B^n} \ni x \mapsto -r(x) \in \overline{B^n}$ nie miałoby punkty stałego, wbrew twierdzeniu 1. ⊟

3. Dalsze rezultaty równoważne twierdzeniu Brouwera lub wynikające z niego.

Wniosek 1. *a) Przekształcenie identycznościowe* $id : S^{n-1} \to S^{n-1}$ *jest istotne. (Inaczej: sfera* S^{n-1} *nie jest przestrzenią ściągalną.)*

b) Włożenie S^{n-1} *w* $\mathbb{R}^n_* := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *jest przekształceniem istotnym (w* $\mathbb{R}^n_*$*).*

Dowód. Wobec części d) zadania ze str. 1, część a) jest przeformułowaniem twierdzenia 2. Część b) wynika zaś stąd, że gdyby włożenie było nieistotne, to złożone z retrakcją $\mathbb{R}^n_* \to S^{n-1}$ byłoby nieistotne w S^{n-1}, wbrew a).

Wokół twierdzenia Brouwera (wybrane zadania z ćwiczeń).

1. a) Niech (X, d) będzie zwartą przestrzenią metryczną i niech dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje przekształcenie f_ε z X w podprzestrzeń $X_\varepsilon \subset X$ mającą własność punktu stałego, takie, że $d(f_\varepsilon(x), x) < \varepsilon$ dla $x \in X$. Dowieść, że X ma własność punktu stałego.

b) Wywnioskować, że *kostka Hilberta* I^∞ ma własność punktu stałego. (Wskazówka: zbadać $d(f_n(x), x)$ dla $x \in I^\infty$ i f_n będącego oczywistym rzutowaniem na $\{(x_j)_{j=1}^\infty : x_j = 0 \text{ dla } j > n\}$; tu d jest dogodną metryką, zadającą topologię kostki I^∞.)

2. a) Dane jest przekształcenie $f : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$. Dowieść **twierdzenia Bohla**: istnieje punkt stały dla f lub punkt $x \in S^{n-1}$ taki, że $f(x) = tx$ dla pewnego $t \in (1, \infty)$. (Wskazówka: złożyć f z retrakcją $r : \mathbb{R}^n \to \overline{B^n}$, daną przez $r(x) = x$ gdy $\|x\| \leq 1$ i $r(x) = x/\|x\|$ gdy $\|x\| \geq 1$.)

b) Wywnioskować, że gdy przekształcenie $f : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ spełnia warunek $f(S^{n-1}) \subset \overline{B^n}$, to ma ono punkt stały.

c) Dla $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wywnioskować też, że jeśli zbiór $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \in (1, \infty)x\}$ jest ograniczony, to g ma punkt stały. (Tu, $(1, \infty)x := \{tx : t \in (1, \infty)\}$.)

3. a) Oznaczmy przez C stożek $[0, \infty)^n \setminus \{(0, ..., 0)\}$. Dowieść, że dla każdego przekształcenia $f : C \to C$ istnieje punkt $x \in C$ i skalar $t > 0$, dla których $f(x) = tx$. (Wskazówka: rozważyć obcięcie f do sympleksu $\Delta := \{x \in C : \sum_i x_i = 1\}$.)

b) Uzyskać stąd **twierdzenie Frobeniusa**: każda $n \times n$–macierz o wyrazach nieujemnych ma pewną nieujemną wartość własną.

4. * Niech p będzie punktem wewnętrznym zwartego zbioru wypukłego $X \subset \mathbb{R}^n$. Dowieść istnienia homeomorfizmu $f : \overline{B^n} \to X$, dla którego $f(0) = p$. (Wskazówka:

założyć bez straty ogólności, że $p = 0$ i udowodnić, że dla każdego punktu $x \in S^{n-1}$ półprosta $\{tx : t \geq 0\}$ przecina brzeg zbioru X w dokładnie jednym punkcie, który oznaczmy $a(x)$; przyjąć $f(x) = \|x\| a(x/\|x\|)$ dla $x \in \overline{B^n} \setminus \{0\}$ i $f(0) = 0$.)

5. X i p są jak w zadaniu poprzednim.

a) Niech $f : X \to \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem takim, że $p \in f(\mathrm{Fr}(X))$ albo przekształcenie $f_{|\mathrm{Fr}(X)} : \mathrm{Fr}(X) \to \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ jest istotne w $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$. Dowieść, że $p \in f(X)$.

b) Dowieść, że założenia w a) są spełnione, jeśli dla każdego punktu $x \in \mathrm{Fr}(X)$, punkt p nie leży na odcinku otwartym $(x, f(x))$. Dowieść też, że ma to miejsce w każdym z następujących przypadków:

i) $\|x - f(x)\| \leq \|x - p\|$ dla każdego punktu $x \in \mathrm{Fr}(X)$;

ii) dla każdego punktu $x \in \mathrm{Fr}(X)$, kąt $pxf(x)$ jest niezerowy lub $f(x) = x$.

iii) $X = [-1, 1]^n$, $p = 0$, zaś f ma tę własność, że $f(\{x \in X : x_i = -1\}) \subset \{y \in \mathbb{R}^n : y_i \leq 0\}$ i $f(\{x \in X : x_i = 1\}) \subset \{y \in \mathbb{R}^n : y_i \geq 0\}$, dla $i = 1, ..., n$. (Ta część zadania nazywana jest twierdzeniem Poincarégo-Mirandy.)

iv) X jest zwartym wielościanem wypukłym, a f przeprowadza każdą jego $(n-1)$–ścianę w jej podzbiór. (Nie definiuję, czym są taki wielościan i jego $(n-1)$–ściany; wystarcza wiedzieć, że $\mathrm{Fr}(X)$ jest skończoną sumą tych ścian i są one wypukłe. Obejmuje to przypadki, gdy X to kostka lub sympleks.)

6. Przez J^n oznaczamy kostkę $[-1, 1]^n$, a przez $F_k^+ = \{x \in J^n : x_k = 1\}$ i $F_k^- = \{x \in J^n : x_k = -1\}$ jej ściany ($k = 1, ..., n$).

a) Niech A_k^ε będą takimi podzbiorami kostki J^n, że dla $k = 1, ..., n$ i $\varepsilon = +, -$ zachodzi $A_k^\varepsilon \supset F_k^\varepsilon$ oraz $\overline{A_k^+} \cap A_k^- = \emptyset = {A_k}^+ \cap \overline{A_k^-}$. Dowieść, że $\bigcup_{k=1}^n (A_k^+ \cup A_k^-) \neq [-1, 1]^n$. (Wskazówka: część iii) zadania 5b), przy $f_i(x) = \mathrm{dist}(x, A_i^-) - \mathrm{dist}(x, A_i^+)$; zbadać, czy przy $f_i(x) = 0$ może być $x \in A_i^+ \cup A_i^-$. Na marginesie: warto zauważyć, że gdy zbiory A, B są rozłączne i oba są domknięte lub oba są otwarte, to $A \cap \overline{B} = \emptyset = \overline{A} \cap B$.)

b) Dowieść, że gdy przekształcenie $g : J^n \to \mathbb{R}^n$ jest takie, że $g(F_k^\varepsilon) \subset F_k^\varepsilon$ dla $k = 1, ..., n$ i $\varepsilon = \pm$, zaś przekształcenie $h : J^n \to J^n$ jest dowolne, to $g(x) = h(x)$ dla pewnego $x \in J^n$. (Wskazówka: ponownie część iii) zadania 5b), z $f := g - h$.)

7. Kostkę J^n pokryto n zbiorami domkniętymi. Dowieść, że któryś z nich zawiera zbiór spójny, przecinający dwie przeciwległe ściany kostki. (Wskazówka: **6**a). Wolno korzystać z tego, że gdy zbiór zwarty nie zawiera żadnego zbioru spójnego, przecinającego dane dwa rozłączne zbiory zwarte $A, B \subset J^n$, to jest on sumą dwóch rozłącznych zbiorów zwartych, z których każdy przecina tylko jeden ze zbiorów A, B; patrz zadanie domowe.)

<u>Zadania uzupełniające.</u>

8. Niech $J = [-1, 1]$. Dwa przeciwległe boki kwadratu J^2 połączono krzywą $\alpha : J \to J^2$, a pozostałe dwa krzywą β. Dowieść, że $\mathrm{im}(\alpha) \cap \mathrm{im}(\beta) \neq \emptyset$. (Wskazówka: część iii) zadania 5b) przy $f = (f_1, f_2)$, gdzie $f_1(s, t) = \alpha_1(s) - \beta_1(t)$, $f_2(s, t) = \alpha_2(s) - \beta_2(t)$.)

9. a) Odszukać wiadomości o grze Hex i dowieść, że nie może się ona zakończyć remisem. (Wskazówka: **7** dla $n = 2$. Odmienny, elementarny dowód jest w artykule D. Gale'a w Amer. Math. Monthly 86 (1979), str. 818–827; patrz https://pdfs.semanticscholar.org/9282/284383aa9daf83f0616739a053fb06b26155.pdf)

b) Odszukać w książce H. Steinhausa „Kalejdoskop matematyczny" stwierdzenie o gońcu i wieży na szachownicy, i udowodnić je.

10. Niech $W = \{(1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dla zbioru $E \subset W$, oznaczmy przez $\Delta(E)$ jego powłokę wypukłą w $\mathbb{R}^{n+1}$, zaś n–sympleks $\Delta(W)$ oznaczmy przez Δ.

a) Udowodnić **zasadę Knastera – Kuratowskiego – Mazurkiewicza**: gdy każdemu punktowi $e \in W$ przyporządkować domknięty podzbiór K_e sympleksu Δ tak, by $\Delta(E) \subset \bigcup_{e\in E} K_e$ dla każdego $E \subset W$, to $\bigcap_{e\in W} K_e \neq \emptyset$. (Wskazówka: przy zaprzeczeniu tezy podporządkować pokryciu $\{\Delta \setminus K_e : e \in W\}$ **podział jedynki** $(\lambda_e)_{e\in W}$ i dowieść, że funkcja $\Delta \ni x \mapsto \sum_e \lambda_e(x)e$ nie ma punktu stałego.)

b) Wywnioskować, że gdy $\{K_e : e \in W\}$ jest takim domkniętym pokryciem sympleksu Δ, że $K_e \cap \Delta(W \setminus \{e\}) = \emptyset$ dla każdego $e \in W$, to $\bigcap_e K_e \neq \emptyset$.

c) Dowieść dalej istnienia takiej liczby $\delta > 0$, że dla każdego skończonego pokrycia $\mathcal{K}$ sympleksu Δ zbiorami domkniętymi o średnicy $< \delta$, pewnych $n+1$ zbiorów z $\mathcal{K}$ ma niepuste przecięcie. (Wskazówka: jeśli liczba δ jest dostatecznie mała, to $\mathcal{K}$ można podzielić na takie podrodziny $\mathcal{K}_e, e \in W$, że przy $K_e := \bigcup \mathcal{K}_e$ spełnione są założenia z b).)

11. Oznaczmy przez ℓ_2 *przestrzeń Hilberta* $\{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty} : \|x\| < \infty\}$, *gdzie* $\|x\| = (\sum_i x_i^2)^{1/2}$. Dowieść, że kula $B = \{x \in \ell_2 : \|x\| \leq 1\}$ nie ma własności punktu stałego. (Wskazówka: niech $e_n = (\delta_n^i)_{i=1}^{\infty}$ oznacza n-ty wersor w ℓ_2; zauważyć, że wzór $h(t) = e_n + (t - n)(e_{n+1} - e_n)$ dla $t \in [n, n + 1]$ i $n \in \mathbb{N}$, określa homeomorfizm półprostej $[0, \infty)$ na domknięty podzbiór przestrzeni ℓ_2. Podzbiór ten nie ma własności punktu stałego, a jest retraktem kuli B na podstawie tw. Tietzego.)

<u>Problem 1.</u> Niech $\gamma : I \to X$ będzie ścieżką w przestrzeni metrycznej (X, d), zaś $(c_i)_{i=1}^n$ układem liczb nieujemnych. Dowieść istnienia takich liczb K i $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = 1$, że $d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) = Kc_i$ dla $i = 1, ..., n$. (Jest to twierdzenie K. Urbanika.)

§ 2. Twierdzenia Borsuka: o przedłużaniu homotopii i o rozcinaniu $\mathbb{R}^n$.

1. Twierdzenie o przedłużaniu homotopii.

Twierdzenie 1 (Borsuka o przedłużaniu homotopii). *Niech X_0 będzie zbiorem domkniętym w przestrzeni metryzowalnej X, a Y retraktem zbioru otwartego w $\mathbb{R}^n$ (czyli obrazem takiego zbioru przy pewnej ciągłej retrakcji). Gdy przekształcenia $f, g : X_0 \to Y$ są homotopijne i f przedłuża się na X* [3]*, to g też się przedłuża.*

[3]przez co rozumiemy, że $\overline{f}_{|X_0} = f$ dla pewnego przekształcenia $\overline{f} : X \to Y$.

Dowód. Obierzmy retrakcję $r : U \to Y$ zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}^n$ i homotopię $H : X_0 \times I \to Y$ między f a g (tzn. H jest ciągłe oraz $H(x,0) = f(x)$ i $H(x,1) = g(x)$ dla $x \in X_0$). Określmy $G : X_0 \times I \cup X \times \{0\} \to Y$ wzorem $G_{|X_0 \times I} = H$ i $G(x,0) = \overline{f}(x)$ dla $x \in X$, gdzie przekształcenie $\overline{f} : X \to Y$ przedłuża f_0. (Poprawność definicji i ciągłość G wynika stąd, że $H(x,0) = \overline{f}(x)$ dla $x \in X_0$.) Na podstawie twierdzenia Tietzego istnieje ciągłe przedłużenie $\overline{G} : X \times I \to \mathbb{R}^n$ przekształcenia G. Niech $K = \overline{G}^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus U)$; zbiór ten jest domknięty w $X \times I$ i rozłączny z $X_0 \times I$. Jego rzut $\pi_X(K)$ na X (wzdłuż osi I) jest więc rozłączny z X_0 i domknięty, na podstawie twierdzenia Kuratowskiego o rzutowaniu wzdłuż osi zwartej. Obierzmy taką funkcję ciągłą $\alpha : X \to I$, że $\alpha_{|X_0} = 1$ i $\alpha(x) = 0$ dla $x \in \pi_X(K)$. Wzór $\overline{g}(x) = r \circ \overline{G}(x, \alpha(x))$ definiuje szukane przedłużenie pzekształcenia g. □

Uwaga 1. a) Podkreślmy, że wyżej $\overline{G}$ mogło przyjmować wartości nie tylko poza Y, ale i poza U. Istotna część dowodu ma na celu uzyskanie przedłużenia z wartościami w U (czyli: nie leżącymi w „zakazanym” zbiorze $\mathbb{R}^n \setminus U$) i złożenia go z retrakcją $r : U \to Y$.

b) Nietrudno też uzyskać homotopię między $\overline{f}$ i g, przedłużającą homotopię H; jest nią $(x,t) \mapsto H(x, t\alpha(x))$. (Stąd nazwa „twierdzenie o przedłużaniu homotopii”.)

Wniosek 1. *Jeśli X, X_0, Y są jak w twierdzeniu, to każde nieistotne przekształcenie $g : X_0 \to Y$ przedłuża się na X.*

Dowód. Niech f będzie przekształceniem stałym, z którym homotopijne jest przekształcenie g. Ponieważ f przedłuża się na X, więc g też się przedłuża. □

Retrakty zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^n$ mają jeszcze jedną ważną własność:

Stwierdzenie 1. *Niech Y będzie retraktem zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}^n$, a $f : X \to Y$ przekształceniem przestrzeni zwartej X. Wówczas istnieje taka liczba $\varepsilon > 0$, że każde przekształcenie $g : X \to Y$, spełniające warunek $d_{\sup}(f,g) < \varepsilon$, jest z f homotopijne.*

Dowód. Przyjmujemy $\varepsilon = \mathrm{dist}(f(X), \mathbb{R}^n \setminus U)$, a żądaną homotopię określamy wzorem $H(x,t) = r(tf(x) + (1-t)g(x))$ dla $x \in X, t \in I$, gdzie $r : U \to Y$ jest retrakcją. □

Uwaga 2. a) Prawdziwość tez powyższych wyników nie ulegnie zmianie po zastąpieniu przestrzeni Y przez homeomorficzną z nią. (Należy to uzasadnić!) Powoduje to, że przestrzenie, homeomorficzne z retraktami zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^n$, odgrywają sporą rolę; nazywane są one po angielsku ”Euclidean Neighborhood Retracts”, w skrócie ENR.

b) Przestrzeń S^{n-1} jest retraktem zbioru $\mathbb{R}^n_* = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, otwartego w $\mathbb{R}^n$; jest więc ona ENR, podobnie jak każdy zbiór otwarty w $\mathbb{R}^n$. ENR-y tworzą dość szeroką klasę zbiorów, obejmującą rozmaitości topologiczne i wielościany, z którymi przyjdzie się zetknąć na dalszych kursach Topologii.

Zadanie 1. Niech U będzie zbiorem otwartym w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (lub, ogólniej, niech U

będzie ENR). Dowieść, że gdy A jest domkniętym podzbiorem przestrzeni metryzowalnej X, to każde przekształcenie $f : A \to U$ przedłuża się na pewne otocznie zbioru A w X.

Zadanie 2. Dowieść, że przestrzeń, homeomorficzna z retraktem przestrzeni ściągalnej, jest ściągalna.

2. Twierdzenia Borsuka o rozcinaniu (część pierwsza).

Zajmować nas będzie zagadnienie, kiedy dany zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ **rozcina** $\mathbb{R}^n$ **między punktami** p **i** q, tzn. kiedy punkty te leżą w różnych składowych zbioru $\mathbb{R}^n \setminus A$.

Uwaga 1. (Przypomnienie z Topologii I.) Gdy zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty, to:
a) składowe jego dopełnienia są otwarte w $\mathbb{R}^n$ i łukowo spójne;
b) gdy $n > 1$, to dokładnie jedna z tych składowych jest nieograniczona;
c) A zawiera brzeg $\mathrm{Fr}(U)$ każdej składowej U zbioru $\mathbb{R}^n \setminus A$. (Wynika to z a).)

Oznaczenie. Dla $A \subset \mathbb{R}^n$ i $p \notin A$, przez $i_A - p : A \to \mathbb{R}^n_*$ oznaczamy przekształcenie dane wzorem $(i_A - p)(x) = x - p$. (Odnotujmy, że istotnie $\mathrm{im}(i_A - p) \subset \mathbb{R}^n_*$.)

Lemat 1 (K. Borsuka). *Niech A będzie zbiorem zwartym w $\mathbb{R}^n$, niech $p \notin A$, i niech U będzie jedną z ograniczonych składowych zbioru $\mathbb{R}^n \setminus A$. Wówczas przekształcenie $i_A - p$ przedłuża się do przekształcenia z $A \cup U$ w $\mathbb{R}^n_*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \notin U$.*

Dowód. Gdy $p \notin U$, to szukane przedłużenie można zadać wzorem $x \mapsto x - p$ dla $x \in A \cup U$. (Dlaczego obraz leży w $\mathbb{R}^n_*$?)

Niech teraz $p \in U$ i przypuśćmy, wbrew tezie, że $i_A - p$ przedłuża się do przekształcenia $f : A \cup U \to \mathbb{R}^n_*$. Oznaczmy przez B tak dużą kulę o środku w p, że $A \cup U \subset B$. Wzory $g(x) = p + f(x)$ dla $x \in A \cup U$ i $g(x) = x$ dla $x \in \overline{B} \setminus U$ określają ciągłą funkcję z $\overline{B}$ w $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$,[4] która złożona z retrakcją $\mathbb{R}^n \setminus \{p\} \to \mathrm{Fr}(\overline{B})$ jest retrakcją kuli $\overline{B}$ na jej brzeg. Otrzymana sprzeczność z twierdzeniem 2 z §1.1 dowodzi tezy. □

Twierdzenie 1 (Borsuka o rozcinaniu,1). *Niech A będzie zbiorem zwartym w $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.*

a) Punkty $p, q \in \mathbb{R}^n \setminus A$ leżą we wspólnej składowej zbioru $\mathbb{R}^n \setminus A$ wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenia $i_A - p$ i $i_A - q$ są homotopijne w $\mathbb{R}^n_*$.

b) Punkt $p \in \mathbb{R}^n \setminus A$ leży w nieograniczonej składowej zbioru $\mathbb{R}^n \setminus A$ wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie $i_A - p$ jest nieistotne w $\mathbb{R}^n_*$.

Dowód (w 3 krokach). i) Gdy p i q leżą we wspólnej składowej zbioru otwartego $\mathbb{R}^n \setminus A$, to można je połączyć ścieżką $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n \setminus A$; patrz uwaga 1a). Pozwala to połączyć $i_A - p$ z $i_A - q$ homotopią w $\mathbb{R}^n_*$, zadaną wzorem $A \times I \ni (a, t) \mapsto a - \gamma(t)$.

ii) Zauważmy teraz, że gdy p leży w nieograniczonej składowej zbioru $\mathbb{R}^n \setminus A$, to przekształcenie $i_A - p$ jest nieistotne w $\mathbb{R}^n_*$. Możemy bowiem wobec i) zakładać, że

[4] Poprawność tej definicji i ciągłość g wynikają stąd, że zbiory $\overline{B}^n \setminus U$ i $A \cup U$ są domknięte w $\overline{B^n}$ (ten drugi dlatego, że $\mathrm{Fr}(U) \subset A$), zaś na ich części wspólnej A oba wzory dają ten sam wynik. A dlaczego $0 \notin \mathrm{im}(g)$?

$\|p\| > \sup_{a\in A}\|a\|$, a wtedy homotopia $A\times I \ni (a,t) \mapsto ta-p$ przyjmuje wartości w $\mathbb{R}^n_*$ (dlaczego?) i łączy i_A z przekształceniem stałym w punkt $-p$.

iii) Na koniec, niech punkty p i q leżą w różnych składowych zbioru $\mathbb{R}^n \setminus A$, przy czym p w ograniczonej składowej U. Wobec lematu, przekształcenie i_A-q, lecz nie i_A-p, przedłuża się do przekształcenia z $A\cup U$ w $\mathbb{R}^n_*$. Twierdzenie Borsuka o przedłużaniu zapewnia więc, że przekształcenia te nie są homotopijne w $\mathbb{R}^n_*$. Ponadto, przy q leżącym w składowej nieograniczonej wynika stąd i z i), że przeszktałcenie i_A-p jest istotne. ☐

Wniosek 1. *Dla $n>1$, dopełnienie zwartego i* <u>*ściągalnego*</u> *zbioru $A\subset\mathbb{R}^n$ jest spójne.*

<u>Dowód.</u> Gdyby istniała ograniczona składowa zbioru $\mathbb{R}^n\setminus A$, to dla pewnego punktu $p\in\mathbb{R}^n\setminus A$, przekształcenie $i_A-p : A\to\mathbb{R}^n_*$ byłoby istotne, wbrew zadaniu 1c) ze str. 1.

3. Twierdzenie Borsuka o rozcinaniu, c.d., oraz Brouwera o zachowaniu otwartości.

Omówimy tu poniższe dwa twierdzenia i wnoski z nich:

Twierdzenie 1 (Brouwera o zachowaniu otwartości). *Gdy przekształcenie $f:U\to\mathbb{R}^n$ otwartego zbioru $U\subset\mathbb{R}^n$ jest różnowartościowe, to zbiór $f(U)$ jest otwarty w $\mathbb{R}^n$.*

Wniosek 1. *Dla $k<n$ nie istnieje różnowartościowe przekształcenie z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^k$, wobec czego przestrzenie $\mathbb{R}^k$ i $\mathbb{R}^n$ nie są homeomorficzne.*

<u>Dowód.</u> W przeciwnym razie istniałoby różnowartościowe przekształcenie z $\mathbb{R}^n$ w $\{(x_i)_{i=1}^n\in\mathbb{R}^n : x_i=0 \text{ dla } i>k\}$, wbrew twierdzeniu 1. ⊟

Twierdzenie 2 (Borsuka o rozcinaniu, 2). *Dla $n>1$, dopełnienie zbioru zwartego $A\subset\mathbb{R}^n$ jest niespójne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje istotne przekształcenie $A\to\mathbb{R}^n_*$.*

Wniosek 2. *a) Gdy zbiory zwarte $A, A'\subset\mathbb{R}^n$ są homeomorficzne i jeden z nich rozcina $\mathbb{R}^n$ (tzn., jego dopełnienie jest niespójne), to drugi też ma tę własność.*

b) W szczególności, każdy zbiór homeomorficzny ze sferą S^{n-1} rozcina przestrzeń $\mathbb{R}^n$.

<u>Dowód.</u> Jeśli $\varphi : A'\to A$ jest homeomorfizmem, a przekształcenie $f:A\to\mathbb{R}^n_*$ jest istotne, to i $f\circ\varphi$ jest istotne. Teza, oczywista dla $n=1$, wynika więc z twierdzenia 2. ☐

Odnotujmy, że w zbiory $\mathbb{R}^n\setminus A$ i $\mathbb{R}^n\setminus A'$ mają nawet tyle samo składowych. (To inne twierdzenie Brouwera; jego dowód wymaga bardziej zaawansowanych metod.)

Gdy $n=1$, twierdzenie 1 wynika z twierdzenia Darboux z Analizy. Dla $n>1$, dowód oparty jest o twierdzenia o rozcinaniu: o część b) wniosku 2 i o wniosek 1 w p.2.

<u>Dowód twierdzenia 1, $n>1$.</u> Każdy punkt $p\in U$ leży w pewnej zależnej od p kuli otwartej B, wraz ze swym brzegiem S zawartej w U. Pozostaje dowieść otwartości $f(B)$. W tym celu zauważmy, że $f_{|\overline{B}}$ jest homeomorfizmem zbioru $\overline{B}$ na jego obraz $f(\overline{B})$. (Gra rolę zwartość $\overline{B}$.) Zbiory $f(B)$ i $\mathbb{R}^n\setminus f(\overline{B})$ są więc spójne, pierwszy jako obraz zbioru

spójnego, a drugi na podstawie wniosku 1 w p.2. Ich sumą jest zbiór $\mathbb{R}^n \setminus f(S)$, który jest niespójny na podstawie części b) wniosku 2. Stąd wynika łatwo, że zbiór $f(B)$ jest składową spójności zbioru $\mathbb{R}^n \setminus f(S)$, otwartego w $\mathbb{R}^n$, a przez to jest otwarty w $\mathbb{R}^n$. $\boxminus$

Tym samym pozostaje udowodnić twierdzenie 2, bo z niego wynika też wykorzystany wyżej wniosek 2b). Z braku czasu, dowód ten jest materiałem uzupełniającym (a więc i nieobowiązującym, chyba, że zdążę go przedstawić pod koniec semestru).

Uwaga 1. Dla $n = 2$, teza wniosku 2b) wyniknie też z twierdzenia Jordana z §3.4.

<u>Materiał uzupełniający: dowód twierdzenia 2 (według książki Hurewicza i Wallmana).</u>[5]

Zadanie 1. Niech X_0 będzie domknietym podzbiorem zwartej przestrzeni metryzowalnej X, a $f : X_0 \to \mathbb{R}^n_*$ przekształceniem, nie przedłużajacym się na X. Wówczas wśród zbiorów X' takich, że $X_0 \subset X' \subset X$ i f nie przedłuża się na X', istnieje minimalny względem inkluzji. (Przedłużenia mają mieć wartości w $\mathbb{R}^n_*$. Wskazówka: lemat Kuratowskiego–Zorna i zadanie 1 w p.1.)

Lemat 1. *a) Każde przekształcenie z $\overline{B^{n-1}}$ w $\mathbb{R}^n$ można dowolnie blisko przybliżać przekształceniami, których obraz nie zawiera zera.*

b) Gdy $X = \overline{B^{n-1}}$ lub $X = S^{n-1}$, zaś A jest zbiorem zwartym w X, to każde przekształcenie $f : A \to \mathbb{R}^n_*$ przedłuża się na X. (Tu i dalej, <u>mowa jest o przedłużeniach ciągłych, z wartościami w $\mathbb{R}^n_*$</u>.)

c) Gdy zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ nie zawiera kuli otwartej B w metryce euklidesowej, to każde przekształcenie z $K \setminus B$ w $\mathbb{R}^n_*$ przedłuża się na K. (K i B są zadane.)

<u>Dowód.</u> Ad a). Jeśli $n = 2$, to można rozważane przekształcenie f dowolnie blisko przybliżyć kawałkami liniowym przekształceniem $g : \overline{B^1} \to \mathbb{R}^2_*$. Jest oczywiste, że obraz $\mathrm{im}(g)$ tego przekształcenia, będący łamaną, można nieco przesunąć tak, by 0 nie znalazło się w przesuniętej łamanej. Dla $n > 2$ dowód można znaleźć w [BCPP], twierdzenie 7.6.3. Inny wynika z tego, że f można na podstawie twierdzenia Stone'a–Weierstrassa aproksymować odwzorowaniem $g_{|\overline{B^{n-1}}}$, gdzie g jest klasy C^∞; zbiór zaś $g(\overline{B^{n-1}})$ można nieco przesunąć, jak wyżej, bo ma puste wnętrze. (W ślad za $\overline{B^{n-1}}$, ma on bowiem zerową miarę Lebesgue'a: $\mu_n(g(\overline{B^{n-1}})) = \int_{\overline{B^{n-1}}} |\det(g'(x))| \mathrm{d}\mu_n(x) = 0$.)

Ad b). Niech wpierw $X = \overline{B^{n-1}}$. Na podstawie twierdzenia Tietzego, $f = \overline{f}_{|A}$ dla pewnego przekształcenia $\overline{f} : X \to \mathbb{R}^n$. Wobec a), istnieje dalej takie przekształcenie $g : X \to \mathbb{R}^n_*$, że $d_{\sup}(\overline{f}, g) < \inf\{\|f(a)\| : a \in A\}$. Przekształcenia f i $g_{|A}$ są homotopijne w $\mathbb{R}^n_*$, patrz przykład 1a) w §1; a że $g_{|A}$ przedłuża się do przekształcenia z X w $\mathbb{R}^n_*$ (przedłużeniem jest g), to f też się przedłuża, na podstawie twierdzenia Borsuka z p.1.

Dla $X = S^{n-1}$ przedstawmy sferę S^{n-1} jako sumę dwóch „półsfer" X^+ i X^-, homeomorficznych z $\overline{B^{n-1}}$. Jak już wiemy, można $f_{|A \cap X^+}$ przedłużyć na X^+, a otrzymane

[5] Kolorem niebieskim oznaczono materiał uzupełniający, pominięty na wykładzie.

przekształcenie zbioru $(X^+ \cup A) \cap X^-$ przedłużyć na X^-, by łącznie otrzymać szukane przedłużenie na zbiór $X^+ \cup X^- = X$.

Ad c). Niech dane będzie przekształcenie $f : K \setminus B \to \mathbb{R}^n_*$. Sfera $S := \mathrm{Fr}(B)$ jest homeomorficzna z S^{n-1}, więc można skorzystać z b), by $f_{|S\cap K}$ przedłużyć do przekszałcenia $g : S \to \mathbb{R}^n_*$. Następnie, obieramy punkt $y \in B \setminus K$ i retrakcję $r : \overline{B} \setminus \{y\} \to S$, patrz przykład 2b) w §1, a żądane przedłużenie $\overline{f} : K \to \mathbb{R}^n_*$ określamy wzorem $\overline{f}(x) = f(x)$ dla $x \in K \setminus B$ i $\overline{f}(x) = g(r(x))$ dla $x \in K \cap \overline{B}$. (Wynik jest ten sam na $K \cap S$.) $\boxminus$

Dowód twierdzenia 2. Jeśli zbiór $\mathbb{R}^n \setminus A$ jest niespójny, to istnieje jego ograniczona składowa U. Jak wiemy, dla $q \in U$ przekształcenie $i_A - q : A \to \mathbb{R}^n_*$ jest istotne.

Odwrotnie, niech istnieje istotne przekształcenie $f : A \to \mathbb{R}^n_*$. Obierzmy kulę domkniętą $\overline{B}$ zawierającą A; wówczas f nie przedłuża się na $\overline{B}$ (dlaczego?), więc wobec zadania 1 istnieje taki zbiór zwarty $K \supset A$, że f przedłuża się na każdy zawierający A zbiór zwarty $K' \subsetneq K$, lecz nie na K. Ze zwartości K wynika, że zbiór $K \setminus A$ jest domknięty w $\mathbb{R}^n \setminus A$ i różny od $\mathbb{R}^n \setminus A$. Do wykazania niespójności $\mathbb{R}^n \setminus A$ pozostaje więc dowieść, że zbiór $K \setminus A$ jest zarazem otwarty w $\mathbb{R}^n \setminus A$ (bo jest on niepusty).

W tym celu rozpatrzmy dowolny punkt $p \in K \setminus A$, i niech $B' \neq \emptyset$ będzie otwartą kulą wokół p, rozłączną z A. Z własności zbioru K wynika, że f przedłuża się do przekształcenia $g : K \setminus B' \to \mathbb{R}^n_*$, które to g nie przedłuża się jednak na K. Z lematu 1c) wynika więc, że $B' \subset K$. Wraz z dowolnością $p \in K \setminus A$, kończy to dowod otwartości zbioru $K \setminus A$ i twierdzenia 2. $\square$

Zadanie uzupełniające 1. Niech $A \subset X$ będą zbiorami zwartymi w $\mathbb{R}^n$. Dowieść, że jeśli zbiór $X \setminus A$ ma puste wnętrze w $\mathbb{R}^n$, to każde przekształcenie A w $\mathbb{R}^n_*$ przedłuża się do przekształcenia z X w $\mathbb{R}^n_*$. (Wskazówka: lemat 1 c).)

Zadanie uzupełniające 2. Dowieść, że jeśli przekształcenie $f : [-1,1]^n \to \mathbb{R}^n$ przeprowadza każde dwie przeciwległe ściany kostki $[-1,1]^n$ na dwa zbiory rozłączne, to zbiór $f([-1,1]^n)$ ma niepuste wnętrze w $\mathbb{R}^n$. (Wskazówka: przypuścić, że wnętrze jest puste i przyjąć $g = (g_i)_{i=1}^n : f(\partial[-1,1]^n) \to \mathbb{R}^n$, gdzie „funkcje Urysohna" $g_i : f(\partial[-1,1]^n) \to \mathbb{R}$ są takie, że $g_i f(\{x : x_i = -1\}) = \{-1\}$ i $g_i f(\{x : x_i = 1\}) = \{1\}$; w oparciu o poprzednie zadanie przedłużyć g do $\overline{g} : f([-1,1]^n) \to \mathbb{R}^n_*$ i zauważyć, że $\overline{g} \circ f$ zaprzecza twierdzeniu Mirandy–Poincaré'go. Rozumowanie to i teza zadania pochodzą z pracy prof. W. Kulpy.)

§ 3. Własnosci pętli na płaszczyźnie

1. Zespolona funkcja wykładnicza i podnoszenie przekształceń (przypomnienie z Top. I).

Płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ utożsamiać będziemy ze zbiorem $\mathbb{C}$ liczb zespolonych, rozpatrywanym jako ciało względem naturalnych działań i opatrzonym metryką $(z_1, z_2) \mapsto |z_1 - z_2|$ i wyznaczoną przez nią topologią euklidesową. Przyjmujemy $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oraz

$$E(x + y\mathbf{i}) := e^x(\cos y + \mathbf{i}\sin y) \quad \text{dla} \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Funkcja $E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest ciągła i taka, że (niżej, $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ i $x, y \in \mathbb{R}$):
i) $E(0) = 1$, $E(z_1 + z_2) = E(z_1) \cdot E(z_2)$ i $E(-z) = 1/E(z)$;
ii) $E(\mathbb{C}) = \mathbb{C}_*$;
iii) $E^{-1}(1) = 2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}$, skąd $E(z_1) = E(z_2) \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in 2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}$ (na podstawie i));
iv) gdy $E(x+\mathbf{i}y) = z$, to $x = \ln|z|$, a y jest argumentem liczby z (jednym z wielu).

Definicja. Mówimy, że przekształcenie $\widetilde{f} : X \to \mathbb{C}$ jest **podniesieniem** (względem E) przekształcenia $f : X \to \mathbb{C}_*$, jeśli $E \circ \widetilde{f} = f$. (Podkreślmy, że $\widetilde{f}$ ma być ciągłe.)

Uwaga 1. W Analizie Zespolonej, funkcja E oznaczana jest przez exp i nazywana **wykładniczą**; zaś $\widetilde{f}$ nazywane jest **gałęzią logarytmu** przekształcenia f.

Uwaga 2. a) Gdy $\widetilde{f}$ jest podniesieniem przekształcenia f, to $\mathrm{Im}(\widetilde{f}(x))$ jest dla każdego $x \in X$ argumentem liczby $f(x)$, czyli jedną z miar kąta $\angle(1, 0, f(x))$; patrz iv). Istnienie $\widetilde{f}$ jest równoważne możliwości ciągłego, względem x, wyboru tych miar (dlaczego?)

b) Gdy przestrzeń X jest spójna, to każde dwa podniesienia u, v tego samego przekształcenia $f : X \to \mathbb{C}_*$ różnią się o całkowitą wielokrotność liczby $2\pi\mathbf{i}$ (tzn. $u - v = 2\pi\mathbf{i}n$ dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$). Istotnie, zbiór $(u - v)(X)$ jest zawarty w $2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}$, patrz iii), a przy tym jest spójny –więc jest jednopunktowy.

Uwaga 3. Przekształcenie $f : X \to \mathbb{C}_*$, mające podniesienie, jest nieistotne w $\mathbb{C}_*$. (Wynika to ze ściagalności $\mathbb{C}$ i części b) i c) zadania ze str.1.) Zasadnicze dla nas jest poniższe twierdzenie i wniosek z niego, pozwalający na odwrócenie tej obserwacji:

Twierdzenie 1. *Niech przekształcenia $f, g : X \to \mathbb{C}_*$ będą homotopijne (w $\mathbb{C}_*$). Jeśli f ma podniesienie, to g też je ma.*

Wniosek 1. *Każde nieistotne przekształcenie $f : X \to \mathbb{C}_*$ ma podniesienie. (Gdy więc przestrzeń X jest ściągalna, np. $X = I$, to każde przekształcenie z X w $\mathbb{C}_*$ ma podniesienie.)* ⊟

Twierdzenie 1 będzie udowodnione w szerszym kontekście przy omawianiu przestrzeni nakrywających; dla zwartych przestrzeni X było ono ono też udowodnione na Topologii I. Przypomnę niżej ówczesny dowód. (Na wykładzie go pominę.)

Lemat 1. *a) Istnieje przekształcenie $L : B(1, 1) \to \mathbb{C}$ takie, że $E \circ L$ jest identycznością na kole $B(1, 1) = \{z : |z - 1| < 1\}$.*

b) Niech przekształcenia ciągłe $f, g : X \to \mathbb{C}$ spełniają warunek $|f(x) - g(x)| < |f(x)|\ \forall x \in X$. Jeśli f ma podniesienie, to i g je ma.

Dowód. a) Przyjmujemy $L(z) := \ln|z| + \mathbf{i}\alpha(z)$ dla $z \in B(1,1)$, gdzie $\alpha(z) \in (-\pi, \pi)$ to argument liczby z (czyli miara w radianach zorientowanego kąta $\angle(1,0,z)$).

b) Z założenia wynika, że $f(x) \neq 0$ i $g(x)/f(x) \in B(1,1)$ dla $x \in X$. Przyjmujemy $\widetilde{g}(x) := L(g(x)/f(x)) + \widetilde{f}(x)$ dla $x \in X$, gdzie L jest przekształceniem z a) i $\widetilde{f}$ jest podniesieniem f. Z ciągłości $f, g, \widetilde{f}$ i L wynika ciągłość $\widetilde{g}$, a z własności i) funkcji E –że

$$E\widetilde{g} = EL(g/f) \cdot E(\widetilde{f}) = (g/f) \cdot f = g.$$

Dowód twierdzenia 1 dla zwartch X. Niech $H : X \times I \to \mathbb{C}_*$ będzie homotopią między f a g. Przyjmijmy $c := \operatorname{dist}(0, \operatorname{im}(H))$; jest to liczba dodatnia, bo $0 \notin \operatorname{im}(H)$ i $\operatorname{im}(H)$ jest zbiorem zwartym, jako obraz zwartej przestrzeni $X \times I$ przy ciągłym przekształceniu H. Ze zwartości X wynika istnienie liczby $n \in \mathbb{N}$ takiej, że $|H(x,t) - H(x,t')| < c$ dla wszystkich $x \in X$ i $t, t' \in [0,1]$ takich, że $|t - t'| \leq 1/n$. (Najłatwiej to uzasadnić wykorzystując jednostajną ciągłość H, gdy $\mathbb{C}$ wyposażyć w metrykę euklidesową, a $X \times I$ w metrykę $\rho((x,t),(x',t')) = d(x,x') + |t - t'|$, gdzie d to metryka przestrzeni X.) Przy $h_k(x) = H(x, k/n)$ dla $x \in X$ i $k = 0, ..., n$, otrzymujemy $|h_k - h_{k-1}| < c \leq |h_k|$ dla $k = 1, ..., n$ – co wynika stąd, że $\operatorname{im}(h_k) \subset \operatorname{im}(H) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq c\}$. A że $h_0 = f$ ma podniesienie, to na podstawie lematu mają je kolejno $h_1, ..., h_n = g$. $\square$

Przykład 1. a) Identycznościowe włożenie $i_{S^1} : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}_*$ nie ma podniesienia (inaczej: nie ma gałęzi logarytmu), bo jest istotne w $\mathbb{C}^*$ na podstawie wniosku 1b) w §1.3. Oto inny, bezpośredni argument. Przypuśćmy, że podniesieniem jest $u : S^1 \to \mathbb{C}$. Na zbiorze $S^1 \setminus \{1\}$ podniesienie (obciętego) przekształcenia i_{S^1} można zadać wzorem $\cos t + \mathbf{i} \sin t \mapsto \mathbf{i}t$. Na podstawie uwagi 2b) zachodziłaby więc tożsamość $u(\cos t + \mathbf{i}\sin t) = \mathbf{i}t + c$ dla $t \in (0, 2\pi)$, gdzie c jest stałą. Biorąc granice przy $t \to 0$ i $t \to 2\pi$ stwierdzamy, że nie istniałaby granica $\lim_{z \to 1} u(z)$, wbrew założonej ciągłości u.

b) Zastąpmy S^1 spiralą $X = \{t(\cos t + \mathbf{i}\sin t) : t > 0\}$. Mimo, że spirala ta „okrąża zero", to podniesienie włożenia $i_X : X \hookrightarrow \mathbb{C}_*$ istnieje i można je zadać wzorem $t(\cos t + \mathbf{i}\sin t) \mapsto \ln t + \mathbf{i}t$.

Zadanie 1. Niech zbiór $A \subset \mathbb{C}_*$ będzie zwarty. Na to, by istniała gałąź logarytmu włożenia $i_A : A \hookrightarrow \mathbb{C}_*$ potrzeba i wystarcza, by 0 należało do nieograniczonej składowej zbioru $\mathbb{C} \setminus A$. (Wskazówka: twierdzenie Borsuka 1b) w §2.2.)

Zadanie uzupełniające 1. Niech zwarta przestrzeń metryczna X będzie sumą dwóch swych domkniętych podzbiorów A i B, mających spójne przecięcie $A \cap B$. Udowodnić, że przekształcenie $f : X \to \mathbb{C}_*$, którego oba obcięcia $f_{|A}$ i $f_{|B}$ są nieistotne, samo jest nieistotne. (Jest to **lemat Eilenberga**. Wskazówka: wziąć podniesienia funkcji $f_{|A}$ i $f_{|B}$ i dodając stałą do jednego z nich, uzyskać zgodność na $A \cap B$.)

Zadanie uzupełniające 2. a) Niech przestrzeń X będzie zwarta. Dowieść, że przekształcenia $f, g : X \to \mathbb{C}_*$ są homotopijne w $\mathbb{C}_*$ wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloraz f/g jest przekształceniem nieistotnym w $\mathbb{C}_*$.

b) Wywnioskować, że zbiór zwarty $Z \subset \mathbb{C}$ rozcina $\mathbb{C}$ między p i q wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie $f_Z := (i_Z - p)/(i_Z - q)$ jest istotne w $\mathbb{C}_*$.

c) Udowodnić **twierdzenie Janiszewskiego**: gdy $A, B \subset \mathbb{C}$ są zbiorami zwartymi o spójnym przecięciu $A \cap B$, przy czym ani A, ani B nie rozcina płaszczyzny $\mathbb{C}$ między wskazanymi punktami $p, q \in \mathbb{C} \setminus (A \cup B)$, to $A \cup B$ też nie rozcina $\mathbb{C}$ między p i q. (Wskazówka: w oparciu o lemat Eilenberga, zastosować b) przy $Z = A, B, A \cup B$, odp.)

2. Indeks ścieżki i pętli względem punktu.

Definicja. a) **Ścieżką** w przestrzeni Y nazywamy każde przekształcenie $\gamma : [a, b] \to Y$, gdzie $a < b$. Gdy $\gamma(a) = \gamma(b)$, ścieżkę nazywamy **zamkniętą**.

b) Przekształcenie $H : [a, b] \times I \to Y$ nazywamy **swobodną homotopią ścieżek zamkniętych**, jeśli $H(a, t) = H(b, t)$ dla $t \in I$. Słowo „swobodną" często pomijamy.

c) **Pętlą w** Y nazywamy każde przekształcenie $f : S^1 \to Y$.

Uwaga 1. a) Pętla $f : S^1 \to Y$ wyznacza ścieżkę zamkniętą $\gamma_f : [0, 2\pi] \to Y$, zadaną wzorem $\gamma_f(t) = f(E(\mathbf{i}t))$. I odwrotnie, zamknięta ścieżka $\gamma : [0, 2\pi] \to Y$ wyznacza wzorem $f_\gamma(E(\mathbf{i}t)) = \gamma(t)$, pętlę $f_\gamma : S^1 \to Y$. (Tu, $t \in [0, 2\pi]$. Bez trudu możnaby wszędzie $[0, 2\pi]$ zastąpić przedziałem $[0, 1]$, zmieniając t na $2\pi t$ w formułach na γ_f i f_γ.)

b) Podobnie stwierdzamy, że gdy pętle $f, g : S^1 \to Y$ są homotopijne, to odpowiadające im ścieżki γ_f i γ_g można połączyć homotopią ścieżek zamkniętych, i vice versa.

Z powyższych względów, często utożsamia się „pętle" ze „ścieżkami zamkniętymi"; tu jednak wolimy te pojęcia odróżniać. Zapytajmy: kiedy dwie pętle w $\mathbb{C}$ są homotopijne w dopełnieniu danego punktu? By to zbadać, użyjemy indeksu pętli.

Definicja. a) **Przyrostem kąta o wierzchołku** $p \in \mathbb{C}$**, wzdłuż ścieżki** $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{p\}$, oznaczanym tu $\Delta(\gamma, p)$, nazywamy liczbę $\operatorname{Im}(\widetilde{\gamma}(b) - \widetilde{\gamma}(a))$, gdzie $\widetilde{\gamma}$ jest podniesieniem ścieżki $\gamma - p : [a, b] \to \mathbb{C}_*$. (Podniesienie istnieje na podstawie wniosku 1 w p.1.)

b) **Indeksem ścieżki zamkniętej** $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ **względem punktu** $p \notin \operatorname{im}(\gamma)$, oznaczanym tu $\operatorname{ind}(\gamma, p)$, nazywamy liczbę $\frac{1}{2\pi}\Delta(\gamma, p)$.

c) **Indeksem pętli** $f : S^1 \to \mathbb{C}$ **względem punktu** $p \notin \operatorname{im}(f)$ nazywamy liczbę $\operatorname{ind}(f, p) := \operatorname{ind}(\gamma_f, p)$. (Angielska nazwa indeksu to „winding number".)

Mówiąc o indeksie pętli/ścieżki zamkniętej względem p zakładamy zawsze, że p nie leży w jej obrazie.

Uwaga 2. a) Liczba $\Delta(\gamma, p)$ zależy tylko od γ i p, a nie od użytego podniesienia. Wynika to stąd, że każde dwa podniesienia różnią się o stałą, patrz uwaga 2 w p.1.

b) Gdy ścieżka γ jest zamknięta, to $\operatorname{ind}(\gamma, p) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}(\widetilde{\gamma}(b) - \widetilde{\gamma}(a))$ i jest to liczba całkowita. Istotnie, skoro $\gamma(a) = \gamma(b)$, to $\operatorname{Im}\widetilde{\gamma}(a)$ i $\operatorname{Im}\widetilde{\gamma}(b)$ są argumentami tego samego punktu $\gamma(a)-p=\gamma(b)-p$, a też $\mathrm{Re}\widetilde{\gamma}(a)=\mathrm{Re}\widetilde{\gamma}(b)$. (Patrz równość iv).)

c) Dla ścieżek $\lambda,\mu:[a,b]\to\mathbb{C}_*$ zachodzi równość $\Delta(\lambda\cdot\mu,0)=\Delta(\lambda,0)+\Delta(\mu,0)$, bo suma $\widetilde{\lambda}+\widetilde{\mu}$ podniesień tych ścieżek jest podniesieniem ścieżki $\lambda\cdot\mu$.

Przykład 1. Dla $n\in\mathbb{Z}$ i pętli $j_n:S^1\to\mathbb{C}_*$, zadanej wzorem $j_n(z)=z^n$, zachodzi $\mathrm{ind}(j_n,0)=n$. Ścieżka $\gamma:=\gamma_{j_n}$ jest bowiem zadana wzorem $\gamma(t)=E(\mathbf{i}nt)$, a jej podniesienie – wzorem $\widetilde{\gamma}(t)=\mathbf{i}nt$ (oboma razy, $t\in[0,2\pi]$); stąd $\mathrm{ind}(j_n,0)=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\cdot 2\pi\mathbf{i}n=n$.

Twierdzenie 1. *Pętle $f,g:S^1\to\mathbb{C}\setminus\{p\}$ są homotopijne w $\mathbb{C}\setminus\{p\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{ind}(f,p)=\mathrm{ind}(g,p)$. (Tu, $p\in\mathbb{C}$ jest zadanym punktem.)*

Wersja równoważna: W $\mathbb{C}\setminus\{p\}$, homotopia ścieżek zamkniętych między ścieżkami zamkniętymi $\gamma,\lambda:[a,b]\to\mathbb{C}\setminus\{p\}$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{ind}(\gamma,p)=\mathrm{ind}(\lambda,p)$.

Dowód. Wyżej, równoważność wynika z uwagi 1b). Zajmiemy się wersją dla ścieżek, dzieląc dowód na dwie części. Możemy zakładać, że $p=0$ (inaczej dokonamy przesunięcia).

a) Niech między γ i λ istnieje homotopia $H:[a,b]\times[0,1]\to\mathbb{C}_*$ ścieżek zamkniętych. Dla $t\in[0,1]$, określmy ścieżkę zamkniętą $\mu_t:[a,b]\to\mathbb{C}_*$ wzorem $\mu_t(s)=H(s,t)$. Ponieważ $\mathrm{ind}(\mu_t,0)=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}(\widetilde{H}(b,t)-\widetilde{H}(a,t))$, gdzie $\widetilde{H}$ jest podniesieniem homotopii H, istniejącym na podstawie wniosku 1 w p.1, to funkcja $t\mapsto\mathrm{ind}(\mu_t,0)$ jest ciągła – więc stała, bo ma wartości w $\mathbb{Z}$. A że $\mu_0=\gamma$ i $\mu_1=\lambda$, to $\mathrm{ind}(\gamma,0)=\mathrm{ind}(\lambda,0)$.

b) Gdy $\mathrm{ind}(\gamma,0)=\mathrm{ind}(\lambda,0)$, to homotopię między λ i γ określimy wzorem $H(s,t)=E(t\widetilde{\lambda}(s)+(1-t)\widetilde{\gamma}(s))$, gdzie $\widetilde{\lambda}$ i $\widetilde{\gamma}$ to podniesienia ścieżek λ i γ, odpowiednio. Ciągłość H i to, że $\mathrm{im}(H)\subset\mathbb{C}_*$, są oczywiste. Pozostaje dowieść, że $H(a,t)=H(b,t)$ dla $t\in I$ (tzn. jest to homotopia ścieżek zamkniętych) – co pozostawione jest jako zadanie. ⊟

Zadanie 1. Rozwiązać to zadanie. (Gra oczywiście rolę to, że $\mathrm{ind}(\gamma,0)=\mathrm{ind}(\lambda,0)$.)

Uwaga 3. Gdy $\lambda(a)=\gamma(a)$, to wyżej można uzyskać $\widetilde{\lambda}(a)=\widetilde{\gamma}(a)$ (wystarczy do $\widetilde{\lambda}$ dodać stałą $\widetilde{\gamma}(a)-\widetilde{\lambda}(a)\in 2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}$). Otrzymana homotopia H jest wówczas stała na $\{a\}\times I$. Obserwację tę wykorzystamy omawiając tzw. *grupę podstawową* okręgu S^1.

Zakończmy uwagami dotyczącymi dalszych własności przyrostu kąta.

Uwaga 4. a) Dla ścieżki $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ i $s\in(a,b)$, $p\notin\mathrm{im}(\gamma)$, zachodzi
$$\Delta(\gamma,p)=\Delta(\gamma_{|[a,s]},p)+\Delta(\gamma_{|[s,b]},p).$$

b) Złóżmy ścieżkę $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}\setminus\{p\}$ z przekształceniem $\varphi:[a_1,b_1]\to[a,b]$, otrzymując ścieżkę $\gamma_1:=\gamma\circ\varphi$. (Tu $a<b$ i $a_1<b_1$.) Jeśli $\varphi(a_1)=a$ i $\varphi(b_1)=b$, to zajdzie równość $\Delta(\gamma_1,p)=\Delta(\gamma,p)$. Istotnie, jeśli $\widetilde{\gamma}$ jest podniesieniem ścieżki $\gamma-p$, to $\widetilde{\gamma}_1:=\widetilde{\gamma}\circ\varphi$ jest podniesieniem ścieżki γ_1-p, przy czym $\widetilde{\gamma}_1(b_1)=\widetilde{\gamma}(b)$ i $\widetilde{\gamma}_1(a)=\widetilde{\gamma}(a)$.

Natomiast jeśli $\varphi(a_1)=b$ i $\varphi(b_1)=a$, to otrzymamy $\Delta(\gamma_1,p)=-\Delta(\gamma,p)$. W szczególności, $\Delta(\gamma^{\leftarrow},p)=-\Delta(\gamma,p)$, gdzie $\gamma^{\leftarrow}$ to **ścieżka przeciwna do** γ, zdefiniowana jako $\gamma\circ\varphi$, przy φ oznaczającym odbicie odcinka $[a,b]$ w jego środku.

c) Dla pętli $f:S^1\to\mathbb{C}$ i $z_0\in S^1$, wzór $f_1(z)=f(z_0z)$ zadaje taką pętlę f_1, że $f_1(1)=f(z_0)$ i $\mathrm{ind}(f_1,p)=\mathrm{ind}(f,p)$ dla $p\notin\mathrm{im}(f)=\mathrm{im}(f_1)$. (Wynika to z tw.1 lub z a).)

d) Dla ścieżek $\lambda : [a,b] \to Y$ i $\mu : [c,d] \to Y$ takich, że $\lambda(b) = \mu(c)$, wzór
$\nu(t) = \lambda(a + 2t(b-a))$ dla $t \in [0, \frac{1}{2}]$ i $\nu(t) = \mu(c + (2t-1)(d-c))$ dla $t \in [\frac{1}{2}, 1]$,
określa ścieżkę $\nu : [0,1] \to Y$, którą nazwiemy **konkatenacją** lub **sklejeniem** ścieżek λ i μ i oznaczymy $\lambda \star \mu$. Z a) i b) wynika, że gdy $Y = \mathbb{C}$ i $p \notin \mathrm{im}(\lambda) \cup \mathrm{im}(\mu)$, to

$$\Delta(\lambda \star \mu, p) = \Delta(\lambda, p) + \Delta(\mu, p) \tag{2}$$

Zadanie 2. Ścieżki $\gamma, \gamma' : [a,b] \to \mathbb{C}$ różnią się tylko na przedziale $(t_-, t_+) \subset [a,b]$. Dowieść, że $\Delta(\gamma, z) - \Delta(\gamma', z) = \Delta(\gamma_{|[t_-,t_+]} \star (\gamma'_{|[t_-,t_+]})^{\leftarrow}, z)$ dla $z \notin \mathrm{im}(\gamma) \cup \mathrm{im}(\gamma')$.

Zadanie 3. Niech $w(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + ... + c_1 z + c_0$ będzie zespolonym wielomianem stopnia $n \geq 1$. Dla $R > 0$ i $z \in S^1$ przyjmimy $\gamma_R(z) = w(R \cdot z)$.

a) Dowieść, że dla R dostatecznie dużych, pętla γ_R jest w $\mathbb{C}_*$ homotopijna z pętlą $S^1 \ni z \mapsto z^n \in \mathbb{C}_*$, mającą indeks n względem 0 (a więc istotną w $\mathbb{C}_*$).

b) Uzyskać stąd, że $w(z) = 0$ dla pewnego $z \in \mathbb{C}$.

3. Wyznaczanie indeksu ścieżki zamkniętej.

Dla pętli $f : S^1 \to \mathbb{C}$ i punktu $p \notin \mathrm{im}(f)$ będziemy niekiedy pisać $\mathrm{ind}_f(p)$ w miejsce $\mathrm{ind}(f,p)$, by móc dogodnie mówić o funkcji $\mathrm{ind}_f : \mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(f) \to \mathbb{Z}$. Tak samo, będziemy pisać $\mathrm{ind}_\gamma(p)$ w miejsce $\mathrm{ind}(\gamma, p)$, gdy γ jest ścieżką i $p \notin \mathrm{im}(\gamma)$.

Uwaga 1. a) Funkcja $p \mapsto \mathrm{ind}_f(p)$ jest stała na każdej składowej zbioru $\mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(f)$. Gdy bowiem punkty p_1, p_2 są we wspólnej składowej, to można je w niej połączyć ścieżką λ, więc $(f - \lambda(t))_{t \in I}$ jest homotopią w $\mathbb{C}_*$ między $f - p_1$ i $f - p_2$. Teza wynika więc z twierdzenia 1 w p.2 i równości $\mathrm{ind}(f, p_i) = \mathrm{ind}(f - p_i, 0)$ dla $i = 1, 2$.

b) Na składowej nieograniczonej funkcja ta jest zerowa. Istotnie, $\mathrm{ind}_f(p) = 0$ dla p leżących poza dyskiem, zawierającym $\mathrm{im}(\gamma)$ (znów na podstawie twierdzenia 1 z p.2, zastosowanego przy $g = const.$), więc pozostaje skorzystać z a).

Choć liczba $\mathrm{ind}_f(p)$ ma jasną interpretację geometryczną, to nie jest widoczne, jak wyznaczyć ją dla skomplikowanej pętli $f : S^1 \to \mathbb{C}$. Poniższy sposób umożliwia porównanie $\mathrm{ind}_f(p)$ z $\mathrm{ind}_f(q)$ przy następującym założeniu, które niżej przyjmujemy:

$$p, q \notin \mathrm{im}(f) \text{ i } f^{-1}([p,q]) = \{z\} \text{ dla pewnego } z \in S^1. \tag{*}$$

Oznaczmy dla krótkości ścieżkę γ_f przez γ. Posługując sie uwagą 4c) z p.2 możemy założyć, że $z \neq 1$, lub inaczej, że $z = \gamma(t)$ dla pewnego $t \notin \{0, 2\pi\}$.

Niech L^+ oznacza półprostą o początku w p, na której leży punkt q; zawierająca ją prosta L dzieli $\mathbb{C}$ na dwie półpłaszczyzny. Za „lewą" przyjmiemy tę z nich, która jest po lewej stronie prostej, gdy patrzeć od p do q; pozostałą nazwiemy „prawą". Ponieważ $\gamma(0) = \gamma(2\pi) \notin [p,q]$ i spełniony jest warunek (*), to istnieją liczby $t_- \in (0,t)$, $t_+ \in$

$(t, 2\pi)$ takie, że obraz $\gamma([t_-, t))$ przedziału $[t_-, t)$ (odpowiednio: obraz przedziału $(t, t_+]$) jest zawarty w jednej z tych półpłaszczyzn. Niech

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \gamma(t_-) \text{ i } \gamma(t_+) \text{ leżą w tej samej półpłaszczyźnie,} \\ -1 & \text{gdy } \gamma(t_-) \text{ leży w lewej półpłaszczyźnie, a } \gamma(t_+) \text{ w prawej,} \\ 1 & \text{gdy } \gamma(t_-) \text{ leży w prawej półpłaszczyźnie, a } \gamma(t_+) \text{ w lewej.} \end{cases}$$

Twierdzenie 1. *Przy tych oznaczeniach,* $\mathrm{ind}_\gamma(p) - \mathrm{ind}_\gamma(q) = \varepsilon$.

Dowód. Niech wpierw $\varepsilon = 1$. Możemy założyć, że t_- i t_+ są tak blisko t, by zbiór $\gamma([t_-, t_+])$ był zawarty w pasie między symetralną odcinka $[p, \gamma(t)]$ a symetralną odcinka $[\gamma(t), q]$. Oznaczmy przez λ łamaną $\lambda = [\gamma(t_-), z_-, z_+, \gamma(t_+)]$, której krawędź $[z_-, z_+]$ jest prostopadła do półprostej L^+, a dwie pozostałe są równoległe do niej, przy czym $[z_-, z_+] \cap L \subset L^+ \setminus [p, q]$. Lamaną tą parametryzujemy przedziałem $[t_-, t_+]$.

Niech γ' oznacza ścieżkę otrzymaną z γ przez zastąpienie $\gamma_{|[t_-,t_+]}$ łamaną λ. W myśl zadania 2) w p.2, dla $z = p, q$ zachodzi $\mathrm{ind}(\gamma, z) = \mathrm{ind}(\gamma', z) + \mathrm{ind}(\mu, z)$, gdzie $\mu = \gamma_{|[t_-,t_+]} \star \lambda^{\leftarrow}$. Jednak $\mathrm{ind}(\gamma', p) = \mathrm{ind}(\gamma', q)$, bo $\mathrm{im}(\gamma') \cap [p, q] = \emptyset$, oraz $\mathrm{ind}(\mu, p) = 0$, bo p leży w półpłaszczyźnie rozłącznej z $\mathrm{im}(\mu)$ (ograniczonej symetralną odcinka $[p, \gamma(s)]$. (Użyto kolejno części a) i b) uwagi 1.) Na koniec, $\mathrm{ind}(\mu, q) = -1$, bo przyrost kąta o wierzchołku q, wzdłuż μ, jest równy -2π. Stąd $\mathrm{ind}(\gamma, p) - \mathrm{ind}(\gamma, q) = 1$.

Gdy $\varepsilon = 1$, to zamieniamy p z q. Gdy zaś $\varepsilon = 0$, to wyżej $\mathrm{ind}(\mu, q) = 0$, skąd $\mathrm{ind}(\gamma, q) = \mathrm{ind}(\gamma, p)$. $\square$

4. Twierdzenie Jordana.

Zajmiemy się teraz twierdzeniem Jordana o rozcinaniu płaszczyzny przez homeomorficzne kopie okręgu S^1. Poniżej, przez „zbiór" rozumiemy podprzestrzeń przestrzeni topologicznej (na ogół płaszczyzny).

Definicja. **Krzywą Jordana** nazywamy zbiór, homeomorficzny z okręgiem S^1, zaś **łukiem** – zbiór, homeomorficzny z odcinkiem $[0, 1]$.

Twierdzenie 1. *Niech pętla $f : S^1 \to \mathbb{C}$ będzie różnowartościowa.*

a) Dopełnienie $\mathbb{C} \setminus J$ krzywej Jordana $J := \mathrm{im}(f)$ w $\mathbb{C}$ ma dokładnie dwie składowe, a J jest brzegiem każdej z nich. (Ta teza pochodzi od C. Jordana, 1887.)

b) Funkcja ind_f przyjmuje na ograniczonej składowej zbioru $\mathbb{C} \setminus J$ stałą wartość, równą 1 lub -1, a na składowej nieograniczonej – stałą wartość 0.

Dowód. Podzielimy go na części.

1) Udowodnimy wpierw, że J jest brzegiem dowolnej składowej U zbioru $\mathbb{C} \setminus J$.

Jak odnotowano w uwadze 1c) w §2.2, $\mathrm{Fr}(U) \subset J$. Pozostaje więc dowieść, że gdy $p \in J$ i G jest otoczeniem punktu p w $\mathbb{C}$, to $G \cap U \neq \emptyset$. W tym celu obierzmy tak duży łuk $L \subset J$, by $p \notin L$ i $\overline{J \setminus L} \subset G$. Wobec wniosku 1 w §2.2 istnieje ścieżka $\mu : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus L$, dla której $\mu(0) = p$ i $\mu(1) \in U$.

Niech $s_0 := \sup\{t : \mu(t) \in J\}$; wówczas $\mu(s_0) \in \overline{J \setminus L} \subset G$. Dla $s > s_0$ dostatecznie bliskiego s_0 zachodzi więc $\mu(s) \in G$, jak też $\mu(s) \in U$ – to ostatnie, ponieważ zbiór $\mu([s,1])$ jest rozłączny z J, przecina U (w punkcie $\mu(1)$) i jest spójny, jako obraz przedziału – a przez to jest zawarty w składowej U.

Odnotujmy konsekwencję tezy 1) i uwagi 1 w p.3: gdy G jest zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$ i $G \cap J \neq \emptyset$, to funkcja ind_f przyjmuje na $G \setminus J$ wszystkie wartości przyjmowane na $\mathbb{C} \setminus J$.

2) Dowiedziemy teraz obu tez przy założeniu, że J zawiera odcinek otwarty $K \neq \emptyset$.

W tym celu wokół punktu z tego odcinka zakreślmy dysk D tak mały, by był rozłączny z $J \setminus K$. Zbiór $D \setminus J$ ma dwie składowe i przecina, wobec 1), każdą składową zbioru $\mathbb{C} \setminus J$. Są więc najwyżej dwie składowe zbioru $\mathbb{C} \setminus J$. Ponadto, gdy obrać odcinek $]w_1, w_2[\subset D$ tak, by przecinał K w jednym punkcie, to na podstawie twierdzenia z p.3 otrzymamy $|\mathrm{ind}_f(w_1) - \mathrm{ind}_f(w_2)| = 1$. Stąd już wynika (p. wyżej), że ind_f przyjmuje dwie wartości, różniące się o 1; a że 0 jest jedną z nich, to pozostałą jest 1 lub -1. Stąd i z uwagi 1 w p.3 wynika zaś, że $\mathbb{C} \setminus J$ ma co najmniej (a więc dokladnie) dwie składowe.

Dodatkowe założenie, nałożone w 2), nietrudno osłabić tak: J zawiera pewien łuk klasy C^1. Wersja taka jest całkowicie wystarczająca dla zastosowań w Analizie.

Dowiedziemy jednak twierdzenia w pełnej ogólności, do czego potrzebny jest

Lemat 1. *Przy przyjętych oznaczeniach, niech J rozcina płaszczyznę między danymi punktami p i q. Wówczas* $\mathrm{ind}_f(p) \neq \mathrm{ind}_f(q)$.

Dowód. Na podstawie twierdzenia Borsuka, funkcje $i_J - p$ i $i_J - q$ nie są homotopijne w $\mathbb{C}_*$; a że $f : S^1 \to J$ jest homeomorfizmem, to ich złożenia z f też nie są homotopijne w $\mathbb{C}_*$. Złożeniami tymi są $f - p$ i $f - q$, odpowiednio. Z twierdzenia 1 w p.2 wynika więc, że $\mathrm{ind}(f - p, 0) \neq \mathrm{ind}(f - q, 0)$. Wraz z definicją funkcji ind_f, kończy to dowód. □

3) Dowiedziemy tezy w pozostałym przypadku, gdy J nie zawiera odcinka otwartego.

Przez dwa różne punkty krzywej J poprowadźmy prostą L. Skoro $J \cap L$ nie jest odcinkiem, to istnieje ograniczona składowa zbioru $L \setminus J$; niech będzie nią odcinek $]q_1, q_2[$. Przyjmijmy $\gamma = \gamma_f$ i $t_i := \gamma^{-1}(q_i)$ dla $i = 1, 2$, a γ' niech oznacza ścieżkę otrzymaną z γ przez zastąpienie $\gamma_{|[t_1,t_2]}$ odcinkiem $[q_1, q_2]$, parametryzowanym przedziałem $[t_1, t_2]$. (Zakładamy bez straty ogólności, że $t_1 < t_2$.) Zgodnie z zadaniem 2 w p.2, zachodzi $\mathrm{ind}_f(p) = \mathrm{ind}_{\gamma'}(p) + \mathrm{ind}_\mu(p)$ dla $p \notin J \cup [q_0, q_1]$, gdzie zarówno $\mathrm{im}(\gamma')$, jak i $\mathrm{im}(\mu)$ zawierają $]q_1, q_2[$ i są krzywymi Jordana. (Gra rolę to, że $]q_1, q_2[\cap J = \emptyset$.)

Wokół pewnego punktu łuku $\mathrm{im}(\gamma') \setminus [q_1, q_2]$ zatoczmy tak mały dysk D, by był rozłączny z $\mathrm{im}(\mu)$. Zgodnie z uwagą 1 w p.2 i lematem, składowych zbioru $\mathbb{C} \setminus J$ jest tyle, ile wartości przyjmuje funkcja ind_f; przy tym jak wiemy z części 1) dowodu, każda taka wartość jest przyjmowana na $D \setminus J$. Na zbiorze tym jednak, $\mathrm{ind}_f = \mathrm{ind}_{\gamma'} + \mathrm{ind}_\mu$ i funkcja ind_μ jest stała na dysku D (bo jest rozłączny z $\mathrm{im}(\mu)$ i spójny). Ponadto, $\mathrm{ind}_{\gamma'}$ przyjmuje na $D \setminus J$ dwie wartości, różniące się o 1, bo γ' spełnia założenie części 2) dowodu. To samo jest więc prawdą w odniesieniu do ind_f. A że jedną z wartości funkcji ind_f jest zero, to drugą jest 1 lub -1. $\square$

Uwaga 1. Część b) twierdzenia 2 umożliwia przyjęcie następującej definicji: różnowartościową pętlę f nazwiemy **dodatnio zorientowaną**, jeśli $\mathrm{ind}_f(p) = 1$ dla każdego (równoważnie: pewnego) punktu p ograniczonej składowej zbioru $\mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(f)$. Możliwość „zgodnego" orientowania różnowartościowych pętli jest dość subtelną własnością przestrzeni: przysługuje ona płaszczyźnie, lecz nie wstędze Möbiusa, płaszczyźnie rzutowej czy butelce Kleina. Również ta część twierdzenia Jordana, która dotyczy rozcinania, jest na ogół fałszywa dla powierzchni:

<u>Zadanie uzupełniające 1.</u> We wstędze Möbiusa i płaszczyźnie rzutowej wskazać nierozcinającą krzywą Jordana, w przypadku wstęgi różną od krzywej brzegowej.

<u>Zadanie uzupełniające 2.</u> Niech p będzie punktem krzywej Jordana J, zaś f pętlą w ograniczonej składowej zbioru $\mathbb{C} \setminus J$. Dowieść, że $\mathrm{ind}(f, p) = 0$.

5. Stopień przekształcenia okręgu (przypomnienie materiału z Topologii I).

Ponieważ $S^1 \subset \mathbb{C}_*$, to każde przekształcenie $f : S^1 \to S^1$ można traktować jako pętlę w $\mathbb{C}_*$. Jej indeks $\mathrm{ind}(f, 0)$ nazywamy **stopniem** przekształcenia f i oznaczamy $\deg(f)$.

Wniosek 1. *Niech dane będą przekształcenia $f, g : S^1 \to S^1$.*
a) Przekształcenia te są homotopijne w S^1 wtedy i tylko wtedy, gdy $\deg(f) = \deg(g)$.
b) Zachodzą równości $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$ *i* $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$.

<u>Dowód.</u> Ad a). Gdy $\deg(f) = \deg(g)$, to z twierdzenia 1 w p.2 wynika istnienie homotopii $H : S^1 \times I \to \mathbb{C}_*$ między f i g, a wzór $H' := H/|H|$ poprawnie określa homotopię w S^1 między f i g. Odwrotnie, jeśli f i g są homotopijne w S^1, co niżej oznaczamy znakiem $\sim$, to $\deg(f) = \deg(g)$ na podstawie twierdzenia 1 w p.2 i definicji stopnia.

Ad b). Niech $k := \deg(f), l := \deg(g)$ i $j_n(z) := z^n$ dla $z \in S^1$ i $n \in \mathbb{Z}$. Ponieważ $\deg(j_n) = n$, patrz przykład 1, więc $f \sim j_k$ i $g \sim j_l$, skąd $f \circ g \sim j_k \circ j_l = j_{kl}$. Zatem $\deg(f \circ g) = \deg(j_{kl}) = kl$. To dowodzi pierwszej równości w b), zaś druga jest powtórzeniem uwagi 2c) w p.2.

Zadania

1. Niech $f : S^1 \to S^1$ będzie przekształceniem. Dowieść, że:
a) Jeśli $f(-z) = f(z)$ dla wszystkich $z \in S^1$, to $\deg(f) \in 2\mathbb{Z}$. (Wskazówka: zachodzi $f(z) = g(z^2)$ dla pewnego $g : S^1 \to S^1$; skorzystać z wniosku 1b).)

b)Jeśli $f(-z) = -f(z)$ dla wszystkich $z \in S^1$, to $\deg(f) \in 2\mathbb{Z}+1$. (Jest to przypadek $n = 1$ twierdzenia Borsuka. Wskazówka: zastosować a) do pętli $z \mapsto zf(z)$.)

c) Jeśli $\deg(f) \neq 0$, to f jest „na". Wywnioskować, że gdy $\deg(f) \neq 1$, to f ma punkt stały. Oboma razy, czy założenie o $\deg(f)$ można pominąć?

2. Niech $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Dowieść, że z każdej z poniższych tez wynika następna. Dowieść też tezy i) dla $n = 1, 2$ (gdy $n = 2$ skorzystać z części b) poprzedniego zadania):

i) Gdy przekształcenie $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n_*$ jest **nieparzyste**, tzn. takie, że $f(-p) = -f(p)$ dla każdego punktu p dziedziny, to jest ono istotne (w $\mathbb{R}^n_*$).

ii) Nie istnieje nieparzyste przekształcenie z S^n w $\mathbb{R}^n_*$. (Równoważnie: gdy przekształcenie $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ jest nieparzyste, to $f(p) = 0$ dla pewnego $p \in S^n$.)

iii) Każde odwzorowanie $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ przeprowadza pewne dwa antypodyczne punkty $p, -p$ w ten sam punkt. (Wskazówka: rozpatrzeć funkcję $z \mapsto f(z) - f(-z)$.)

iv) Gdy $A_0, A_1, ..., A_n$ są zbiorami takimi, że $A_0 \cup \bigcup_{i=1}^n (A_i \cup (-A_i)) = S^n$, to $A_0 \cap (-A_0) \neq \emptyset$ lub $\overline{A_i} \cap (-A_i) \neq \emptyset$ dla pewnego $i = 1, 2, ..., n$. (Wskazówka: wziąć za p punkt dany przez iii) dla $f = (f_i)_{i=1}^n : S^n \to \mathbb{R}^n$, gdzie $f_i(x) := \mathrm{dist}(x, A_i) - \mathrm{dist}(-x, A_i)$; zauważyć, że jeśli $\overline{A_i} \cap (-A_i) = \emptyset$, to $p, -p \notin A_i \cup (-A_i)$.)

v) Gdy sferę S^n pokryć $n + 1$ zbiorami, z których każdy jest domknięty lub otwarty w S^n, to któryś z nich zawiera dwa antypodyczne punkty.

(O prawdziwości tych tez orzekają twierdzenia Borsuka–Ulama i Lusternika–Schnirelmanna.)

3. Dowieść, że z tezy v) wynika ii), a z ii) wynika i). (Wskazówka: $\mathbb{R}^n_*$ można pokryć $n+1$ zbiorami domkniętymi, z których żaden nie zawiera dwóch antypodycznych punktów.)

4. Niech $f : S^1 \to S^1$ będzie przekształceniem.

a) Dowieść, że jeśli f jest nieistotne, to $f(p) = f(-p)$ dla pewnego $p \in S^1$. (Wskazówka: rozpatrzeć podniesienie f, skorzystać z powyższej tezy iii) dla $n = 1$.)

b) Dowieść tego samego, gdy $\deg(f) \in 2\mathbb{Z}$. (Wskazówka: rozpatrzeć $z \mapsto f(z)z^{-n}$, gdzie $n = \deg(f)$.) Co gdy $\deg(f) \in 2\mathbb{Z} + 1$?

5. * Udowodnić, że teza ii) w zadaniu **2** jest równoważna każdej z poniższych:

vi) gdy $p_1, ..., p_n \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_{n+1}]$ są wielomianami jednorodnymi tego samego nieparzystego stopnia (łącznego), to pewien punkt przestrzeni $\mathbb{R}^n_*$ jest ich wspólnym zerem.

vii) gdy każdy z wielomianów $p_1, ..., p_n \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_{n+1}]$ jest sumą jednomianów nieparzystych stopni, to pewien punkt sfery S^n jest ich wspólnym zerem.

Wskazówki: a) Do vi)⇒vii): wykorzysta/ to, że wielomian $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$ jest na S^n stale równy 1. b) Do vii)⇒ ii): nieparzystą funkcję ciągłą $f : S^n \to \mathbb{R}$ można ε–aproksymować przez funkcję wielomianową $w = u + v$, gdzie u i v są sumami jednomianów stopni nieparzystych i parzystych, odpowiednio; zauważyć, że $|v(x)| < 2\varepsilon$ dla $x \in S^n$.

6. * Odszukać dowód lub udowodnić „twierdzenie o kanapkach" („Ham–Sandwich Theorem") dla $n = 3$: gdy każdy z trzech danych zbiorów mierzalnych w $\mathbb{R}^3$ ma miarę skończoną i dodatnią, to pewna płaszczyzna przepoławia każdy z nich (co do miary). Uogólnić na przypadek $n > 3$, przyjmując za prawdziwą którąś z tez zadania 2.

II Grupa podstawowa

§ 1. Wstępne własności.

1. Homotopijność relatywnie podzbiór i definicja grupy podstawowej.

Definicja. Gdy homotopia $H : X \times I \to Y$ i zbiór $X_0 \subset X$ są takie, że $H(x,t) = H(x,0)$ dla $x \in X_0$ i $t \in I$, to powiemy, że H jest **homotopią relatywnie** X_0. Jeśli przekształcenia $f, g : X \to Y$ można połączyć taką homotopią, to powiemy, są one **homotopijne relatywnie** X_0. (Oczywiście, warunkiem koniecznym na to jest, by $f_{|X_0} = g_{|X_0}$.)

Uwaga 1. a) Uzyskana relacja homotopijności relatywnie X_0 jest relacją równoważności w zbiorze wszystkich przekształceń z X w Y. (Dowód jak w zadaniu na str. 1.)

b) Gdy Y jest zbiorem wypukłym w $\mathbb{R}^n$ i przekształcenia $f, g : X \to Y$ są równe na zbiorze $X_0 \subset X$, to są homotopijne relatywnie X_0 poprzez homotopię $(tf + (1-t)g)_{t \in I}$.

Będziemy odtąd zakładać, że dziedziną każdej ścieżki jest odcinek $I = [0,1]$. W zbiorze ścieżek w przestrzeni X określona jest więc relacja homotopijności relatywnie $\partial I := \{0,1\}$ (mówimy też: **relatywnie krańce**)[6] którą oznaczymy $\sim_\partial$.

Uwaga 2. a) Jeśli $\gamma \sim_\partial \lambda$, to $f \circ \gamma \sim_\partial f \circ \lambda$ dla każdego przekształcenia $f : X \to Y$.

b) Dla każdej ścieżki γ i każdych przekształceń $\varphi, \psi : I \to I$, jeśli $\varphi(0) = \psi(0)$ i $\varphi(1) = \psi(1)$, to $\gamma \circ \varphi \sim_\partial \gamma \circ \psi$. (Wynika to z a) i uwagi 1b), przy $f = \varphi$ i $g = \psi$.)

c) W szczególności, gdy wyżej $\varphi(0) = 0$ i $\varphi(1) = 1$, to $\gamma \circ \varphi \sim_\partial \gamma$. (Bierzemy $\psi(t) = t$.) Gdy zaś $\varphi(0) = t_0 = \varphi(1)$, to $\gamma \circ \varphi \sim_\partial x_{\gamma(t_0)}$ (patrz oznaczenie niżej).

Przypomnijmy też, że w §I.3.2 zdefiniowano **konkatenację** $\gamma \star \lambda$ ścieżek $\gamma, \lambda : I \to X$ takich, że $\gamma(1) = \lambda(0)$, oraz ścieżkę $\gamma^{\leftarrow}$, **przeciwną** do danej ścieżki γ. Wygodnie jest oznaczyć przez c_x ścieżkę stale równą danemu punktowi x. Odpowiednie wzory to:

$$(\gamma \star \lambda)(s) := \gamma(2s) \text{ dla } s \in [0,1/2] \text{ i } (\gamma \star \lambda)(s) := \lambda(2s-1) \text{ dla } s \in [1/2,1];$$
$$\gamma^{\leftarrow}(s) := \gamma(1-s) \text{ oraz } c_x(s) := x \text{ dla } s \in I.$$

Klasę równoważności ścieżki $\gamma : I \to X$ względem relacji $\sim_\partial$ oznaczać będziemy przez $[\gamma]$. Dalsze własności relacji $\sim_\partial$ wypowiemy już w używając tych klas.

Uwaga 3. a) Gdy $[\gamma] = [\gamma']$, $[\lambda] = [\lambda']$ i $\gamma(1) = \lambda(0)$, to $[\gamma \star \lambda] = [\gamma' \star \lambda']$.
Istotnie, homotopią relatywnie krańce między $\gamma \star \lambda$ i $\gamma' \star \lambda'$ jest n.p. $(\mu_t \star \nu_t)_{t \in I}$, gdzie $(\mu_t)_{t \in I}$ i $(\nu_t)_{t \in I}$ to homotopie relatywnie krańce pomiędzy γ i γ' oraz λ i λ', odpowiednio.

---

[6]terminu „kraniec", w odróżnieniu od „koniec", używali S. Saks i A. Zygmund: gdy $a < b$, to ścieżka $\lambda : [a,b] \to Y$ ma dwa „krańce" $\lambda(a)$ i $\lambda(b)$, lecz jej „końcem" nazwiemy tylko $\lambda(b)$, zaś $\lambda(a)$ nazwiemy „początkiem".

(Dlaczego funkcja $(s,t) \mapsto (\mu_t \star \nu_t)(s)$ jest ciągła?)

b) Podobnie, gdy $[\gamma] = [\lambda]$, to $[\gamma^{\leftarrow}] = [\lambda^{\leftarrow}]$.

c) Gdy $\gamma(1) = \lambda(0)$ i $\lambda(1) = \mu(0)$, to $[(\gamma \star \lambda) \star \mu] = [\gamma \star (\lambda \star \mu)]$. [7]

By tego dowieść, dla każdych liczb $a < b$ oznaczmy przez $f_{a,b}$ funkcję afiniczną, wyznaczoną warunkami $f_{a,b}(a) = 0$ i $f_{a,b}(b) = 1$. Nietrudno zauważyć, że przy $a_0 = 0, a_1 = 1/2, a_2 = 3/4$ i $a_3 = 1$, ścieżka $\gamma \star (\lambda \star \mu)$ jest na $[a_0, a_1]$ równa $\gamma \circ f_{a_0,a_1}$, na $[a_1, a_2]$ jest równa $\lambda \circ f_{a_1,a_2}$, zaś na $[a_2, a_3]$ jest równa $\mu \circ f_{a_2,a_3}$. To samo pozostanie prawdą, gdy zastąpić $\gamma \star (\lambda \star \mu)$ przez $(\gamma \star \lambda) \star \mu$, zaś każdą z liczb a_i przez a'_i, gdzie $a'_0 = 0, a'_1 = 1/4, a'_2 = 1/2$ i $a'_3 = 1$. Tym samym $\gamma \star (\lambda \star \mu) = ((\gamma \star \lambda) \star \mu) \circ \varphi$, gdzie $\varphi : I \to I$ jest funkcją rosnącą, która każdy przedział $[a_i, a_{i+1}]$ afinicznie przekształca na $[a'_i, a'_{i+1}]$ (tu $i = 0, 1, 2$). Ponieważ $\varphi(0) = 0$ i $\varphi(1) = 1$, więc teza c) wynika z uwagi 2c).

d) $[c_x \star \gamma] = [\gamma] = [\gamma \star c_y]$, , gdzie $x = \gamma(0)$ i $y = \gamma(1)$.

Tym razem zauważamy, że $\gamma \star c_y = \gamma \circ \mu$ dla takiej funkcji $\mu : I \to I$, że $\mu(0) = 0$ i $\mu(1) = 1$. Jak wyżej wynika stąd równość $[\gamma \star c_y] = [\gamma]$; podobnie też $[c_x \star \gamma] = [\gamma]$.

e) Przy tych oznaczeniach zachodzi też $[\gamma \star \gamma^{\leftarrow}] = [c_x]$ i $[\gamma^{\leftarrow} \star \gamma] = [c_y]$

Jest tak, bo $\gamma \star \gamma^{\leftarrow} = \gamma \circ \psi$, gdzie tym razem funkcja $\psi : I \to I$ spełnia warunki $\psi(0) = 0$ i $\psi(1) = 0$. Z uwagi 2c) wynika więc równość $[\gamma \star \gamma^{\leftarrow}] = [c_x]$; drugą uzyskujemy podobnie.

Przyjmijmy na koniec następujące definicje i oznaczenia.

a) Gdy w przestrzeni X pewien punkt x wyróżniono, to mówimy o **przestrzeni punktowanej** (X, x), a wyróżniony punkt nazywamy **bazowym** w X. Przez **przekształcenie** $f : (X, x) \to (Y, y)$ **przestrzeni punktowanych** rozumiemy przekształcenie $f : X \to Y$, przeprowadzające x na y.

b) O ścieżce $\gamma : I \to X$ mówimy, że jest **od** $\gamma(0)$ **do** $\gamma(1)$ i jest **zaczepiona** w $\gamma(0)$.

c) Przez $\Omega(X, x)$ oznaczamy zbiór wszystkich zamkniętych ścieżek $\gamma : I \to X$, zaczepionych w x – tzn. takich, że $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Przyjmujemy też

$$\pi_1(X, x) := \{[\gamma] : \gamma \in \Omega(X, x)\} = \Omega(X, x)/_{\sim_\partial} \tag{3}$$

Twierdzenie 1. *a) Poniższy wzór poprawnie określa w $\pi_1(X, x)$ „działanie mnożenia”*

$$[\gamma][\lambda] := [\gamma \star \lambda] \in \pi_1(X, x) \ \textit{dla}\ [\gamma], [\lambda] \in \pi_1(X, x). \tag{4}$$

Z mnożeniem tym, $\pi_1(X, x)$ jest grupą, której jedynką jest klasa $[c_x]$ pętli stałej c_x.

b) Przekształcenie $f : X \to Y$ wyznacza wzorem

$$f_*([\gamma]) := [f \circ \gamma] \ \textit{dla}\ [\gamma] \in \pi_1(X, x) \tag{5}$$

homomorfizm $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$. (Tu, $[\gamma]$ i $[f \circ \gamma]$ to klasy równoważności w $\Omega(X, x)$ i $\Omega(Y, f(x))$, odpowiednio.) Przyporządkowanie $f \mapsto f_*$ ma poniższe własności:

c) $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x)}$ i $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ dla przekształceń $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$.

d) Gdy przekształcenia $f, f' : X \to Y$ są homotopijne relatywnie $\{x\}$, to $f_* = f'_*$.

[7] Tę wspólną klasę będziemy czasem oznaczać $[\gamma \star \lambda \star \mu]$, mimo, że scieżka $\gamma * \lambda * \mu$ (bez nawiasów) nie jest określona.

Dowód. Ad a). Stwierdzamy kolejno, że:

i) Ponieważ dla $\gamma,\lambda\in\Omega(X,x)$ zachodzi $\gamma(1)=x=\lambda(0)$, więc pętla $\gamma\star\lambda$ jest poprawnie określona. Ponadto, zmiana γ na $\gamma'\in[\gamma]$ i zmiana λ na $\lambda'\in[\lambda]$ nie wpłynie na klasę $[\gamma\star\lambda]$ względem relacji $\sim_\partial$, tzn. zajdzie równość $[\gamma\star\lambda]=[\gamma'\star\lambda']$. (Korzystamy z uwagi 3a).) Tym samym rozważane mnożenie jest poprawnie określone w $\pi_1(X,x)$. Odtąd $\pi_1(X,x)$ rozpatrujemy zawsze z tym działaniem mnożenia.

ii) Na podstawie części c) uwagi 3, mnożenie to jest łączne; zaś na podstawie części d) i e) tejże uwagi, klasa $[c_x]$ jest jedynką w $\pi_1(X,x)$, a każda klasa $[\gamma]\in\pi_1(X,x)$ ma obustronną odwrotność (jest nią klasa $[\gamma^{\leftarrow}]$).

Ad b), c) i d). Na podstawie uwagi 2a), definicja f_* jest poprawna (wynik nie zależy od wyboru reprezentanta danej klasy). Ponadto, $(f\circ\gamma)\star(f\circ\lambda)=f\circ(\gamma\star\lambda)$, więc f_* jest homomorfizmem. Tezy c) i d) zaś wynikają wprost z definicji. $\square$

Definicja. Grupę $\pi_1(X,x)$ nazywamy **grupą podstawową** przestrzeni punktowanej (X,x).

Uwaga 4. a) Elementami tej grupy są klasy pewnych ścieżek zamkniętych, patrz (3). Można jednak każdą z tych ścieżek utożsamić z odpowiadającą jej pętlą w X, jak w uwadze 1 w §I.3.2. To prowadzi do utożsamiemia $\pi_1(X,x)$ ze zbiorem klas **pętli punktowanych** $f:(S^1,1)\to(X,x)$, względem relacji homotopijności relatywnie punkt bazowy $1\in S^1\subset\mathbb{C}$. (Jest tak, bo dwie pętle są homotopijne relatywnie $\{1\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ścieżki zamknięte są homotopijne relatywnie krańce.)

b) Przy tej interpretacji, jeśli pętla $f:(S^1,1)\to(X,x)$ przedłuża się do przekształcenia $\overline{f}:\overline{B^2}\to X$, to jej klasa $[f]$ jest elementem neutralnym w $\pi_1(X,x)$. (Homotopię między c_x i f, relatywnie 1, można zadać wzorem $(z,t)\mapsto\overline{f}(t+(1-t)z)$ dla $(z,t)\in S^1\times I$.) Implikacja odwrotna też ma miejsce, patrz zadanie d) na str. 1.

Zadanie 1. Niech istnieje (swobodna) homotopia ścieżek zamkniętych pomiędzy daną ścieżką λ a ścieżką stałą. Dowieść, że $\lambda\sim_\partial c_x$, gdzie $x=\lambda(0)$. (Wskazówka: rozumować bezpośrednio lub skorzystać z uwagi 4b).)

2. Izomorfizmy grupy podstawowej, wyznaczone przez ścieżki lub homotopijne równoważności.

W przestrzeni X niech dana będzie ścieżka ω, i niech $x=\omega(0), x'=\omega(1)$. Dla $\gamma\in\Omega(X,x)$ zachodzi $(\omega^{\leftarrow}\star\gamma)\star\omega\in\Omega(X,x')$, a klasy ścieżek $(\omega^{\leftarrow}\star\gamma)\star\omega$ i $\omega^{\leftarrow}\star(\gamma\star\omega)$ względem relacji $\sim_\partial$ są równe i zależą tylko od $[\gamma]$ i $[\omega]$. (Patrz uwaga 3a),b) w p.1; dalej z uwag z p.1 korzystać będziemy już niekoniecznie je przywołując.) Poniższy wzór określa więc funkcję $\omega_\#:\pi_1(X,x)\to\pi_1(X,x')$, zależną tylko od klasy $[\omega]$ ścieżki ω:

$$\omega_\#([\gamma]):=[(\omega^{\leftarrow}\star\gamma)\star\omega]=[\omega^{\leftarrow}\star(\gamma\star\omega)] \text{ dla } [\gamma]\in\pi_1(X,x). \tag{6}$$

Stwierdzenie 1. *a) $\omega_\#$ jest homomorfizmem grup, tzn. $\omega_\#([\gamma_1][\gamma_2])=\omega_\#([\gamma_1])\omega_\#([\gamma_2])$ i $\omega_\#([c_x])=[c_{x'}]$.*

b) Gdy ścieżka ω jest relatywnie ∂I homotopijna ze stałą, to $\omega_\#$ jest identycznością.

c) Gdy $\omega = \mu \star \nu$ dla pewnych ścieżek μ, ν, to $\omega_\# = \nu_\# \circ \mu_\#$. (W szczególności, homomorfizmy $\omega_\#$ i $(\omega^\leftarrow)_\#$ są wzajemnie odwrotne, więc $\omega_\#$ jest izomorfizmem.)

d) Dla przekształcenia $f : X \to Y$ i ścieżki $\tau = f \circ \omega$ zachodzi $f_*^1 \circ \omega_\# = \tau_\# \circ f_*^0$, gdzie f_*^i to wyznaczony przez f homomorfizm $\pi_1(X, \omega(i)) \to \pi_1(Y, \tau(i))$, dla $i = 0, 1$.

Dowód. Dla dowolnych ścieżek γ, λ, których konkatenacja $\gamma \star \lambda$ istnieje, przyjmijmy $[\gamma][\lambda] := [\gamma \star \lambda]$. Takie mnożenie $([\gamma], [\lambda]) \mapsto [\gamma][\lambda]$ pozostanie dobrze określone i łączne (jeśli istnieje któryś z iloczynów $([\gamma][\lambda])[\mu]$ i $[\gamma]([\lambda][\mu])$, to istnieją oba i są równe). Wzór (6) zapisze się więc $\omega_\#([\gamma]) = [\omega^\leftarrow][\gamma][\omega]$, zaś tezy a), b) i c) wynikną, kolejno, z łączności mnożenia i uwagi 3d),e) w p.1. Dowód d) jest pozostawiony jako ćwiczenie. $\boxminus$

Wniosek 1. *Gdy x i x' są punktami wspólnej składowej łukowej spójności przestrzeni X, to grupa $\pi_1(X, x)$ jest izomorficzna z $\pi_1(X, x')$. Za izomorfizm można obrać $\omega_\#$, dla dowolnej ścieżki ω od x do x'. (Izomorfizm może zależeć od ω.)*

Dla łukowo spójnej przestrzeni $X \neq \emptyset$, gdy mowa o grupie $\pi_1(X, x)$ tylko z dokładnością do izomorfizmu, możemy ją więc oznaczać przez $\pi_1(X)$, zaniedbując punkt bazowy x.

Następnym naszym celem jest dowód następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1. *Gdy $f : X \to Y$ jest homotopijną rownoważnością i $x \in X$, to $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ jest izomorfizmem grup.*

Wyżej, przekształcenie $f : X \to Y$ nazywamy **homotopijną równoważnością**, jeśli dla pewnego przekształcenia $g : Y \to X$ (nazywanego **homotopijną odwrotnością** dla f) złożenia $g \circ f$ i $f \circ g$ są homotopijne z id_X i id_Y, odpowiednio.

W dowodzie twierdzenia 1 wykorzystamy

Lemat 1. *Niech $\tau(t) = \varphi_t(0)$ dla $t \in I$, gdzie $(\varphi_t : I \to Y)_{t \in I}$ jest swobodną homotopią ścieżek zamkniętych. Wówczas $[\varphi_1] = \tau_\#([\varphi_0])$ (równoważnie: $\varphi_1 \sim_\partial (\tau^\leftarrow \star \varphi_0) \star \tau$).*

Dowód. Oznaczmy przez $\gamma, \lambda, \mu, \nu$ ścieżki w kwadracie I^2, odpowiadające parametryzacji jego boków: dla $s \in I$ przyjmujemy $\gamma(s) = (0, s), \lambda(s) = (s, 1), \mu(s) = (s, 0)$ i $\nu(s) = (1, s)$. Ścieżki λ i $(\gamma^\leftarrow \star \mu) \star \nu$ są homotopijne relatywnie ∂I w I^2 przy pomocy homotopii odcinkowej (gra rolę wypukłość I^2). Składając tę homotopię z przekształceniem $H : I^2 \to X$, wyznaczonym wzorem $H(s, t) = \varphi_t(s)$, wnosimy, że $\varphi_1 \sim_\partial (\tau^\leftarrow \star \varphi_0) \star \tau$. (Wykorzystano to, że $H \circ \gamma = \tau = H \circ \nu$, $H \circ \lambda = \varphi_1$ i $H \circ \mu = \varphi_0$.) $\square$

Wniosek 2. *Niech $(h_t : X \to Y)_{t \in I}$ będzie homotopią, niech $x \in X$ i $\tau(t) := h_t(x)$ dla $t \in I$. Wówczas $(h_1)_* = \tau_\# \circ (h_0)_*$, gdzie $(h_i)_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, h_i(x))$ to homomorfizm indukowany przez h_i, dla $i = 0, 1$.*

Dowód. Dla dowolnej ścieżki $\gamma \in \Omega(X, x)$ otrzymujemy homotopię $(h_t \circ \gamma)_{t \in I}$ ścieżek zamkniętych pomiędzy $h_0 \circ \gamma$ i $h_1 \circ \gamma$, taką, że $(h_t \circ \gamma)(0) = \tau(t)$ dla $t \in I$ (Gra rolę to, że $\gamma(0) = x$.) Z lematu 1 wynika więc, że $[h_1 \circ \gamma] = \tau_\#([h_0 \circ \gamma])$. ⊟

Dowód twierdzenia Przy oznaczeniach twierdzenia, niech $g : Y \to X$ będzie homotopijną odwrotnością dla f. Stosując wniosek 2 do homotopii łączącej id_X z $g \circ f$ wnosimy, że funkcja $(g \circ f)_*$ jest bijekcją $\pi_1(X, x)$ na $\pi_1(X, gf(x))$ (bo jest równa $\omega_\#$ dla pewnej ścieżki ω od x do $gf(x)$; gra rolę stwierdzenie 1c) i to, że $(\mathrm{id}_X)_*$ jest identycznością). A że $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, to wynika stąd, że $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ jest 1-1.

Gdy zamienić wyżej rolami (f, X, x) z $(g, Y, f(x))$ to stwierdzimy, że $g_* : \pi_1(Y, f(x)) \to \pi_1(X, gf(x))$ też jest 1-1. Stąd i z bijektywności $g_* \circ f_*$ wynika, że f_* jest bijekcją –co kończy dowód, bo f_* jest zarazem homomorfizmem; patrz twierdzenie 1 w p.1. □

Na koniec tego punktu sformułujemy trzy użyteczne zadania.

Zadanie 1. a) Niech ścieżki ω, ν mają wspólny początek x_0 i wspólny koniec x_1. Wówczas izomorfizmy $\omega_\#, \nu_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ różnią się o automorfizm wewnętrzny: $\nu_\# = \omega_\# \circ z$, gdzie z jest operacją sprzęgania w grupie $\pi_1(X, x_0)$ przez odpowiedni element $[\lambda]$ tej grupy, tzn. $z([\gamma]) = [\lambda][\gamma][\lambda]^{-1}$ dla wszystkich $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$.

b) * Gdy elementy $[\lambda], [\mu]$ grupy $\pi_1(X, x_0)$ są w niej sprzężone, to ścieżki λ i μ można połączyć homotopią ścieżek zamkniętych.

Zadanie 2. Przy oznaczeniach stwierdzenia 1d) wywnioskować, że jądrem homomorfizmu f^1_* jest obraz, przy $\omega_\#$, jądra homomorfizmu f^0_*. Sformułować zależność między obrazami f^0_* i f^1_* i dowieść jej.

Zadanie 3. * Dane są przekształcenia $f : X \to Y$ oraz $g, h : Y \to X$. Dowieść, że:

a) Jeśli $f \circ g$ i $h \circ f$ są homotopijne z id_Y i id_X, odpowiednio, to f jest homotopijną równoważnością. (Wskazówka: homotopijną odwrotnością okazuje się być $h \circ f \circ g$.)

b) Tak samo jest, jeśli $f \circ g$ i $h \circ f$ są homotopijnymi równoważnościami.

3. Wyznaczenie grupy podstawowej – pierwsze przykłady.

Uzupełnijmy teraz stosowane dotąd nazewnictwo i oznaczenia.

* Powiemy, że przestrzenie X i Y są **homotopijnie równoważne**, jeśli istnieje homotopijna równoważność $f : X \to Y$. Oznaczamy to $X \sim Y$.

* Retrakcję $r : X \to X$ nazywamy **retrakcją deformacyjną**, jeśli jest w X homotopijna z identycznością id_X; gdy homotopię można obrać tak, by składała się z przekształceń, które na $r(X)$ są identycznością, nazywamy ją **silną retrakcją deformacyjną**. O obrazie $r(X)$ takiej retrakcji powiemy, że jest **retraktem deformacyjnym** (odp. **silnym retraktem deformacyjnym**) przestrzeni X.

* Element neutralny grupy podstawowej niekiedy oznaczamy przez 0, choć grupa ta

może być nieprzemienna. (Odpowiedni przykład poznamy w §2.3.) Podobnie, piszemy $\lambda \sim_\partial 0$ gdy ścieżka λ jest relatywnie ∂I homotopijna ze stałą.

Uwaga 1. a) Relacja homotopijnej równoważności przestrzeni jest symetryczna, zwrotna i przechodnia. (Dlaczego?)

b) Niech $X_0 \subseteq X$. Gdy X_0 jest retraktem deformacyjnym przestrzeni X, to włożenie X_0 w X jest homotopijną równoważnością, i vice versa.

Przykład 1. a) Każda przestrzeń ściągalna jest homotopijnie rownoważna punktowi. (Nie jest jednak prawdą, że każdy punkt przestrzeni ściągalnej jest jej silnym retraktem deformacyjnym; patrz zadanie domowe 13.)

b) Sfera S^{n-1} jest silnym retraktem deformacyjnym przestrzeni $\mathbb{R}^n_*$, skąd $\mathbb{R}^n_* \sim S^{n-1}$. (Żądaną retrakcją $\mathbb{R}^n_*$ na S^{n-1} jest $x \mapsto x/\|x\|$; jak łączymy ją w $\mathbb{R}^n_*$ homotopią z $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n_*}$?)

Z twierdzenia 1 w p.2 wynika (patrz też zadanie domowe ....):

Wniosek 1. *Przestrzeń X, homotopijnie równoważna łukowo spójnej przestrzeni Y, też jest łukowo spójna, a grupy $\pi_1(X)$ i $\pi_1(Y)$ są izomorficzne.* $\boxminus$

W szczególności, grupa podstawowa przestrzeni ściągalnej jest trywialna (czyli równa $\{0\}$). Przestrzenie łukowo spójne, mające trywialną grupę podstawową, nazywane są **jednospójnymi**. Są to te przestrzenie łukowo spójne X, dla których każde przekształcenie $f : S^1 \to X$ ma ciągłe przedłużenie $\overline{f} : \overline{B^2} \to X$; patrz uwaga 4 w p.1. Sfera S^n jest dla $n \geq 2$ przykładem przestrzeni jednospójnej, lecz nieściągalnej:

Twierdzenie 1. *Dla $n \geq 2$ zachodzi $\pi_1(S^n) = \{0\}$. (Por. wniosek 1 w §I.1.3.)*

Dowód. Zamiast sfery S^n rozpatrzymy homotopijnie jej równoważną przestrzeń $\mathbb{R}^{n+1}_*$. Ustalmy pętlę $f : S^1 \to \mathbb{R}^{n+1}_*$. Na mocy twierdzenia Tietzego–Urysohna, f przedłuża się do $g : \overline{B^2} \to \mathbb{R}^{n+1}$ – jednak wartości g są w $\mathbb{R}^{n+1}$, a nie w $\mathbb{R}^{n+1}_*$. Możemy dalej użyć lematu 1a) w §I.2.3, by znaleźć takie przekształcenie $u : \overline{B^2} \to \mathbb{R}^{n+1}$, że $0 \notin \mathrm{im}(u)$ i $d_{\sup}(u, g) < \mathrm{dist}(f(S^1), 0)$ – jednak choć $\mathrm{im}(u) \subset \mathbb{R}^{n+1}_*$, to niekoniecznie $u_{|S^1} = f$.

Tym niemniej, u zaświadcza o nieistotności (w $\mathbb{R}^n_*$) przekształcenia $u_0 := u_{|S^1}$; a że $d(u_0(x), f(x)) < d(f(x), 0)$ dla $x \in S^1$, to homotopia „odcinkowa" pomiedzy f i u_0 przyjmuje wartości w $\mathbb{R}^n_*$. Tym samym i f jest nieistotne w $\mathbb{R}^n_*$. $\square$

Przykładem przestrzeni niejednospójnej, choć łukowo spójnej, jest okrąg:

Twierdzenie 2. $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, *a izomorfizm $u : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ może być zadany formułą $u([\lambda]) = \mathrm{ind}(\lambda, 0)$. (Inny zapis, to $u([\lambda]) := \deg(\lambda)$.)*

Dowód. Na podstawie twierdzenia 1 w §I.3.3 i uwagi 3 po nim, dla ścieżek $\lambda, \lambda' \in \Omega(S^1, 1)$ zachodzi $\lambda' \sim_\partial \lambda \Leftrightarrow (\mathrm{ind}(\lambda, 0) = \mathrm{ind}(\lambda', 0))$. Wartość $u([\lambda])$ jest więc poprawnie określona (wynik nie zależy od wyboru reprezentanta klasy $[\lambda]$), a przekształcenie u jest różnowartościowe. Jest ono też homomorfizmem, na podstawie równości (2) w §I.3.2, i jest „na" na podstawie przykładu 1 w §I.3.3. $\square$

Twierdzenie 3. *Dla przestrzeni punktowanych (X_1, x_1) i (X_2, x_2), grupa $\pi_1(X_1 \times X_2, (x_1, x_2))$ jest izomorficzna z iloczynem prostym grup $\pi_1(X_1, x_1)$ i $\pi_1(X_2, x_2)$.*

Przypomnijmy, że **iloczyn prosty** grup G_1 i G_2 to zbiór $G_1 \times G_2$, wyposażony w działanie grupowe $(g_1, g_2)(g_1', g_2') := (g_1 g_1', g_2 g_2')$. (Oznaczany jest on też $G_1 \oplus G_2$ gdy grupy G_1 i G_2 są abelowe.)

Dowód twierdzenia nie przedstawia trudności, bo każda ścieżka $\lambda \in \Omega(X_1 \times X_2, (x_1, x_2))$ jest postaci $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, gdzie $\lambda_i \in \Omega(X_i, x_i)$ dla $i = 1, 2$. Pozostaje tylko zauważyć, że przy tej reprezentacji zachodzi $\lambda \sim_\partial \lambda' \Leftrightarrow (\lambda_i \sim_\partial \lambda_i'$ dla $i = 1, 2)$. $\boxminus$

Wniosek 2. *Grupą podstawową torusa $S^1 \times S^1$ jest $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Ogólniej, $\pi_1((S^1)^n) = \mathbb{Z}^n$.*

§ 2. Twierdzenie Seiferta i van Kampena.

1. Sformułowanie twierdzenia.

Niech dany będzie diagram $G_1 \xleftarrow{u_1} G_0 \xrightarrow{u_2} G_2$, gdzie G_0, G_1, G_2 są grupami, a u_1 i u_2 ich homomorfizmami. Jego **wypchnięciem** (ang. **pushout**) nazwiemy przemienny diagram

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{u_1} & G_1 \\ {\scriptstyle u_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v_1} \\ G_2 & \xrightarrow{v_2} & G \end{array} \tag{7}$$

w którym G jest grupą, a v_1 i v_2 homomorfizmami grup, i który ma następującą **własność uniwersalności**: dla każdej grupy H i homomorfizmów $w_n : G_n \to H$ $(n = 1, 2)$ spełniających warunek $w_1 \circ u_1 = w_2 \circ u_2$, istnieje jedyny taki homomorfizm $w : G \to H$, że $w \circ v_1 = w_1$ i $w \circ v_2 = w_2$. Schematycznie, definicję tę obrazuje przemienny diagram:

(Jeszcze nie umiem zapisać w TeXu) (8)

O diagramie (7) z własnością uniwersalności mówimy też, że jest **diagramem wypchnięcia**, pomijając nazwanie „diagramu wypychanego” (zawsze utworzonego z pary strzałek, wychodzących z tego samego obiektu, w tym przypadku z G_0).

Mówi się też, że to grupa G (a nie diagram (7)) jest wypchnięciem wyjściowego diagramu $G_1 \xleftarrow{u_1} G_0 \xrightarrow{u_2} G_2$, a też, że G to **iloczyn wolny grup G_1 i G_2 z amalgamacją nad G_0, względem homomorfizmów $u_1 : G_0 \to G_1$ i $u_2 : G_0 \to G_2$.** Często stosowany skrócony zapis, to $G = G_1 *_{G_0} G_2$, gdzie homomorfizmy u_1, u_2 uważane są za znane. Gdy $G_0 = \{1\}$, to w oznaczeniu $G_1 *_{G_0} G_2$ znak $*_{G_0}$ zastępowany jest przez $*$, a grupę $G_1 * G_2$ nazywa się **iloczynem wolnym** grup G_1 i G_2.

Uwaga 1. Jeśli istnieje wypchnięcie (7) diagramu $G_1 \xleftarrow{u_1} G_0 \xrightarrow{u_2} G_2$, to jest ono wyznaczone jednoznacznie, z dokładnością do zastąpienia grupy G przez izomorficzną z nią grupę G', zaś homomorfizmów v_1 i v_2 przez ich złożenia ze wspólnym izomorfizmem $G \to G'$.

Istotnie, niech prócz diagramu (7) dany będzie inny diagram, z v_1, v_2, G zmienionymi odpowiednio na v_1', v_2', G', przy czym oba są wypchnięciem wspólnego diagramu $G_1 \xleftarrow{u_1} G_0 \xrightarrow{u_2} G_2$. Z uniwersalności diagramu (7) wynika istnienie takiego homomorfizmu $h : G \to G'$, że $h \circ v_1 = v_1'$ i $h \circ v_2 = v_2'$. Tak samo, istnieje homomorfizm $h' : G' \to G$, dla którego $h' \circ v_1' = v_1$ i $h' \circ v_2' = v_2$. Gdy teraz w diagramie (8) przyjmiemy $H := G$, $w_1 := v_1, w_2 := v_2$, to zauważamy, że będziemy mogli za w przyjąć każdy z homomorfizmów id_G i $h' \circ h$. Z jedyności w wynika więc, że $h' \circ h = \mathrm{id}_G$. Tak samo $h \circ h' = \mathrm{id}_{G'}$, wobec czego h jest izomorfizmem.

Twierdzenie 1 (H. Seifert (1931), E. R. van Kampen (1933)). *Niech przestrzeń $X = X_1 \cup X_2$ będzie sumą swych otwartych podzbiorów X_1 i X_2, takich, że każdy ze zbiorów X_1, X_2 i $X_0 := X_1 \cap X_2$ jest łukowo spójny. Oznaczmy przekształcenia inkluzji $X_0 \hookrightarrow X_n$ i $X_n \hookrightarrow X$ przez i_n i j_n, odpowiednio ($n = 1, 2$). Wówczas, dla każdego punktu bazowego $x \in X_0$, indukowany diagram grup podstawowych i ich homomorfizmów:*

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X_0, x) \arrow[r, "i_{1*}"] \arrow[d, "i_{2*}"'] & \pi_1(X_1, x) \arrow[d, "j_{1*}"'] \\ \pi_1(X_2, x) \arrow[r, "j_{2*}"] & \pi_1(X, x) \end{tikzcd} \tag{9}$$

jest diagramem wypchnięcia.

Dowód twierdzenia będzie w p.6 i w §III.4.2; obecnie uważamy je za dowiedzione.

2. Prezentacje grup i klasyczne sformułowanie twierdzenia Seiferta i van Kampena.

Dla podzbioru S grupy G oznaczmy przez $\langle S \rangle$ najmniejszą podgrupę grupy G, zawierającą S. Można ją opisać dwojako: a) jako część wspólną wszystkich podgrup grupy G, zawierających S, oraz b) jako zbiór wszystkich skończonych iloczynów elementów zbioru $S \cup S^{-1}$, gdzie $S^{-1} := \{s^{-1} : s \in S\}$. Każdy z tych iloczynów można zapisać w **postaci zredukowanej** jako $s_1^{i_1} s_2^{i_2} ... s_k^{i_k}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, s_1, ..., s_k \in S \backslash \{1_G\}, i_1, ..., i_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ i $s_j \neq s_{j+1}$ dla $j = 1, ..., k-1$. (Może jednak być $s_1 = s_3$ itp.!) Dla $k = 0$, iloczyn nazywamy **pustym**, a za jego wartość przyjmujemy 1_G.

Jeśli $\langle S \rangle = G$, to S nazywamy **zbiorem generującym** grupę G. Każda grupa G zawiera zbiór generujący ją, jest nim n.p. G. Zbiór generujący grupę nazywany jest też jej **zbiorem generatorów** – choć jest to nieco mylące, bo rzadko się zdarza, by jakikolwiek jego element był generatorem grupy.

Gdy $\langle S \rangle = G$ i każdy zredukowany iloczyn $s_1^{i_1} s_2^{i_2} ... s_k^{i_k}$ elementów zbioru S, poza pustym, jest różny od 1_G, to mówimy, że zbiór S generuje grupę G w sposób **wolny** lub (znów niezbyt precyzyjnie) że jest to jej **zbiór wolnych generatorów**. Grupę, generowaną w sposób wolny przez jakiś jej podzbiór, nazywamy **wolną**. Zasadnicze jest:

Twierdzenie 1. *Niech dany będzie zbiór S (rozpatrywany bez żadnej struktury algebraicznej). Wówczas istnieje grupa $F(S) \supset S$, generowana przez S w sposób wolny.*

Bardzo łatwo jest podać szkic dowodu tego twierdzenia. Rozpatrujemy zbiór wszystkich **słów zredukowanych w alfabecie** S, z których każde jest słowem pustym lub wyrażeniem postaci $s_1^{i_1}s_2^{i_2}...s_k^{i_k}$, dla pewnych (zależnych od tego „słowa") liczb $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, s_1, ..., s_k \in S$ i $i_1, ..., i_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, takich, że $s_j \neq s_{j+1}$ dla $j = 1, ..., k-1$. Iloczyn $\mathbf{st}$ słów $\mathbf{s} = s_1^{i_1}s_2^{i_2}...s_k^{i_k}$ i $\mathbf{t} = t_1^{j_1}t_2^{j_2}...t_l^{j_l}$ znajdujemy wypisując słowo $\mathbf{t}$ po słowie $\mathbf{s}$ i wykonując redukcje – czyli usuwając wszystkie podsłowa $s^n s^{-n}$ oraz zastępując podsłowa $s^k s^l$ przez s^{k+l} gdy $k + l \neq 0$. Jest widoczne, że słowo puste (tzn. dla $k = 0$) jest elementem neutralnym, a $\mathbf{s}$ ma odwrotność, którą jest $s_k^{-i_k}s_{k-1}^{-i_{k-1}}...s_1^{-i_1}$; jednak poprawność tej definicji nie jest oczywista (potencjalnie, wynik redukcji może nie być jednoznaczny), podobnie jak łączność mnożenia. Szczegóły więc pominę, przyjmując dla wygody, że są znane z zajęć z Algebry. (Być może, uzupełnię to w „Dodatku" do tego paragrafu.)

Oznaczenie. Gdy H jest grupą i $R \subset H$, to $\langle\langle R\rangle\rangle$ oznacza najmniejszy dzielnik normalny w H, zawierający R. (Jest widoczne, że $\langle\langle R\rangle\rangle = \langle\{h^{-1}rh : h \in H, r \in R\}\rangle$.)

Zadania. (Rozwiązywane na ćwiczeniach.) Dowieść, że:

1. Gdy grupa G będzie generowana w sposób wolny przez zbiór S, to:

a) Każdy element grupy jednoznacznie przedstawia się jako zredukowany iloczyn elementów zbioru S.

b) Dla każdej grupy H i każdej funkcji $f : S \to H$, istnieje jedyny homomorfizm $\overline{f} : G \to H$ taki, że $\overline{f}_{|S} = f$. (Jest to **własność uniwersalności grupy** G **względem zbioru** S **jej wolnych generatorów**.)

c) Przy oznaczeniach z b), jeśli funkcja f jest różnowartościowa i zbiór $f(S)$ generuje grupę H w sposób wolny, to $\overline{f}$ jest izomorfizmem grup.

2. a) Dla każdej grupy G i jej podzbiorów A i B, grupa $G/\langle\langle A \cup B\rangle\rangle$ jest izomorficzna z $(G/\langle\langle A\rangle\rangle)/\langle\langle p(B)\rangle\rangle$, gdzie $p : G \to G/\langle\langle A\rangle\rangle$ jest rzutowaniem ilorazowym.

b) Jeśli w diagramie wypchnięcia (7) zachodzi $G_2 = \{1\}$, to v_1 jest epimorfizmem i $\ker(v_1) = \langle\langle u_1(G_0)\rangle\rangle$. W szczególności, jeśli dodatkowo $G_0 = \langle s\rangle$, to $\ker(v_1) = \langle\langle u_1(s)\rangle\rangle$, w tym v_1 jest izomorfizmem jeśli (dodatkowo) $G_0 = \{1\}$.

Dowolną grupę G można dogodnie „prezentować" przy pomocy grup wolnych. Gdy bowiem S jest (dowolnym) zbiorem generującym G, to zanurzenie $S \hookrightarrow G$ można przedłużyć do homomorfizmu $f : F(S) \to G$, siłą rzeczy surjektywnego (bo $\operatorname{im}(f) \supset S$). Grupa G jest więc izomorficzna z grupą ilorazową $F(S)/N$, gdzie $N := \ker(f)$. Dzielnik normalny N grupy $F(S)$ możemy zaś wskazać, podając zbiór R taki, że $N = \langle\langle R\rangle\rangle$. (Mówimy o R, że **generuje** N **jako dzielnik normalny**).

Definicja. a) **Prezentacją** grupy G nazywamy każdą parę $\langle S|R\rangle$, gdzie $R \subset F(S)$

i grupa ilorazowa $F(S)/\langle\langle R\rangle\rangle$ jest izomorficzna z G. Elementy zbioru R nazywamy **relatorami**. Zwyczajowo, relator postaci ab^{-1} można też zapisać jako **relację** $a = b$.

b) Izomorficzność dwóch grup oznaczamy przez $\cong$.

Przykład 1. a) $\mathbb{Z} \cong \langle s|\emptyset\rangle$.

b) $\mathbb{Z}_n \cong \langle s|s^n\rangle$ (wolno też pisać $s^n = 1$ w miejsce s^n).

c) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \cong \langle s,t|st = ts\rangle$ (a wolno też pisać $sts^{-1}t^{-1}$ w miejsce $st = ts$).

d) $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_l \cong \langle s,t|st = ts, s^k = 1, t^l = 1\rangle$ (inaczej: $\mathbb{Z}_k\times\mathbb{Z}_l \cong \langle s,t|sts^{-1}t^{-1}, s^k, t^l\rangle$).

Twierdzenie 2. *Wypchnięcie (7) diagramu* $G_1 \xleftarrow{u_1} G_0 \xrightarrow{u_2} G_2$ *zawsze istnieje. Ponadto, jeśli dane są prezentacje* $\langle S_1|R_1\rangle$ *grupy* G_1 *i* $\langle S_2|R_2\rangle$ *grupy* G_2*, jak też zbiór* S_0 *generujący grupę* G_0*, to* G *ma prezentację* [8] $\langle S_1 \sqcup S_2|R_1 \cup R_2 \cup \{u_1(s) = u_2(s)\}_{s\in S_0}\rangle$.

Wyżej, każdą relację $u_1(s) = u_2(s)$, gdzie $s \in S_0$, należy rozumieć jako $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$, przy $\mathbf{t}_i \in F(S_i) \subset F(S_1 \sqcup S_2)$ będącym pewnym (dogodnie obranym) elementem zbioru $u_i(s) \subset F(S_i)$. (Dla uproszczenia opisu zakładam, że grupy G_i i $F(S_i)/\langle\langle R_i\rangle\rangle$ nie tylko są izomorficzne, ale wręcz równe; wówczas $u_i(s)$ jest podzbiorem $F(S_i)$ –ściślej, jest warstwą w $F(S_i)$ względem $\langle\langle R_i\rangle\rangle$, co teraz nie gra roli.)

Uwaga 1. W twierdzeniu 2 zawsze można wziąć $S_0 = G_0$, być może kosztem uzyskania mniej zrozumiałej prezentacji grupy G.

Przykład 2. Gdy $G_i \cong \langle S_i|R_i\rangle$ dla $i = 1, 2$, to $G_1 * G_2 \cong \langle S_1 \sqcup S_2|R_1 \cup R_2\rangle$; w szczególności, $F(S_1) * F(S_2) \cong F(S_1 \sqcup S_2)$. Wynika to wprost z twierdzenia 2, przy $S_0 = \emptyset$.

Wobec twierdzenia 2, z twierdzenia 1 w p.1 wynika:

Wniosek 1 (wersja klasyczna tw. Seiferta - van Kampena)**.** *Przy oznaczeniach i założeniach twierdzenia 1 z p.1, niech* S_0 *będzie zbiorem generatorów grupy* $\pi_1(X_0, x)$*, zaś* $\langle S_1|R_1\rangle$ *i* $\langle S_2|R_2\rangle$ *będą prezentacjami grup* $\pi_1(X_1, x)$ *i* $\pi_1(X_2, x)$*, odpowiednio. Wówczas grupa* $\pi_1(X, x)$ *ma prezentację* $\langle S_1 \sqcup S_2|R_1 \cup R_2 \cup \{i_{1*}(s) = i_{2*}(s)\}_{s\in S_0}\rangle$.

3. Zastosowania twierdzenia Seiferta – van Kampena.

Wniosek 1. *Niech przestrzeń* X *będzie sumą swych jednospójnych podzbiorów otwartych* U_1 *i* U_2*, takich, że zbiór* $U_1 \cap U_2$ *jest łukowo spójny. Wówczas* X *jest przestrzenią jednospójną.*

Dowód. Obierzmy punkt bazowy $x \in U_0 := U_1 \cap U_2$. Z twierdzenia Seiferta–van Kampena wynika, że $\pi_1(X, x)$ jest wypchnięciem diagramu $\{1\}\longleftarrow\pi_1(U_0, x)\longrightarrow\{1\}$ – którym jest grupa $\{1\}$, bo przy $G_1 = G_2 = \{1\}$ można w (7) przyjąć $G = \{1\}$. $\square$

Uwaga 1. a) Przy $U_1 = \{x \in S^n : x_{n+1} > -1/2\}$ i $U_2 = \{x \in S^{n+1} : x_{n+1} < 1/2\}$, uzyskujemy z twierdzenia 1 jednospójność sfery S^n $(n > 1)$, dowiedzioną już w §1.3.

[8] symbol $\sqcup$ oznacza **sumę rozłączną**, zdefiniowaną dla dowolnych zbiorów A, B tak: $A \sqcup B = A' \cup B'$, gdzie A' i B' są „rozłącznymi kopiami" zbiorów A i B, odpowiednio, np. $A' := A \times \{1\}$, $B' := B \times \{2\}$. Podobnie definiujemy $\bigsqcup_{i=1}^n A_i$.

b) Bardziej ogólnie, zawieszenie ΣX dowolnej przestrzeni łukowo spójnej X jest jednospójne. (**Zawieszenie** ΣX jest zdefiniowane jako suma dwóch stożków nad X, zlepionych podstawami, gdzie **stożkiem nad** X nazywamy przestrzeń $X \times [0,1]/X \times \{1\}$; co jest **podstawą** należy się domyślić. Inaczej: $\Sigma X = (X \times [-1,1])/\{X \times \{-1\}, X \times \{1\}\}$.)

W stosowaniu twierdzenia Seiferta – van Kampena pewien kłopot sprawia założenie otwartości zbiorów X_1 i X_2. Postarajmy się zmienić je na dogodniejsze.

Twierdzenie 1. *Tezy twierdzenia Seiferta – van Kampena z p.1 i wniosku 1 z p.2 pozostaną słuszne, gdy założenie otwartości zbiorów X_1 i X_2 zmienić tak: zbiory te są domknięte, a zbiór $X_0 := X_1 \cap X_2$ jest silnym deformacyjnym retraktem pewnego swego otwartego otoczenia U. (Nadal, $X = X_1 \cup X_2$ i zbiory X_0, X_1, X_2 są łukowo spójne.)*

Dowód. Przyjmijmy $X'_n := X_n \cup U$ dla $n = 0, 1, 2$. Ponieważ zbiór U jest łukowo spójny (jego silnym retraktem deformacyjnym jest łukowo spójny zbiór X_0), to zbiory X'_n są łukowo spójne. Są one też otwarte, bo $X'_0 = U$, a dla $n = 1, 2$ zbiór $X \setminus X'_n = X_{3-n} \setminus U$ jest domknięty. Na koniec, wymieniona w założeniu retrakcja $r_0 : U \to X_0$ wyznacza silną deformacyjną retrakcję $r_n : X'_n \to X_n$. (Dla $n \neq 0$ jest ona identycznością na X_n, zaś równa r_0 na zbiorze $X_{3-n} \cap X'_n$, domkniętym w X'_n. Jak utworzyć homotopię $X'_n \times I \to X'_n$ pomiędzy r_n i $\mathrm{id}_{X'_n}$?) Identycznościowe włożenia $X_n \hookrightarrow X'_n$ indukują więc izomorfizmy $\pi_1(X_n, x) \to \pi_1(X'_n, x)$. Stosując twierdzenie Seiferta – van Kampena do trójki (X, X'_1, X'_2), uzyskujemy tezę. $\boxminus$

Definicja. **Bukietem** rodziny przestrzeni punktowanych (X_i, x_i), gdzie $i = 1, ..., n$, nazywamy przestrzeń $X = (\bigsqcup_{i=1}^n X_i)/A$, gdzie $A := \{x_i\}_{i=1}^n$. Punkt x, będący obrazem zbioru A, przyjmujemy za bazowy. Piszemy $(X, x) = \vee_{i=1}^n (X_i, x_i)$ lub $X = \vee_{i=1}^n (X_i, x_i)$ lub $X = \vee_{i=1}^n X_i$ (gdy nie zależy nam na wskazaniu punktów bazowych).

Wniosek 2. *Grupa podstawowa bukietu n okręgów jest grupą wolną o n generatorach. W szczególności, grupa ta jest nieprzemienna dla $n > 1$.*

Dowód. Dla $n = 1$, teza została udowodniona w §1.3. Niech więc $n \geq 2$ i teza będzie udowodniona przy n zastąpionym przez $n-1$. Bazowy punkt x bukietu ma otoczenie otwarte U, będące bukietem n łuków otwartych. (Uzyskujemy je usuwając z każdego okręgu S^1_i punkt różny od x.) Tym samym $\{x\}$ jest silnie deformacyjnym retraktem U. Założenia twierdzenie 1 są więc spełnione przy $X_1 = \vee_{i=1}^{n-1} S^1_i$ i $X_2 = S^1_n$, przy czym $\pi_1(X_1) \cong F(S_1)$ i $\pi_1(X_2) \cong F(S_2)$, gdzie S_1 i S_2 są zbiorami mocy $n-1$ i 1, odpowiednio. Żądana teza wynika teraz z twierdzenia 1 i przykładu 2 w p.2. $\square$

Uwaga 2. Z powyższego dowodu wynika też, że za zbiór n wolnych generatorów grupy $\pi_1(\vee_{i=1}^n S^1_i)$ można wziąć $\{[\lambda_i]\}_{i=1}^n$, gdzie λ_i to ścieżka, odpowiadająca jednokrotnemu obiegowi i–tego okręgu S^1_i, zaczepiona w wierzchołku bukietu.

<u>Definicja.</u> (może być znana zajęć z Topologii 1): Gdy dane jest przekształcenie $f : A \to Y$, określone na domkniętej podprzestrzeni A przestrzeni X, to przez $X \cup_f Y$ oznaczamy przestrzeń ilorazową $X \sqcup Y/_\sim$, gdzie $\sim$ jest relacją, której klasami równoważności są wszystkie zbiory $\{b\} \sqcup f^{-1}(b)$, dla $b \in f(A)$, oraz wszystkie zbiory jednopunktowe $\{z\}$, dla $z \in (X \sqcup Y) \setminus (A \sqcup f(A))$. (Jest to najsłabsza spośród takich relacji równoważności na $X \sqcup Y$, że dla każdego $a \in A$ zachodzi $a \sim f(a)$.) Przestrzeń tę wyposażamy w topologię ilorazową, wyznaczoną przez rzutowanie $p : X \sqcup Y \to X \cup_f Y$, i nazywamy **przestrzenią powstałą przez doklejenie do przestrzeni Y przestrzeni X, wzdłuż przekształcenia $f : A \to Y$.**

Uwaga 3. a) Zbiory $X \setminus A$ i Y można traktować jako zanurzone topologicznie w $X \cup_f Y$, bo na każdym z nich rzutowanie p jest homeomorfizmem na swój obraz. Z definicji topologii ilorazowej wynika, że $X \setminus A$ jest w $X \cup_f Y$ zbiorem otwartym, a Y zbiorem domkniętym.

b) Na ćwiczeniach uzasadniono, że gdy A jest silnym deformacyjnym retraktem przestrzeni X, to Y jest silnym deformacyjnym retraktem przestrzeni $X \cup_f Y$.

Twierdzenie 2. *Niech $Z = \overline{B^2} \cup_f Y$, gdzie $f : S^1 \to Y$ jest przekształceniem. Wówczas dla $y := f(1)$ inkluzja $i : Y \hookrightarrow Z$ indukuje epimorfizm $i_* : \pi_1(Y, y) \to \pi_1(Z, y)$, z jądrem $\langle\langle[\lambda_f]\rangle\rangle$, gdzie λ_f to ścieżka $I \ni t \mapsto f(\exp(2\pi\mathbf{i}t)) \in Y$.*

<u>Dowód.</u> (w 4 krokach.) i) Przestrzeń Z przedstawmy tak: $Z = Z_1 \cup Z_2$, gdzie $Z_1 := (\overline{B^2} \setminus \frac{1}{2}B^2) \cup_f Y$ i $Z_2 := \frac{1}{2}\overline{B^2}$. Oczywiście, zbiór $Z_0 := Z_1 \cap Z_2 = \frac{1}{2}S^1$ jest obrazem swego otwartego otoczenia $B^2 \setminus \{0\} \subset Z$ przy silnej deformacyjnej retrakcji (np., radialnej).

ii) Możemy więc zastosować twierdzenie 1 do trójki $(Z; Z_1, Z_2)$ i punktu bazowego $z := 1/2 \in Z_1 \cap Z_2$. W otrzymanym diagramie wypchnięcia, $\pi_1(Z_2) = \{1\}$ i $\pi_1(Z_0) \cong \mathbb{Z}$, bo $Z_2 \cong \overline{B^2}$ i $Z_0 \cong S^1$. Z zadania 2b) w p.2 wynika więc, że inkluzja $k : Z_1 \hookrightarrow Z$ indukuje epimorfizm $\pi_1(Z_1, z) \to \pi_1(Z, z)$, którego jądro jest generowane (jako dzielnik normalny) przez obraz w $\pi_1(Z_1, z)$ generatora grupy $\pi_1(Z_0, z)$. Jest widoczne, że za obraz ten możemy przyjąć klasę (w $\pi_1(Z_1, z)$) ścieżki γ, zadanej wzorem $\gamma(t) = \frac{1}{2}\exp(2\pi\mathbf{i}t)$.

iii) Rozwiązaliśmy zadanie bliskie zamierzonemu, lecz pozostaje uzyskany epimorfizm zmienić na $i_* : \pi_1(Y, y) \to \pi_1(Z, y)$. Do zmiany z na y użyjemy izomorfizmu $\omega_\#$, gdzie ścieżka ω w jest obrazem w Z_1 prostoliniowego odcinka w $\overline{B^2}$ od $1/2$ do 1. Stwierdzimy (por. zadanie 2 w §1.2), że inkluzja k indukuje epimorfizm $k_* : \pi_1(Z_1, y) \to \pi_1(Z, y)$, z jądrem generowanym (jako dzielnik normalny) w $\pi_1(Z_1, y)$ przez klasę $[\omega^\leftarrow \star \gamma \star \omega]$.

iv) Na koniec zauważmy, że $i = k \circ j$, gdzie $j : (Y, y) \hookrightarrow (Z_1, y)$ oznacza inkluzję. Istnieje też silna deformacyjna retrakcja $r : Z_1 \to Y$, wyznaczona przez radialną retrakcję $\overline{B^2} \setminus \frac{1}{2}B^2 \to S^1$, więc $j_* : \pi_1(Y, y) \to \pi_1(Z_1, y)$ jest izomorfizmem i $(j_*)^{-1} = r_*$. Wynika stąd, że $i_* = k_* \circ j_*$ jest epimorfizmem z jądrem $\langle\langle r_*([\omega^\leftarrow \star \gamma \star \omega])\rangle\rangle$. Jednak $[r \circ (\omega^\leftarrow \star \gamma \star \omega)] = [(r \circ \omega)^\leftarrow \star (r \circ \gamma) \star (r \circ \omega)]$; a że $r \circ \omega$ jest ścieżką stałą i $r \circ \gamma = \lambda_f$, to uzyskujemy tezę. $\square$

Wniosek 3 (z twierdzenia 2 i zadania 2a) w p.2.). *Przy oznaczeniach jak wyżej, jeśli $\langle S|R\rangle$ jest prezentacją dla $\pi_1(Y,y)$, to $\langle S|R\cup\{[\lambda_f]\}\rangle$ jest nią dla $\pi_1(Z,y)$.* $\boxminus$

Przykład 1. Wyznaczmy grupę podstawową płaszczyzny rzutowej $\mathbb{R}P^2 = \overline{B^2}/\sim$, gdzie $(z_1 \sim z_2) \Leftrightarrow [(z_1 = z_2)$ lub $(|z_1| = 1$ i $z_2 = -z_1)]$. Nietrywialne klasy równoważności relacji $\sim$ są wszystkie zawarte w okręgu S_1, a obraz S^1 przy rzutowaniu $p : \overline{B^2} \to \mathbb{R}P^2$ jest też okręgiem, który oznaczmy przez S. Pozwala to patrzeć na $\mathbb{R}P^2$ jako na przestrzeń $\overline{B^2} \cup_f S$, gdzie $f : S^1 \to S$ jest obcięciem rzutowania p. Grupa $\pi_1(S)$ ma prezentację $\langle[\gamma]|\emptyset\rangle$, gdzie γ odpowiada jednokrotnemu obiegowi okręgu S, zaś z definicji ścieżki λ_f w twierdzeniu 2 wynika, że $\lambda_f \sim_\partial \gamma^2$. Z wniosku 1 wynika więc, że szukaną prezentacją może być $\langle[\gamma]|[\gamma]^2\rangle$; a że jest to też prezentacja grupy $\mathbb{Z}_2$, to $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$.

Twierdzenie 3. *Jeśli $Z = \overline{B^n} \cup_f Y$, gdzie $n > 2$ i $f : S^{n-1} \to Y$ jest przekształceniem, to inkluzja $i : (Y,y) \hookrightarrow (Z,y)$ indukuje dla $y \in Y$ izomorfizm $i_* : \pi_1(Y,y) \to \pi_1(Z,y)$.*

Dowód. Możemy zakładać (dlaczego?), że $\overline{B^n}$ doklejamy do tej składowej przestrzeni Y, do której należy y; w tej zaś składowej możemy punkt y zmienić na inny. Bez straty ogólności możemy więc założyć, że $y \in f(S^{n-1})$.

Dalszy dowód jest adaptacją i uproszczeniem dowodu twierdzenia 2, w którym zmieniamy B^2 na B^n. W kroku ii) zasadnicza jest obserwacja, że $\pi_1(Z_0) = \{1\}$. (Jest tak, bo $Z_0 \cong S^{n-1}$ i $n > 2$.) Stąd $\ker(k_*) = \{1\}$, więc k_* i $i_* = k_* \circ j_*$ są izomorfizmami. $\square$

Zadanie 1. a) Dla przestrzeni punktowanej (X,x) dowieść, że $\alpha, \beta \in \Omega(X,x)$ są homotopijne jako ścieżki zamknięte wtedy i tylko wtedy, gdy $[\alpha]$ i $[\beta]$ są sprzężonymi elementami grupy $\pi_1(X,x)$.

b) Dla $X = S^1 \vee S^1$ i dla $X = S^1 \times S^1$ zbadać, czy istnieją takie ścieżki $\alpha, \beta \in \Omega(X,x)$, że $[\alpha] \neq [\beta]$ i powyższe równoważne warunki są spełnione.

4. Skończone CW–kompleksy

Definicja. Przestrzeń, homeomorficzną z kulą $\overline{B^n}$ nazywać będziemy n–**komórką**. (Dla $n = 0$ jest to punkt.) Przez **zwartą CW-przestrzeń** rozumiemy przestrzeń topologiczną X, dla której istnieje taki ciąg jej podprzestrzeni $X_0 \subset X_1 \subset \ldots\ldots \subset X_j = X$, że:

(*) X_0 jest skończonym zbiorem punktów, zaś każda przestrzeń X_n, gdzie $n = 1,...,j$, jest wynikiem doklejenia skończenie wielu n–komórek $\overline{B^n_i}$ do X_{n-1}, przy czym każdą komórkę przyklejono wzdłuż pewnego przekształcenia jej brzegu.

Dopuszczamy, by dla pewnych n zbiór doklejanych n–komórek był pusty; wtedy $X_n = X_{n-1}$.

Uwaga 1. a) Można podobnie zdefiniować niezwarte CW-przestrzenie (w tym takie, dla których $j = \infty$). Odgrywają one istotną rolę, lecz tu nie będą rozważane.

b) Rodzinę $(X_n)_{n=0}^{j}$ oraz skończone rodziny komórek $\overline{B_i^n}$ i przekształceń przyklejających, spełniające powyższe warunki, nazywamy **skończonym CW–kompleksem**; wskazanie ich nazwiemy nadaniem przestrzeni X **struktury skończonego CW-kompleksu**. Będziemy też mówić, że X jest **bryłą** tego CW–kompleku.

c) Dla uproszczenia, na ogół bryła CW–kompleksu nadal nazywana bywa CW–kompleksem.

Definicja. Zbiory X_i $(i = 0, ..., j)$ nazywamy kolejnymi **szkieletami** rozważanego CW-kompleksu, a liczbę $\max\{n \leq j : X_n = X_j\}$ nazywamy jego **wymiarem**.

Przykład 1. a) Sfera S^n jest CW–przestrzenią: bierzemy $X_0 = \{p\} = X_1 = ... = X_{n-1}$ i $X_n = \overline{B^n} \cup_f \{p\}$, gdzie odwzorowanie $f : S^{n-1} \to \{p\}$ jest oczywiste.

b) Bukiet okręgów, $\vee_{i=1}^{n} S_i^1$, jest CW-przestrzenią: tym razem do $\{p\}$ doklejamy n 1-komórek, każdą przy pomocy przekształcenia zlepiającego oba jej krańce.

c) Torus $S^1 \times S^1$ jest bryłą CW–kompleksu, złożonego z jednej 0-komórki, dwóch 1-komórek (uzyskujemy więc $X^1 \cong S_1^1 \vee S_2^1$) i jednej 2–komórki $\overline{B^2}$, przyklejonej wzdłuż $f : \partial\overline{B^2} \to X_1$. By opisać f można okręgom bukietu X_1 nadać orientacje, oznaczyć je a i b i powiedzieć, że $\overline{B}^2$ przyklejono *wzdłuż słowa* $aba^{-1}b^{-1}$ (czy: *wzdłuż ścieżki* $a{\star}b{\star}a^{\leftarrow}{\star}b^{\leftarrow}$).[9]

d) Płaszczyzna rzutowa $\mathbb{R}P^2$ jest bryłą następującego CW-kompleksu: bierzemy $X_0 = \{p\}$ i $X_1 = S^1 \subset \mathbb{C}$ (jest to wynik doklejenia 1-komórki do X_0). Do X_1 doklejamy 2-komórkę $\overline{B^2}$ wzdłuż przekształcenia $\varphi_1 : S^1 \to X_1$ określonego wzorem $\varphi_1(z) = z^2$, otrzymując przestrzeń X_2, homeomorficzną z $\mathbb{R}P^2$.

e) Przypomnijmy, że $\mathbb{R}P^n := S^n/{\sim}$, gdzie $(x{\sim}y) \Leftrightarrow (x = -y)$. Przyjmijmy X_0, X_1, X_2 jak w d), zaś dla $i = 3, ..., n$ zdefiniujmy indukcyjnie $X_i = \overline{B}^i \cup_{\varphi_{i-1}} X^{i-1}$, gdzie $\varphi_{i-1} : S^{i-1} \to X_{i-1}$ to naturalne rzutowanie wyznaczone przez relację antypodyzmu. Nietrudno stwierdzić, że bryła X_n otrzymanego CW-kompleksu $X_0 \subset ... \subset X_n$ jest homeomorficzna z $\mathbb{R}P^n$.

Twierdzenie 1. *Gdy X jest bryłą skończonego CW-kompleksu, a X_2 jego 2–szkieletem, to inkluzja $i : X_2 \hookrightarrow X$ indukuje dla $x \in X_2$ izomorfizm $i_* : \pi_1(X_2, x) \to \pi_1(X, x)$.*

Dowód. Przez ponumerowanie przekształceń przyklejających otrzymujemy filtrację $X_2 = Y_1 \subset ... \subset Y_k = X$, gdzie każda przestrzeń Y_i powstaje przez przyklejenie do Y_{i-1} komórki wymiaru ≥ 3. Stosując k razy twierdzenie 3 z p.3 uzyskujemy tezę. □

Uwaga 2. a) Wynika stąd, że (z dokładnością do izomorfizmu) grupa $\pi_1(X_2, x)$ nie zależy od struktury CW–kompleksu na X, wyznaczającej szkielet X_2.

b) Grupę podstawową szkieletu X_2 możemy efektywnie wyznaczyć opierając się na wniosku 3 w p.3. Liczne przykłady omówimy na ćwiczeniach.

Twierdzenie 2. *Niech grupa G będzie* **skończenie prezentowalna**, *tzn. ma prezentację $\langle x_1, ..., x_k | r_1, ..., r_l\rangle$, gdzie $k, l < \infty$. Wówczas istnieje skończony CW-kompleks wymiaru 2, którego bryła ma grupę podstawową izomorficzną z G.*

[9] Ściśle mówiąc, należy w $a \star b \star a^{\leftarrow} \star b^{\leftarrow}$ użyć nawiasów, n.p. $((a \star b) \star a^{\leftarrow}) \star b^{\leftarrow}$.

Dowód. Tworzony CW-kompleks będzie miał jedną 0-komórkę $*$, k 1-komórek i l 2-komórek. Po przyklejeniu do $*$, 1-komórki utworzą okręgi $x_1, ..., x_k$, które orientujemy; ich suma X_1 jest bukietem okręgów. Dla każdego „relatora" r_i tworzymy 2-komórkę $\overline{B_i^2}$, którą przyklejamy do bukietu X_1 przy pomocy przekształcenia, przyklejającego brzeg tej komórki wzdłuż odpowiadającej słowu r_i ścieżki w X_1 (zawsze posyłając punkt bazowy $1 \in \overline{B^2}$ w $*$). Grupa podstawowa otrzymanego CW-kompleksu $X_2 = X$ ma tą samą prezentację $\langle x_1, ..., x_k | r_1, ..., r_l \rangle$, co G, na podstawie wniosku 3 w p.3. $\square$

Zadanie 1. Udowodnić w podobny sposób, że gdy X jest bryłą dowolnego skończonego CW–kompleksu, to grupa $\pi_1(X)$ jest skończenie prezentowalna.

5. * Zastosowanie: nierównoważność węzłów torusowych

Przestrzeń $\mathbb{R}^4$ będziemy przedstawiać jako $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, a dysk $\overline{B^2}$ jako $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$. Zbiór $\overline{B^2} \times \overline{B^2}$ jest homeomorficzny z kostką I^4, a jego brzegiem w $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ jest $S := S^1 \times \overline{B^2} \cup \overline{B^2} \times S^1$. Oczywiście, $\mathrm{Fr}(I^4) \cong S^3$, co daje przedstawienie sfery S^3 jako sumy dwóch pełnych torusów, przecinających się wzdłuż wspólnego brzegu $S^1 \times S^1$.

Dla pary (m, n) względnie pierwszych liczb naturalnych $m < n$ przyjmiemy

$$K_{m,n} := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : |z_1| = 1 \text{ i } z_1^m = z_2^n\}.$$

Zbiory te nazywane są **węzłami torusowymi** w sferze S (odnotujmy, że $K_{m,n} \subset S$). Przez wyjęcie z S punktu $p \notin K_{m,n}$, możemy też je traktować jako zanurzone w przestrzeni $E := S \setminus \{p\}$, homeomorficznej z $\mathbb{R}^3$. Każdy węzeł $K_{m,n}$ jest homeomorficzny z okręgiem: homeomorfizm $[0,1]/_{\{0,1\}}$ na $K_{m,n}$ zadaje formuła $\alpha(t) = (E(2\pi \mathbf{i} nt), E(2\pi \mathbf{i} mt))$.

Twierdzenie 1. *Grupa podstawowa przestrzeni* $S \setminus K_{m,n}$ *ma przezentację* $\langle a, b | a^m = b^n \rangle$.

Można dowieść, że gdy $(m, n) \ne (m', n')$ i $m > 1$, to $\langle a, b | a^m = b^n \rangle \not\cong \langle a, b | a^{m'} = b^{n'} \rangle$. (Szkic dowodu w „Dodatku 4" do tego rozdziału.) Odnotujmy też, że na podstawie zadania 1 w p.3 zachodzi $\pi_1(E \setminus K_{m,n}) \cong \pi_1(S \setminus K_{m,n})$. Uzyskujemy więc następujący

Wniosek 1. *W* $\mathbb{R}^3$ *istnieje nieskończenie wiele zbiorów, homeomorficznych z* S^1*, których dopełnienia do* $\mathbb{R}^3$ *są parami niehomeomorficzne (bo mają różne grupy podstawowe).*

Dowód twierdzenia 1. Zastosujemy twierdzenie 1 w p.3 do trójki (X, X_1, X_2), gdzie

$$X := S \setminus K_{m,n}\ ,\ X_1 := (S^1 \times \overline{B^2}) \setminus K_{m,n}\ ,\ X_2 := (\overline{B^2} \times S^1) \setminus K_{m,n}.$$

Wówczas $X_0 := X_1 \cap X_2 = (S^1 \times S^1) \setminus K_{m,n}$.

Dla $z_1 \in S^1$ stwierdzamy bez trudu, że zbiór $\{z : (z_1, z) \in X_0\}$ jest sumą n otwartych łuków okręgu S^1, których środki tworzą n–kąt foremny $\{z \in S^1 : z^n = -z_1^m\}$. (Wymagany jest rachunek.) Wykorzystując kanoniczne deformacyjne retrakcje łuków na ich środki stwierdzamy, że zbiór X_0 deformacyjnie retrahuje się na $T := \{(z_1, z_2) \in S : z_1^m = -z_2^n\}$. Zbiór T jest zaś okręgiem, a za generator jego grupy podstawowej można obrać $[\beta]$, gdzie $\beta(t) = (E(2\pi\mathbf{i}nt), -E(2\pi\mathbf{i}mt))$ dla $t \in I$; por. wzór na $\alpha(t)$. Tym samym $\pi_1(X_0) \cong \langle[\beta]|\emptyset\rangle$. (Pomijać będę punkty bazowe.)

Zauważmy też, że przy inkluzji $i_1 : X_0 \hookrightarrow X_1$ zachodzi $i_{1*}([\beta]) = [u]^n$, gdzie $u(t) = (E(2\pi\mathbf{i}t), 0)$ dla $t \in I$. (Istotnie, odcinkowa homotopia pomiędzy β a u przyjmuje wartości w X_1, dzięki wypukłości dysków $\{z_1\} \times \overline{B^2}$ i temu, że $K_{m,n}$ przecina je w ich brzegu.) Zaś dla inkluzji $i_2 : X_0 \hookrightarrow X_2$ zachodzi $i_{2*}([\beta]) = [v]^m$, gdzie $v(t) = (0, E(\pi\mathbf{i}(2t + \frac{1}{m}))$ dla $t \in I$. Ponieważ $\pi_1(X_1) \cong \langle[u]|\emptyset\rangle$ i $\pi_1(X_2) \cong \langle[v]|\emptyset\rangle$, to $\pi_1(X) \cong \langle[u], [v]|[u]^n = [v]^m\rangle$ – co kończy dowód. (Ale dlaczego X_0 jest silnym retraktem deformacyjnym swego otoczenia w X, jak wymagano w wykorzystanym twierdzeniu?) ⊟

6. Dowód twierdzenia Seiferta – van Kampena

Poniżej podaję dowód „klasyczny”. Jest on bardzo pouczający i wart przemyślenia, lecz dłuższy od nowszego dowodu, wykorzystującego przestrzenie nakrywające. Z powodu braku czasu, na wykładzie przypuszczalnie ograniczę się do omówienia tego nowszego (równie pouczającego) dowodu, który w notatkach przedstawię w rozdziale III.

Przyjmujemy założenia twierdzenia Seiferta i van Kampena: zbiory X_1, X_2 i $X_0 = X_1 \cap X_2$ są łukowo spójne i otwarte w przestrzeni $X = X_1 \cup X_2$, zaś $x \in X_0$.

Dowód twierdzenia (por. książkę J. Munkresa). Zgodnie z tezą twierdzenia i definicją diagramu wypchnięcia należy dowieść, że gdy G' jest grupą i homomorfizmy $w_n : \pi_1(X_n, x) \to G'$ $(n = 1, 2)$ są takie, że $w_1 \circ i_{1*} = w_2 \circ i_{2*}$, to istnieje jedyny homomorfizm $w : \pi_1(X, x) \to G'$ spełniający warunek $w_n = w \circ j_{n*}$ dla $n = 1, 2$.

Dowód podzielimy na kilka kroków. Dopuszczamy w nim, by dziedziną ścieżki mógł być dowolny przedział. Zgodnie z przyjętymi w rozdziale I definicjami, gdy dziedzinami ścieżek λ i μ są przedziały $[a, b]$ i $[c, d]$, odpowiednio, i spełniony jest warunek $\lambda(b) = \mu(c)$, to konkatenacja $\lambda \star \mu$ jest określona i jej dziedziną jest przedział $I = [0, 1]$.

1. i) Skoro $x \in X_0 = X_1 \cap X_2$ i zbiory X_0, X_1, X_2 są łukowo spójne, to każdemu punktowi $x' \in X$ można przyporządkować ścieżkę $\alpha_{x'}$ od x do x' tak, że $\alpha_{x'}(I) \subset \bigcap\{X_n : x' \in X_n, n = 1, 2\}$ i α_x jest ścieżką stałą. Przyporządkowanie to uważamy za ustalone.

ii) Nadużywając języka powiemy, że ciąg $s_0 = a < s_1 ... < s_N = b$ jest $\{X_1, X_2\}$–**podziałem ścieżki** $\lambda : [a, b] \to X$, jeśli dla każdego $i = 1, ..., N$, zbiór $\lambda([s_{i-1}, s_i])$ jest zawarty lub X_1 lub w X_2. Zasadnicze są następujące obserwacje:

(1.1) Jeśli $(s_i)_{i=0}^N$ i λ są jak wyżej, to obraz każdej ścieżki $\beta_i := (\alpha_{\lambda(s_{i-1})} \star \lambda_{|[s_{i-1}, s_i]}) \star \alpha^{\leftarrow}_{\lambda(s_i)}$ jest zawarty w X_1 lub w X_2. Uzasadnienie: gdy $\lambda([s_{i-1}, s_i]) \subset X_n$, to $\operatorname{im}(\beta_i) \subset X_n$.

(1.2) Jeśli ponadto $[a, b] = I$ i $\lambda \in \Omega(X, x)$, to $[\beta_1][\beta_2]...[\beta_N] = [\lambda]$; por. dowód stwierdzenia 1a) w §1.2. (Gra rolę to, że ścieżka α_x jest stała.)

(1.3) Jeśli długość każdego przedziału $[s_{i-1}, s_i]$ jest mniejsza, niż *liczba Lebesgue'a* otwartego pokrycia $\{\lambda^{-1}(X_1), \lambda^{-1}(X_2)\}$ przedziału $[a, b]$, to ciąg $a = s_0 < ... < s_N = b$ jest $\{X_1, X_2\}$–podziałem ścieżki $\lambda : [a, b] \to X$.

2. i) Niech $\beta \in \Omega(X, x)$ i $n \in \{0, 1, 2\}$ będą takie, że $\beta(I) \subset X_n$. Klasę ścieżki β względem homotopijności w zbiorze X_n, relatywnie ∂I, oznaczmy przez $[\beta]_n$; jest ona na ogół różna od klasy $[\beta]$ tejże ścieżki względem homotopijności w X relatywnie ∂I. Przyjmijmy $\rho(\beta) := w_n([\beta]_n)$. Mimo, iż wartość n nie jest warunkiem $\mathrm{im}(\beta) \subset X_n$ wyznaczona jednoznacznie, definicja jest poprawna, bo gdy $\mathrm{im}(\beta) \subset X_1 \cap X_2$, to $[\beta]_n = i_{n*}([\beta]_0)$ dla $n = 1, 2$, więc z założenia $w_1([\beta]_1) = w_2([\beta]_2)$.

ii) Jeśli żądany homomorfizm w istnieje, to wyżej $\rho(\beta) = w([\beta])$, bo $w_n([\beta]_n) = w([\beta])$. Wobec multypliktywności w, dla każdej klasy $[\lambda] \in \pi_1(X, x)$ zajdzie więc $w([\lambda]) = \rho(\beta_1) \cdot ... \cdot \rho(\beta_N)$, gdzie $\cdot$ oznacza mnożenie w G' i ścieżki β_i zdefiniowane są jak w (1.1), dla pewnego $\{X_1, X_2\}$–podziału ścieżki λ. Dowodzi to jedyności w. Poniżej ustalimy dalsze własności ρ, z których wyniknie istnienie w (co zakończy dowód).

3. i) Wpierw zdefiniujemy $\rho(\lambda) \in G'$ dla dowolnej ścieżki $\lambda : [a, b] \to X$. W tym celu weźmy $\{X_1, X_2\}$–podział $(s_i)_{i=1}^N$ tej ścieżki i przyjmijmy $\widetilde{\rho}(\lambda) := \rho(\beta_1) \cdot ... \cdot \rho(\beta_N)$, gdzie ścieżki β_i są jak w (1.1). Gdy podział zagęścimy, dołączając do niego punkt, to wartość iloczynu po prawej nie zmieni się. (Czy na pewno?) Przechodząc tak w skończenie wielu krokach do wspólnego podpodziału zadanych dwóch $\{X_1, X_2\}$–podziałów stwierdzamy, że wartość $\widetilde{\rho}(\lambda)$ zależy tylko od λ. Jeśli zaś $\lambda \in \Omega(X_n, x)$, gdzie $n = 1$ lub $n = 2$, to $\widetilde{\rho}(\lambda) = w_n([\lambda]_n) = \rho(\lambda)$, bo (a, b) jest $\{X_1, X_2\}$–podziałem dla λ i $[\alpha_x \star \lambda \star \alpha_x^{\leftarrow}]_n = [\lambda]_n$. (Gra rolę to, że $\alpha_x = c_x$.) Dla uproszczenia oznaczeń, będziemy więc pisać ρ w miejsce $\widetilde{\rho}$.

ii) Odnotujmy, że tak zdefiniowana funkcja $\lambda \mapsto \rho(\lambda)$ ma następujące własności:

(3.1) Gdy ścieżka λ jest stała, to $\rho(\lambda) = 1_{G'}$. (Jest to oczywiste.)

(3.2) Gdy $a < s < b$, to $\rho(\lambda) = \rho(\lambda_{|[a,s]}) \cdot \rho(\lambda_{|[s,b]})$. (To też jest poczywiste.)

(3.3) Gdy ścieżki $\lambda, \lambda' : [a, b] \to X$ są równe poza przedziałem $(s, s') \subset [a, b]$, przy czym ścieżki $\lambda_{|[s,s']}$ i $\lambda'_{|[s,s']}$ są relatywnie krańce homotopijne w X_1 lub w X_2, to $\rho(\lambda) = \rho(\lambda')$. Istotnie, wtedy $\rho(\lambda_{|[s,s']}) = \rho(\lambda'_{|[s,s']})$ (dlaczego?), więc pozostaje skorzystać z (3.2).

4. (Krok zasadniczy.) Niech teraz ścieżki $\lambda, \mu : [a, b] \to X$ będą relatywnie krańce homotopijne w X (a nie w X_1 czy w X_2, jak wyżej). Udowodnimy, że $\rho(\lambda) = \rho(\mu)$.

W tym celu obierzmy homotopię $H : [a, b] \times I \to X$ pomiędzy λ i μ, relatywnie $\{a, b\}$. Następnie, rodziną prostych $\{s = s_k\}_{k=0}^N \cup \{t = t_k\}_{k=0}^N$ podzielmy prostokąt $[a, b] \times I$ na tak drobne części, by obraz przy H każdej z nich był zawarty w X_1 lub w X_2.

Rozważmy kolejnych $N + 1$ „poziomów" homotopii H, danych wzorem $[a, b] \ni s \mapsto H(s, t_k)$, dla $k = 0, ..., N$; z nich najniższym i najwyższym są ścieżki λ i μ, odpowiednio. Cel nasz osiągniemy wykazując, że na każdych sąsiednich poziomach funkcja ρ przyjmuje tą samą wartość. Bez zmiany ogólności, ograniczymy się do poziomu najniższego, równego λ, i następnego, który oznaczymy ν.

Dla $i = 0, ..., N$ oznaczmy przez $\gamma_i : [a, b + t_1] \to \mathbb{R}^2$ scieżkę, która ze stała prędkością 1 przebiega od punktu $(a, 0)$ do (b, t_1) w zbiorze $(\{s_i\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0, t_1\})$. Gdy $i \neq 0$ jest ona równa ścieżce γ_{i-1} poza przedziałem $[s_{i-1}, s_i + t_1]$; na nim zaś obie przyjmują wartości w wypukłym zbiorze $[s_{i-1}, s_i] \times [0, t_1]$, którego obraz przy H jest zawarty w X_1 lub w X_2. Z (3.3) wynika więc, że $\rho(H \circ \gamma_i) = \rho(H \circ \gamma_{i-1})$.

Wobec dowolności i zachodzi równość $\rho(H \circ \gamma_N) = \rho(H \circ \gamma_0)$, tzn. $\rho(\lambda') = \rho(\nu')$, gdzie ścieżki $\lambda', \nu' : [a, b + t_1] \to X$ są zdefiniowane wzorami $\lambda'(s) = \lambda(s)$ dla $s \leq b$ i $\lambda'(s) = \lambda(b)$ dla $s \geq b$, oraz $\nu'(s) = \nu(0)$ dla $s \leq t_1$ i $\nu'(s) = \nu(s - t_1)$ dla $s \geq t_1$, odpowiednio. (Gra rolę to, że H jest relatywnie $\{a, b\}$.) Z (3.1) i (3.2) wynika jednak, że $\rho(\lambda') = \rho(\lambda)$, więc $\rho(\nu') = \rho(\lambda)$. Zmieniając zaś ścieżkę λ na ν, a homotopię H na $(s, t) \mapsto \nu(s)$, uzyskujemy analogiczną równość $\rho(\nu') = \rho(\nu)$. Tak więc $\rho(\lambda) = \rho(\nu)$.

5. Gdy konkatenacja $\lambda\star\mu$ ścieżek $\lambda, \mu : I \to X$ jest określona, to $\rho(\lambda\star\mu) = \rho(\lambda)\cdot\rho(\mu)$.

Dowód: Przy $y := \lambda(1)$ i c_y oznaczającym ścieżkę stałą, zachodzi $(\lambda \star \mu)_{|[0,1/2]} = (\lambda\star c_y)_{|[0,1/2]}$. Zarazem, $\rho((\lambda\star c_y)_{|[0,1/2]}) = \rho(\lambda\star c_y)$ na podstawie 3.1 i 3.2, oraz $\rho(\lambda\star c_y) = \rho(\lambda)$ na podstawie **4** i uwagi 3d) w §1.1. Zatem $\rho((\lambda \star \mu)_{|[0,1/2]}) = \rho(\lambda)$, i podobnie $\rho((\lambda \star \mu)_{|[1/2,1]}) = \rho(\mu)$. Korzystając ponownie z (3.2), uzyskujemy żądaną równość.

6. Na koniec, określmy $w : \pi_1(X, x) \to G'$ wzorem $w([\lambda]) = \rho(\lambda)$ dla $[\lambda] \in \pi_1(X, x)$. Z **4** wynika poprawność tej definicji (niezależność $w([\lambda])$ od wyboru reprezentanta klasy $[\lambda]$), a z **5** i (3.1) – że w jest homomorfizmem. Gdy zaś $\mathrm{im}(\lambda) \subset X_n$, to $w([\lambda]) = w_n([\lambda]_n)$ na podstawie **3**i), więc $w \circ j_n = w_n$ dla $n = 1, 2$. □

III Nakrycia.

§ 1. Podnoszenie homotopii i działanie monodromii

1. Definicje i twierdzenie o podnoszeniu homotopii

<u>Definicja.</u> a) Funkcję $p : \widetilde{X} \to X$ nazwiemy **nakrywającą**, jeśli jest „na" i każdy punkt $x \in X$ ma takie otwarte otoczenie U_x , że $p^{-1}(U_x)$ jest sumą rozłącznych zbiorów otwartych, z których każdy jest przez p przeprowadzany homeomorficznie na U_x. [10]

b) Powyżej, otoczenia U_x nazywamy **elementarnymi**, $\widetilde{X}$ **przestrzenią nakrywającą**, a parę $(\widetilde{X}, p)$ **nakryciem przestrzeni** X. Często $\widetilde{X}$ lub p też nazywane są nakryciem. Przestrzeń X jest **bazą** nakrycia $p : \widetilde{X} \to X$.

Uwaga 1. a) Z definicji wynika (jak?), że funkcja nakrywająca $p : \widetilde{X} \to X$ jest ciągła i otwarta, w tym jest przekształceniem ilorazowym na swój obraz. Ponadto, jeśli jedna z przestrzeni $\widetilde{X}$ i $p(X)$ jest lokalnie łukowo spójna, lub jest lokalnie spójna[11], to druga też jest taka (dlaczego?). Jednak choć z łukowej spójności $\widetilde{X}$ wynika łukowa spójność

[10] Niektórzy autorzy, n.p. [Ha], pomijają warunek $p(\widetilde{X}) = X$. Jednak gdy nie jest on spełniony, to wiemy tylko, że funkcja $p : \widetilde{X} \to p(\widetilde{X})$ jest nakrywająca w sensie powyższej definicji i zbiór $p(\widetilde{X})$ jest domknięto - otwarty w X.

[11] Warto przypomnieć, że jeśli Z jest przestrzenią lokalnie łukowo spójną, to taki też jest każdy jej obraz przy przekształceniu otwartym i każdy jej otwarty podzbiór, a ponadto każda jej składowa spójności jest zbiorem otwartym w Z i łukowo spójnym. (Będziemy z tych własności korzystać nie przywołując ich.)

X (dlaczego?), to implikacja odwrotna jest nieprawdziwa; podobnie dla spójności.

b) Każde **włókno** $p^{-1}(x)$, gdzie $x \in X$, jest przestrzenią dyskretną (w topologii indukowanej). Gdy X jest przestrzenią T_1, czyli jej jednopunktowe podzbiory są domknięte w X, to włókno $p^{-1}(x)$ nie ma punktów skupienia w X (bo jest zarazem domknięte).

c) Na każdym zbiorze elementarnym, moc włókna jest stała (bo włókno przecina w jednym punkcie każdy z otwartych podzbiorów przestrzeni $\widetilde{X}$, wymienionych w definicji zbioru elementarnego). Stąd wynika (czy tak?), że gdy X jest przestrzenią spójną, to wszystkie włókna są równoliczne, a ich moc nazywana jest **krotnością** nakrycia.

<u>Przykład 1.</u> Napotkane już przekształcenia nakrywające (inne poznamy na ćwiczeniach), to:

a) Funkcja $E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_*$ z §I.3.1 i jej obcięcie $\mathbb{R}\mathbf{i} \ni z \mapsto E(z) \in S^1$;

b) Funkcje potęgowe $\mathbb{C}_* \ni z \mapsto z^n \in \mathbb{C}_*$ i $S^1 \ni z \mapsto z^n \in S^1$, dla $n \neq 0$;

c) Rzutowanie $S^n \to \mathbb{R}P^n := S^n/\sim$, gdzie $\sim$ to relacja $x \sim -x$ dla $x \in S^n$.

Zadanie 1. Niech $p : \widetilde{X} \to X$ i $q : \widetilde{Y} \to Y$ będą nakryciami. Wówczas: a) $p \times q : \widetilde{X} \times \widetilde{Y} \to X \times Y$ jest nakryciem, b) jest nim obcięcie $p_{|p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$, dla zbioru $A \subset X$, i c) jest nim też $g \circ p \circ f : \widetilde{X}' \to X'$, dla homeomorfizmów $f : \widetilde{X}' \to \widetilde{X}$ i $g : X \to X'$. (Uwaga: gdy ma sens, $q \circ p$ może nie być nakryciem; por. jednak zad.2 w §3.3.)

<u>Definicja.</u> Przekształcenie $\widetilde{f} : Z \to \widetilde{X}$ jest **podniesieniem** funkcji $f : Z \to X$ **względem** p, jeśli $p \circ \widetilde{f} = f$. Gdy p jest wiadome, często opuszczamy zwrot „względem p”.

Już w przypadku nakrycia $p : \mathbb{R}\mathbf{i} \to S^1$ z części a) powyższego przykładu, istnieją przekształcenia w bazę, nie mające podniesienia. Jest nim np. przekształcenie identycznościowe $\mathrm{id}_{S^1} : S^1 \to S^1$: gdyby $\widetilde{f}$ było jego podniesieniem, to ze względu na ściągalność przestrzeni $\mathbb{R}$ przekształcenie $\mathrm{id}_{S^1} = p \circ \widetilde{f}$ byłoby nieistotne, wbrew wnioskowi 1 w §I.1.1.

Znaczenie nakryć zasadza się na następującym twierdzeniu (grało już rolę w §I.3.1):

Twierdzenie 1. *Niech $p : \widetilde{X} \to X$ będzie nakryciem.*

a) (Jednoznaczność podniesień.) Gdy $\widetilde{f} \neq \widetilde{f}'$ są podniesieniami tego samego przekształcenia $f : Z \to X$, a przestrzeń Z jest spójna, to $\widetilde{f}(z) \neq \widetilde{f}'(z)$ dla każdego $z \in Z$.

b) (Podnoszenie homotopii.) Gdy przekształcenia $f, g : Z \to X$ są homotopijne i $\widetilde{f}$ jest podniesieniem przekształcenia f, to istnieje podniesienie $\widetilde{g}$ przekształcenia g, homotopijne z $\widetilde{f}$. Co więcej, dla każdej homotopii $H : Z \times I \to X$ pomiędzy f i g, istnieje jedyne jej podniesienie $\widetilde{H} : Z \times I \to \widetilde{X}$ takie, że $\widetilde{H}(z, 0) = \widetilde{f}(z)$ dla $z \in Z$.

<u>Dowód.</u> Dowód obu części wykorzystuje następującą obserwację:

(*) Niech $\widetilde{U} \subset \widetilde{X}$ będzie zbiorem, dla którego $p_{|\widetilde{U}} : \widetilde{U} \to U$ jest homeomorfizmem, a $h : N \to X$ przekształceniem, którego obraz $h(N)$ jest zawarty w $p(\widetilde{U})$. Wówczas istnieje jedyna funkcja $\widetilde{h} : N \to \widetilde{U}$, dla której $p \circ \widetilde{h} = h$, i jest ona ciągła. (Jest nią $(p_{|\widetilde{U}})^{-1} \circ h$.)

<u>Dowód twierdzenia.</u> Ad a). Przyjmijmy $Z' := \{z \in Z : \widetilde{f}(z) = \widetilde{f}'(z)\}$. Wobec założonej spójności przestrzeni Z wystarczy dowieść, że zbiór Z' jest domknięty i otwarty

w Z. Domkniętość wynika z ciągłości $\widetilde{f}$ i $\widetilde{f}'$, jeśli $\widetilde{X}$ jest przestrzenią Hausdorffa. (Można się tego założenia pozbyć dowodząc otwartości $Z \setminus Z'$ jak niżej, ale dla naszych potrzeb nie warto.) Pozostaje dowieść, że Z' jest otoczeniem każdego swego punktu.

Niech więc $z \in Z'$. Punkt $\widetilde{f}(z) = \widetilde{f}'(z)$ należy do któregoś z tych otwartych zbiorów $\widetilde{U} \subset \widetilde{X}$, dla których $p_{|\widetilde{U}}$ jest homeomorfizmem $\widetilde{U}$ na pewien zbiór elementarny. Wobec ciągłości $\widetilde{f}$ i $\widetilde{f}'$, zbiór $N := \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{U}) \cap (\widetilde{f}')^{-1}(\widetilde{U})$ jest otoczeniem puntu z. Na podstawie jedyności w (*), zachodzi $\widetilde{f}_{|N} = \widetilde{f}'_{|N}$. To oznacza, iż $N \subset Z'$ i kończy dowód tezy a).

Ad b). Z tej części skorzystamy tylko w najważniejszym przypadku, gdy Z jest punktem (ten rozpatrywałem na wykładzie) lub odcinkiem. Poniżej jest dowód ogólny.

Dowiedziemy wpierw, że dla każdego punktu $z \in Z$ istnieją jego otwarte otoczenie N_z i podniesienie $\widetilde{H}_z$ homotopii $H_{|N_z \times I}$, takie, że $\widetilde{H}_z(z', 0) = \widetilde{f}(z')$ dla $z' \in N_z$.

W tym celu ustalmy z. Ponieważ zbiór $H(\{z\} \times I)$ jest pokryty otwartymi zbiorami elementarnymi, to korzystając ze zwartości odcinka I i ciągłości H możemy obrać taki podział odcinka I punktami $0 = t_0 < \ldots < t_n = 1$, że obraz, przy H, każdego zbioru $\{z\} \times [t_k, t_{k+1}]$ jest zawarty w pewnym zbiorze elementarnym U_k. Szukane otoczenie N_z i podniesienie $\widetilde{H}_z$ homotopii $H_{|N_z \times I}$ uzyskamy w n krokach, jak następuje.

Przypuśćmy, że $k \geq 0$ i znamy już otoczenie N_k punktu z i podniesienie $\widetilde{H}_k$ przekształcenia $H_{|N_k \times [0, t_k]}$; dla $k = 0$ bierzemy $N_0 = Z$ i $\widetilde{H}_0 = \widetilde{f}$. Oznaczmy przez $\widetilde{U}_k$ taki zbiór otwarty w $\widetilde{X}$, który przez p przekształcany jest homeomorficznie na U_k i zawiera $\widetilde{H}_k(z, t_k)$. Obierzmy też takie otwarte otoczenie $N_{k+1} \subset N_k$ punktu z, że $\widetilde{H}_k(N_{k+1} \times \{t_k\}) \subset \widetilde{U}_k$ i $H(N_{k+1} \times [t_k, t_{k+1}]) \subset U_k$, oraz w oparciu o (*) znajdźmy takie podniesienie $\widetilde{H}'_k$ homotopii $H_{|N_{k+1} \times [t_k, t_{k+1}]}$, że $\operatorname{im}(\widetilde{H}'_k) \subset \widetilde{U}_k$. Na $N_{k+1} \times \{t_k\}$ funkcje $\widetilde{H}_k$ i $\widetilde{H}'_k$ są równe, wobec jedyności w $(*)$ przy $U := U_k$ i $\widetilde{U} := \widetilde{U}_k$. Pozwala to określić przekształcenie $\widetilde{H}_{k+1} : N_{k+1} \times [0, t_{k+1}] \to \widetilde{X}$, równe (obcięciu) $\widetilde{H}_k$ na $N_{k+1} \times [0, t_k]$ i równe $\widetilde{H}'_k$ na $N_{k+1} \times [t_k, t_{k+1}]$. Oczywiście, $p \circ \widetilde{H}_{k+1} = H_{|N_{k+1} \times [0, t_{k+1}]}$. To kończy krok indukcyjny, zaś dla $k = n - 1$ daje szukane otoczenie $N_z := N_n$ punktu z i podniesienie $\widetilde{H}_n$ homotopii $H_{|N_z \times I}$, zgodne z $\widetilde{f}$ na $N_z \times \{0\}$.

Dysponując juz rodziną $\{(N_z, \widetilde{H}_z) : z \in Z\}$ zauważamy, że dla $z_1, z_2 \in Z$ i $z \in N_{z_1} \cap N_{z_2}$, funkcje H_{z_1} i H_{z_2} są równe na $\{z\} \times I$ (bo są równe w punkcie $(z, 0)$, wykorzystujemy a) i spójność zbioru $\{z\} \times I$). Wymieniona rodzina poprawnie wyznacza więc ciągłą (dlaczego?) funkcję $\widetilde{H} : Z \times I \to \widetilde{X}$, dla której $p \circ \widetilde{H} = H$ i $\widetilde{H}(\cdot, 0) = \widetilde{f}$. Powyższe odwołanie do a) i spójności odcinka dowodzi też jedyności takiej funkcji. $\square$

Zadanie 2. $p : \widetilde{X} \to X$ jest przekształceniem, C składową łukowej spójności w $\widetilde{X}$, i dla pewnego punktu $\widetilde{x} \in C$ każda ścieżka w X zaczepiona w $p(\widetilde{x})$ ma podniesienie względem $p_{|C}$, zaczepione w $\widetilde{x}$. Dowieść, że $p(C)$ jest składową łukowej spójności w X.

Zadanie 3. Przekształcenia $q : A \to B$ i $r : B \to C$ są takie, że $r \circ q$ jest nakryciem, przestrzeń A jest lokalnie łukowo spójna, a B jest spójna. Dowieść, że jeśli któreś z przekształceń q i r jest nakrywające, to oba są takie. (Wskazówka: zadanie 2.)

2. Zasadniczy wniosek i działanie monodromii

Wniosek 1. *Niech $p : \widetilde{X} \to X$ będzie nakryciem i niech $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$. Wówczas:*

a) Każda ścieżka w X, zaczepiona w $p(\widetilde{x})$, ma jedyne podniesienie zaczepione w $\widetilde{x}$.

b) Gdy dwie takie ścieżki λ, μ są homotopijne relatywnie ∂I, to ich opisane podniesienia $\widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu}$ też są homotopijne relatywnie ∂I. W szczególności, $\widetilde{\lambda}(1) = \widetilde{\mu}(1)$.

Dowód. Ad a). Wynika to z twierdzenia 1b), przy Z będącym zbiorem jednopunktowym.

Ad b). Niech $(H_t)_{t\in I}$ będzie homotopią w X, relatywnie ∂I, pomiędzy λ i μ. Na podstawie twierdzenia 1b), ma ona podniesienie $(\widetilde{H}_t)_{t\in I}$ spełniające warunek $\widetilde{H}_0 = \widetilde{\lambda}$. Zbiór $\{\widetilde{H}_t(0) : t \in I\}$ jest zawarty w dyskretnej przestrzeni $p^{-1}(\lambda(0))$. Jest on też spójny, jako ciągły obraz odcinka I, więc jest jednopunktowy. Podobnie, jednopunktowy jest zbiór $\{\widetilde{H}_t(1) : t \in I\}$, tzn. $(\widetilde{H}_t)_{t\in I}$ jest homotopią relatywnie ∂I. To kończy dowód, bo $\widetilde{\lambda} := \widetilde{H}_0$ i $\widetilde{\mu} := \widetilde{H}_1$) są rozważanymi w b) podniesieniami ścieżek λ i μ, odpowiednio.

Uwaga 1 (i definicja). a) Wniosek 1 umożliwia następującą ważną konstrukcję. Niech $p : \widetilde{X} \to X$ będzie nakryciem, a $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ i ścieżka $\lambda : I \to X$ będą takie, że $\lambda(0) = p(\widetilde{x})$. Wtedy λ ma jedyne podniesienie $\widetilde{\lambda}$ zaczepione w $\widetilde{x}$, a punkt $\widetilde{\lambda}(1)$ zależy tylko od $[\lambda]$ (tzn. od klasy homotopii ścieżki λ relatywnie ∂I). Punkt ten oznaczać będziemy $\widetilde{x} \cdot [\lambda]$ lub $\widetilde{x}[\lambda]$, zaś przyporządkowanie $(\widetilde{x}, [\lambda]) \mapsto \widetilde{x}[\lambda]$ nazwiemy **działaniem monodromii**. (Klasa $[\lambda]$ ścieżki $\lambda : I \to X$ „działa” na punkt $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, gdy $\lambda(0) = p(\widetilde{x})$.)

b) Z definicji wynika zasadnicza własność tego działania[12]: gdy $\widetilde{x} \in X$ i ścieżki λ, μ w X są takie, że któryś z punktów $(\widetilde{x}[\lambda])[\mu]$ i $\widetilde{x}[\lambda \star \mu]$ jest określony (tzn. $\lambda(0) = p(\widetilde{x})$ i $\lambda(1) = \mu(0)$), to oba punkty są poprawnie określone i równe: $(\widetilde{x}[\lambda])[\mu] = \widetilde{x}[\lambda \star \mu]$. Ponadto, $\widetilde{x}[c_{p(\widetilde{x})}] = \widetilde{x}$, bo podniesieniem ścieżki stałej $c_{p(\widetilde{x})}$ jest $c_{\widetilde{x}}$, a $c_{\widetilde{x}}(1) = \widetilde{x}$.

Zadanie 1. $p : \widetilde{X} \to X$ jest nakryciem, a $\widetilde{U}$ łukowo spójnym zbiorem otwartym w $\widetilde{X}$. Dowieść, że jeśli inkluzja $p(\widetilde{U}) \hookrightarrow X$ indukuje zerowy homomorfizm grupy podstawowej, to a) tak samo jest przy $p(\widetilde{U})$ zastąpionym przez $\widetilde{U}$ i X przez $\widetilde{X}$, i b) $p_{|\widetilde{U}}$ jest 1-1. (Wskazówka do b): gdy $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in C$ i $p(\widetilde{x}_1) = p(\widetilde{x}_2)$, wziąć ścieżkę $\widetilde{\gamma}$ w $\widetilde{X}$ od $\widetilde{x}_1$ do $\widetilde{x}_2$ i rozpatrzeć pętlę $p \circ \widetilde{\gamma}$.)

Zadanie 2. $p : \widetilde{X} \to X$ jest nakryciem k–krotnym. Jeśli X jest bryłą skończonego CW–kompleksu wymiaru 1, mającego j_n n–komórek dla $n = 0, 1$, to podobnie jest dla $\widetilde{X}$, przy j_n zastąpionym przez kj_n. Uogólnić na przypadek, gdy $1 \leq \dim X < \infty$.

[12] Słowo „działanie” jest tu użyte w znaczeniu szerszym, niż gdy mowa jest o „działaniu grupy na zbiorze” (co ma miejsce niżej w §2): z mnożeniem, wyznaczonym przez konkatenację, zbiór klas ścieżek nie tworzy grupy, lecz tzw. *grupoid* (nie każde dwa jego elementy można mnożyć); ponadto, nie dla każdej pary $(\widetilde{x}, [\lambda])$ istnieje $\widetilde{x}[\lambda]$.

§ 2. Nakrycia a działanie grupy

1. Działanie grupy (przypomnienie?)

Przestrzenie nakrywające niespodziewanie wiążą się z pojęciem działania grupy na zbiorze, ważnym i z innych względów.

Definicja. Niech S będzie niepustym zbiorem, a G grupą.

a) **Prawostronnym działaniem grupy** G **na** S nazywamy takie przekształcenie $S \times G \ni (s, g) \mapsto sg \in S$, że $s(gh) = (sg)h$ oraz $s1_G = s$ dla $s \in S$ i $g, h \in G$.

Dla $S' \subset S$ i $g \in G$ piszemy $S'g = \{s'g : s' \in S'\}$; podobnie, $sG' = \{sg' : g' \in G'\}$ dla $s \in S$ i $G' \subset G$, jak też $S'G' = \{s'g' : s' \in S' \text{ i } g' \in G'\}$.

b) **Orbita** punktu $s \in S$ przy tym działaniu, to zbiór $sG := \{sg : g \in G\}$. Działanie jest **tranzytywne**, jeśli $sG = S$ dla pewnego (równoważnie: każdego) punktu s.

c) **Stabilizatorem** punktu $s \in S$ nazywamy podgupę $G_s := \{g \in G : sg = s\} \leq G$.

d) Analogicznie definiujemy **działanie lewostronne**; w nim $g(hs) = (gh)s$ i $1_G s = s$. (Jakie są definicje stabilizatora i orbity przy takim działaniu?)

Uwaga 1. a) Dla $g \in G$, formuła $\varphi_g(s) := sg$ wyznacza bijekcję $\varphi_g : S \to S$ (czyli permutację zbioru S); jej odwrotnością jest $\varphi_{g^{-1}}$ i $\varphi_{gh} = \varphi_h \circ \varphi_g$. Natomiast w przypadku działania lewostronnego i definicji zmienionej na $\varphi_g(s) := gs$, zachodzi $\varphi_{gh} = \varphi_g \circ \varphi_h$.

b) Również i odwrotnie, rodzina funkcji $\{\varphi_g : S \to S\}_{g \in G}$ spełniająca warunki $\varphi_{1_G} = \mathrm{id}_S$ i $\varphi_{gh} = \varphi_g \circ \varphi_h$ dla $g, h \in G$, wyznacza wzorem $gs := \varphi_g(s)$ lewostronne działanie grupy G na S. Na działanie lewostronne można więc też patrzeć jako na homomorfizm grupy G w grupę permutacji zbioru S, zaś na prawostronne – jako na tzw. antyhomomorfizm z G w tę grupę.

c) Gdy wygodnie, działanie prawostronne $S \times G \mapsto sg \in S$ można zastąpić przez lewostronne $S \times G \mapsto g \cdot s \in S$ (i odwrotnie), przyjmując $g \cdot s = sg^{-1}$ dla $s \in S, g \in G$.

Uwaga 2. Zachodzi $G_{sg} = g^{-1} G_s g$, gdzie $gAh := \{gah : a \in A\}$ dla $A \subset G$ i $g, h \in G$. Istotnie, $h \in G_{sg} \Leftrightarrow (sgh = sg) \Leftrightarrow (sghg^{-1} = s) \Leftrightarrow ghg^{-1} \in G_s \Leftrightarrow h \in g^{-1} G_s g$.

Stwierdzenie 1. *Niech grupa G działa prawostronnie na S i niech $s \in S$.*

a) Przy G/G_s oznaczającym zbiór wszystkich prawostronnych warstw [13] *grupy G względem podgrupy G_s, wzór $G_s g \mapsto sg$ poprawnie określa bijekcję między G/G_s a orbitą sG.*

b) Dla każdego punktu $s' \in sG$, podgrupa $G_{s'}$ jest sprzężona z G_s (tzn., jest równa $g^{-1} G_s g$, dla pewnego $g \in G$). I odwrotnie, gdy podgrupa $H \leq G$ jest sprzężona z G_s, to jest stabilizatorem pewnego punktu $s' \in sG$.

Dowód. Część b) wynika bezpośrednio z uwagi 2. Opisane w a) przyporządkowanie jest dobrze określone i jest 1-1 (a też jest „na"), bo:

---

[13] Przypomnienie: prawostronną warstwą grupy G względem podgrupy $H \leq G$ nazywamy każdy zbiór Hg, gdzie $g \in G$. Zachodzi $G = \bigcup_{g \in G} Hg$ oraz $Hg \cap Hg' = \emptyset$ gdy $Hg \neq Hg'$. Tak samo jest dla warstw lewostronnych gH, przy czym warstw lewostronnych jest tyle, ile prawostronnych; tę wspólną ilość nazywamy **indeksem** podgrupy H.

$$(G_s g_1 = G_s g_2) \Leftrightarrow (g_1 g_2^{-1} \in G_s) \Leftrightarrow (s g_1 g_2^{-1} = s) \Leftrightarrow (s g_1 = s g_2). \quad \boxminus$$

2. Działanie grupy $\pi_1(X,x)$ na włóknie $p^{-1}(x)$ nakrycia $p : \widetilde{X} \to X$

Wyrazimy teraz niektóre z wyników §1 w terminach działania grupy.

Twierdzenie 1. *Niech $p : \widetilde{X} \to X$ będzie nakryciem i $x \in X$. Wówczas:*

a) Formuła $(\widetilde{x}, [\lambda]) \mapsto \widetilde{x}[\lambda]$, z uwagi w §1.2, wyznacza prawostronne działanie grupy $\Pi := \pi_1(X,x)$ na włóknie $p^{-1}(x)$.

b) Jeśli przestrzeń $\widetilde{X}$ jest łukowo spójna, opisane działanie jest tranzytywne.

c) Przy tym działaniu, stabilizatorem $\Pi_{\widetilde{x}}$ punktu $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$ jest $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$.

Dowód. Teza a) wynika z części b) uwagi w §1.2, ograniczonej do ścieżek zaczepionych w x. Jeśli przestrzeń $\widetilde{X}$ jest łukowo spójna i $\widetilde{x}, \widetilde{x}' \in p^{-1}(x)$, to istnieje ścieżka $\widetilde{\lambda}$ od $\widetilde{x}$ do $\widetilde{x}'$, skąd $\widetilde{x}' = \widetilde{x}[\lambda]$ dla $\lambda := p \circ \widetilde{\lambda} \in \Omega(X,x)$.

Ad c). Gdy $\widetilde{x}[\lambda] = \widetilde{x}$, to $\widetilde{\lambda}(1) = \widetilde{x}$, skąd $\widetilde{\lambda} \in \Omega(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ i $[\lambda] = [p \circ \widetilde{\lambda}] \in p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$. Ale i odwrotnie, gdy $[\lambda] \in p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$, to istnieje taka ścieżka $\widetilde{\mu} \in \Omega(\widetilde{X}, \widetilde{x})$, że $p \circ \widetilde{\mu} \sim_\partial \lambda = p \circ \widetilde{\lambda}$. Na podstawie wniosku 1b) w §1.2 zachodzi $\widetilde{\lambda}(1) = \widetilde{\mu}(1)$, więc $\widetilde{x}[\lambda] = \widetilde{\lambda}(1) = \widetilde{\mu}(1) = \widetilde{x}$. $\square$

Uwaga 1. Jeśli przestrzeń $\widetilde{X}$ niekoniecznie jest łukowo spójna, to orbitą punktu $\widetilde{x}$ jest $p^{-1}(x) \cap C$, gdzie C oznacza składową łukowej spójności punktu $\widetilde{x}$ względem $\widetilde{X}$. $\boxminus$

Wniosek 1 (ze stwierdzenia 1 i uwagi 2 w p.1 i twierdzenia 1)**.** *Niech $p : \widetilde{X} \to X$ będzie nakryciem i $x \in X$. Jeśli przestrzeń $\widetilde{X}$ jest łukowo spójna, to:*

a) Dla $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$ i $\Pi_{\widetilde{x}} := p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$, formuła $\Pi_{\widetilde{x}}[\lambda] \mapsto \widetilde{x}[\lambda]$ ustala bijekcję między zbiorem prawostronnych warstw grupy $\pi_1(X,x)$ względem podgrupy $\Pi_{\widetilde{x}}$, a włóknem $p^{-1}(x)$. Moc tego włókna jest więc równa indeksowi podgrupy $\Pi_{\widetilde{x}}$ w $\pi_1(X,x)$.

b) Przy $\widetilde{x}$ przebiegającym punkty włókna $p^{-1}(x)$, podgrupy $\Pi_{\widetilde{x}} := p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ tworzą **klasę sprzężoności podgrup** *w $\pi_1(X,x)$ – czyli zbiór wszystkich podgrup, sprzężonych z ustaloną. Ściślej: $\Pi_{\widetilde{x}[\lambda]} = [\lambda]^{-1} \Pi_{\widetilde{x}} [\lambda]$ dla $[\lambda] \in \pi_1(X,x)$ i $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$.*

Wyżej, podgrupa $\Pi_{\widetilde{x}}$ okazuje się być w naturalny sposób izomorficzna z $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})$:

Twierdzenie 2. *Przy oznaczeniach twierdzenia 1, $p_* : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \to \pi_1(X,x)$ jest monomorfizmem, więc ustanawia izomorfizm grupy $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ na jej obraz $\Pi_{\widetilde{x}} = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$.*

Dowód. Gdy dla $\gamma \in \Omega(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ zachodzi $p \circ \gamma \sim_\partial c_x$, to $\gamma \sim_\partial c_{\widetilde{x}}$ wobec wniosku 1b) w §1.2. (Stosujemy go przy $\lambda = p \circ \gamma$, $\widetilde{\lambda} = \gamma, \mu = c_x$, $\widetilde{\mu} = c_{\widetilde{x}}$.) Dowodzi to, że $\ker(p_*) = \{1\}$. $\square$

Wniosek 2. *W sytuacji wniosku 1 mamy $|\pi_1(\widetilde{X})| \cdot |p^{-1}(x)| = |\pi_1(X)|$, gdzie $|\ \ |$ to moc.*

Dowód. Istotnie, $|\Pi_{\widetilde{x}}| \cdot |p^{-1}(x)| = |\pi_1(X)|$ (wniosek 1a)) i $|\Pi_{\widetilde{x}}| = |\pi_1(\widetilde{X})|$ (twierdzenie 2).

3. Nakrycia będące rzutowaniem na przestrzeń orbit działania grupy

Działanie grupy (niżej lewostronne, ale podobnie i prawostronne) może też być użyte do konstrukcji nakrycia, następująco. Niech grupa G **działa na przestrzeni** $\widetilde{X}$ **przez homeomorfizmy**: tak, że każda bijekcja $\widetilde{X} \ni \widetilde{x} \mapsto g\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, gdzie $g \in G$, jest homeomorfizmem (równoważnie: jest ciągła; por. uwaga 1a) w p.1). Oznaczmy przez $\widetilde{X}/G$ zbiór orbit tego działania, a przez $p : \widetilde{X} \to \widetilde{X}/G$ **rzutowanie**, przyporządkowujące każdemu punktowi $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ jego orbitę $G\widetilde{x}$. Przestrzeń $\widetilde{X}/G$ wyposażmy w topologię ilorazową. Z jej definicji wynika, że przekształcenie p jest wówczas ciągłe, a też jest otwarte, tzn. dla każdego zbioru otwartego $\widetilde{U} \subset \widetilde{X}$ zbiór $p(\widetilde{U})$ jest otwarty w X/G. (Jest tak, bo $p^{-1}(p(\widetilde{U})) = \bigcup_{g\in G} g\widetilde{U}$ i każdy zbiór $g\widetilde{U}$ jest otwarty w $\widetilde{X}$, jako obraz zbioru otwartego przy homeomorfiźmie $\widetilde{x} \mapsto g\widetilde{x}$ przestrzeni $\widetilde{X}$.)

Stwierdzenie 1. *Niech powyżej działanie grupy G na $\widetilde{X}$ na następującą własność:*

($*$) każdy punkt zbioru $\widetilde{X}$ ma takie otoczenie $\widetilde{U}$, że $\widetilde{U} \cap g\widetilde{U} = \emptyset$ dla $g \in G \setminus \{1_G\}$.

Wówczas rzutowanie $p : \widetilde{X} \to \widetilde{X}/G$ jest nakryciem.

Dowód. Niech $x \in X$; wskażemy jego otoczenie elementarne w X/G. W tym celu weźmy punkt $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$ i jego otoczenie $\widetilde{U}$ wymagane w ($*$). Jak zauważono wyżej, dla $U := p(\widetilde{U})$ zachodzi $p^{-1}(U) = \bigcup_{g\in G} g\widetilde{U}$, przy czym zbiory $g\widetilde{U}$, dla $g \in G$, wszystkie są otwarte, a z warunku ($*$) wynika, że są one parami rozłączne i obcięcia $p_{|g\widetilde{U}} : g\widetilde{U} \to U$ są bijektywne. (Dlaczego tak jest?) Z otwartości i ciągłości p wynika więc, że obcięcia te są homeomorfizmami, zaś U jest otoczeniem elementarnym punktu x. $\square$

Uwaga 0. a) Przy założeniu spójności $\widetilde{X}$, implikację stwierdzenia można odwrócić: jeśli rzutowanie $\widetilde{X} \to \widetilde{X}/G$ jest nakryciem, to zachodzi ($*$). (Patrz dalej stw. 1 w §3.2.)

b) Z zadania 2 w §1.2 wynika, że gdy założenia stwierdzenia są spełnione i $H \leq G$, to naturalne przekształcenie $\widetilde{X}/H \to \widetilde{X}/G$ jest nakryciem.

Definicja. Działanie grupy G na przestrzeń $\widetilde{X}$ przez homeomorfizmy, spełniające warunek ($*$), nazwiemy **nakrywającym**[14] (też gdy jest prawostronne; wtedy w ($*$) zmieniamy $g\widetilde{U}$ na $\widetilde{U}g$).

Uwaga 0. Niech działanie grupy G na przestrzeni $\widetilde{X}$ będzie nakrywające. Wówczas:

a) Działanie to jest **wolne**, tzn. $G_{\widetilde{x}} = \{1_G\}$ dla $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ (inaczej: $g\widetilde{x} \neq \widetilde{x}$ dla $g \neq 1_G$ i $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$). Na każdej orbicie $G\widetilde{x}$ działanie G jest więc wolne i tranzytywne.

b) Gdy H jest podgrupą grupy G, to indukowane działanie H na $\widetilde{X}$ jest nakrywające.

Odnośnie działań wolnych, ważna dla nas jest

Uwaga 1. a) Gdy grupa G działa na zbiorze S wolno i tranzytywnie, to dla $s, s' \in S$ istnieje jedyny taki element $g \in G$, że $gs = s'$ (zaś $sg = s'$ dla działania prawostronnego).

[14] W większości podręczników, działania takie nazywane są **całkowicie nieciągłymi**. Nazwę „działanie nakrywające" wzoruję na przyjętej w [Hatch] i [Lee], gdzie wyjaśniono też przyczynę odejścia od nazwy wcześniejszej.

b) Niech grupy G i H działają na S, przy czym działania te są przemienne (patrz niżej) i działanie G jest wolne i tranzytywne. Ustalimy wtedy związek między G i H.

By te dwa działania łatwiej odróżnić przyjmujemy niżej, że G działa z lewej strony, a H z prawej (por. uwaga 1c) w p.1); wówczas przemienność oznacza, że $(gs)h = g(sh)$ dla $s \in S, g \in G$ i $h \in H$. Wybór $s_0 \in S$ pozwala określić funkcję $u : H \to G$ wzorem $H \ni h \mapsto u(h) \in G$, gdzie $u(h)$ jest jedynym elementem grupy G, dla którego $u(h)s_0 = s_0 h$. Z definicji tej wynika łatwo (czy tak?), że u jest homomorfizmem.

c) Jądrem tego homomorfizmu jest, oczywiście, stabilizator H_{s_0} punktu s_0 względem działania grupy H; w szczególności, H_{s_0} jest podgrupą normalną w H. Gdy zaś ponadto działanie H jest tranzytywne, to u jest epimorfizmem (czy tak?) i stąd $G \cong H/H_{s_0}$, zaś $G \cong H$ jeśli $H_{s_0} = \{1\}$.

d)* Homomorfizm u zależy od wyboru punktu $s_0 \in S$. Nietrudno zauważyć, że gdy zmienimy ten punkt na gs_0, to u zmieni się na homomorfizm $h \mapsto gu(h)g^{-1}$.

Powiążemy teraz tą „algebraiczną” uwagę z wiadomościami z p. 1, jak niżej:

Twierdzenie 1. *Niech grupa G działa nakrywająco na przestrzeni $\widetilde{X}$, niech $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, i niech p oznacza rzutowanie z $\widetilde{X}$ na przestrzeń orbit $X := \widetilde{X}/G$. Wówczas:*

a) $\Pi_{\widetilde{x}} := p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ jest podgrupą normalną grupy $\Pi := \pi_1(X, p(\widetilde{x}))$.

b) Jeśli przestrzeń $\widetilde{X}$ jest łukowo spójna, to grupa ilorazowa $\Pi/\Pi_{\widetilde{x}}$ jest izomorficzna z G.

Uzupełnienie twierdzenia: *Homomorfizm $u : \Pi \to G$, z jądrem $\Pi_{\widetilde{x}}$, uzyskamy przyporządkowując każdemu $[\lambda] \in \Pi$ taki (jedyny) element $u([\lambda]) \in G$, że $u([\lambda])\widetilde{x} = \widetilde{x}[\lambda]$. Gdy przestrzeń $\widetilde{X}$ jest łukowo spójna, homomorfizm ten jest „na”.*

Dla zyskania motywacji odłóżmy nieco dowód twierdzenia i zauważmy, że o jego znaczeniu przesądza już przypadek, gdy przestrzeń $\widetilde{X}$ jest jednospójna. Jest ona bowiem łukowo spójna, a też $\Pi_{\widetilde{x}} = \{1\}$ dla $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ (bo $\pi_1(\widetilde{X}) = \{1\}$). Uzyskujemy:

Wniosek 1. *Gdy grupa G działa nakrywająco na jednospójnej przestrzeni $\widetilde{X}$, to grupa $\pi_1(\widetilde{X}/G)$ jest izomorficzna z G.* $\square$

Przykład 1. Rozpatrzmy następujące działania grup na przestrzeniach jednospójnych:

i) działanie grupy $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych na prostej $\mathbb{R}$, zadane wzorem $(x, n) \mapsto x + n$;

ii) działanie grupy $\mathbb{Z}^n$ na przestrzeni $\mathbb{R}^n$, dane przez $((x_i)_{i=1}^n, (k_i)_{i=1}^n) \mapsto (x_i + k_i)_{i=1}^n$;

iii) działanie grupy $\mathbb{Z}/2$ na sferze S^n (tu $n \geq 2$), dane jako $(x, 0) \mapsto x$, $(x, 1) \mapsto -x$;

iv) działanie grupy $\mathbb{Z}/n$ na sferze $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$, zadane dla względnie pierwszych liczb k, n formułą $j(z_1, z_2) = (\varepsilon^j z_1, \varepsilon^{kj} z_2)$, gdzie ε jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia n. Przestrzeń orbit oznaczmy przez $L_{n,k}$.

Wszystkie te działania są nakrywające (jest to zadanie), zaś ich przestrzeniami orbit są, z dokładnością do homeomorfizmu: S^1 dla i), $(S^1)^n$ dla ii), i $\mathbb{R}P^n$ dla iii). Twierdzenie 1 orzeka więc, że $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1((S^1)^n) \cong \mathbb{Z}^n$, $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/2$ i $\pi_1(L_{n,k}) \cong \mathbb{Z}/n$.

Dowód twierdzenie i jego uzupełnienia. Niech $X := \widetilde{X}/G$, $x := p(\widetilde{x})$ i $S := p^{-1}(x)$. Ponieważ G działa wolno na $\widetilde{X}$, to na orbicie S działa wolno i tranzytywnie. Na S działa też (prawostronnie) grupa $\Pi = \pi_1(X, x)$, jak opisano w tw. 2 w p.2; działanie to jest tranzytywne, gdy przestrzeń $\widetilde{X}$ jest łukowo spójna. Tezy „uzupełnienia" (i twierdzenia) wynikną z części c) uwagi 2 jeśli wykażemy, że działania te są przemienne.

Dla wygody załóżmy, że działanie G jest lewostronne. Niech $s \in S, g \in G$ i $\lambda \in \Omega(X, x)$. Z definicji, $s[\lambda] = \alpha(1)$ i $(gs)[\lambda] = \beta(1)$, gdzie α i β są podniesieniami ścieżki λ, zaczepionymi odpowiednio w s i w gs. Ale gdy znamy α, to β można zadać wzorem $\beta(t) = g\alpha(t)$ dla $t \in I$. (Definiuje on funkcję ciągłą, bo G działa przez homeomorfizmy; jest też jasne, że $p(g\alpha(t)) = p(\alpha(t)) = \lambda(t)$ dla $t \in I$.) Równość $(gs)[\lambda] = g(s[\lambda])$ wynika więc stąd, że $\beta(1) = g\alpha(1)$. $\square$

4. Nakrywające działanie grupy na jej grafie Cayley'a (zadanie)

Niech G będzie grupą, a S pewnym zbiorem jej generatorów, takim, że $1_G \notin S$. Tworzymy przestrzeń $C = Cay(G, S)$ następująco. Do zbioru G doklejamy rodzinę odcinków $\{[0,1]_{g,s} : g \in G, s \in S\}$, każdy krańcem 0 do g, a krańcem 1 do iloczynu gs.

Otrzymany zbiór C nazywamy **grafem Cayleya** pary (G, S), przyklejone odcinki $[0,1]_{g,s}$ – jego krawędziami, a elementy $g \in G$ wierzchołkami.

Na krawędziach zachowajmy metrykę d_0 odcinka $[0,1]$, wyznaczając w ten sposób $d_0(x, y)$ dla $x, y \in C$ takich, że x i y należą do wspólnej krawędzi (w tym, być może, są jej krańcami). Następnie na C określmy metrykę d wzorem $d(x, y) = \inf\{\sum_{i=1}^{n} d_0(x_{i-1}, x_i)\}$, gdzie infimum jest brane po $n \geq 1$ i takich układach $(x_0, ..., x_n) \in C^{n+1}$, że $x_0 = x, x_n = y$ i każde dwa punkty x_{i-1} i x_i należą do wspólnej krawędzi.

Każdy element $h \in G$ działa na krańce każdej krawędzi $[0,1]_{g,s}$, mnożąc je z lewej strony przez h; przy tym hg i hgs są znów krańcami pewnej krawędzi. Dla $x \in [0,1]_{g,s}$ przyjmijmy za hx jedyny punkt krawędzi $[0,1]_{hg,s}$, dla którego $d(hx, hg) = d(x, g)$. Otrzymujemy działanie G na C przez izometrie $x \mapsto hx$ grafu C.

Zadanie 1. Udowodnić, że graf G jest spójny. Ponadto:

a) Gdy G nie zawiera elementów rzędu 2, to opisane działanie jest nakrywające. (Wskazówka: $d(x, gx) \geq 1$ dla $x \in C$ i $g \in G \setminus \{1_G\}$.)

b) Przy $G = \langle S|\emptyset\rangle$ i $|S| = 2$, otrzymany graf C (naszkicować go!) nie zawiera zamkniętych dróg krawędziowych, a przestrzeń orbit C/G jest homeomorficzna z bukietem $S^1 \vee S^1$. (Wobec b), rzutowanie $C \to C/G = S^1 \vee S^1$ jest więc nakryciem.)

§ 3. Kategoria nakryć nad ustaloną bazą

1. Algebraiczne kryterium istnienia podniesienia

Lemat 1. *Niech $p : \widetilde{X} \to X$ będzie nakryciem, niech $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ i niech ścieżki $\alpha, \beta : I \to X$ mają wspólny początek $p(\widetilde{x})$ i wspólny koniec. Jeśli $[\alpha \star \beta^{\leftarrow}] \in p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$, to $\widetilde{x}[\alpha] = \widetilde{x}[\beta]$. (Rozważane jest działanie monodromii z uwagi 1 w§1.2.)*

Dowód. Zachodzi $\widetilde{x} = \widetilde{x}[\alpha\star\beta^{\leftarrow}]$, patrz część c) tej uwagi, więc $\widetilde{x}[\beta] = \widetilde{x}[\alpha\star\beta^{\leftarrow}][\beta] = \widetilde{x}[\alpha]$.

Twierdzenie 1. *Niech $p : \widetilde{X} \to X$ będzie nakryciem, a $f : Z \to X$ przekształceniem określonym na spójnej i lokalnie łukowo spójnej przestrzeni Z. Dalej, niech punkty $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ i $z \in Z$ będą takie, że $f(z) = p(\widetilde{x})$. Wówczas równoważne są warunki:*
a) istnieje takie podniesienie $\widetilde{f} : Z \to \widetilde{X}$ przekształcenia f, że $\widetilde{f}(z) = \widetilde{x}$;
b) $f_*(\pi_1(Z, z)) \subset p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$.

Dowód. a)⇒b). Jeśli zachodzi a), to $p_* \circ \widetilde{f}_* = \widetilde{f}_*$, skąd wynika b).

b)⇒a). Niech warunek b) będzie spełniony. Szukane podniesienie zadamy następująco: dla każdego punktu $y \in Z$ obierzemy ścieżkę λ_y od z do y i przyjmiemy $\widetilde{f}(y) := \widetilde{x}[f \circ \lambda_y]$. Tu, $\widetilde{f}(y)$ nie zależy od wyboru ścieżki λ_y: gdy μ_y też jest ścieżką od z do y, to stosując b) i lemat 1 przy $\alpha := f \circ \lambda_y$ i $\beta := f \circ \mu_y$ wnosimy, że $\widetilde{x}[\alpha] = \widetilde{x}[\beta]$. (Gra rolę to, że $[\alpha\star\beta^{\leftarrow}] = [f\circ(\lambda_y\star\mu_y^{\leftarrow})] = f_*([\lambda_y\star\mu_y^{\leftarrow}]) \in f_*(\pi_1(Z, z)) \subset p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$, a też, że przy naszych założeniach przestrzeń Z jest łukowo spójna.)

Zgodnie z definicją działania monodromii, zachodzi $p(\widetilde{f}(y)) = (f\circ\lambda_y)(1) = f(y)$, zaś biorąc $y = z$ i $\lambda_y = c_z$ uzyskujemy $\widetilde{f}(z) = \widetilde{x}$. Pozostaje dowieść, że dowolnym punkcie $y \in Z$ funkcja $\widetilde{f}$ jest ciagła. Ustalmy więc punkt y i otoczenie $\widetilde{U}$ jego obrazu $\widetilde{f}(y)$, tak małe, by $p_{|\widetilde{U}}$ było homeomorfizmem. Wobec lokalnej łukowej spójności przestrzeni Z i otwartości rzutowania p, istnieje łukowo spójne otoczenie V punktu y, zawarte w $f^{-1}(p(\widetilde{U}))$. Udowodnimy, że $\widetilde{f}(V) \subset \widetilde{U}$.

Istotnie, gdy $y' \in V$, to istnieje w V ścieżka γ od y do y'; a że $\lambda_y \star \gamma$ jest ścieżką od z do y', to z wykazanej wyżej niezależności wynika, że

$$\widetilde{f}(y') = \widetilde{x}[(f \circ (\lambda_y \star \gamma)] = \widetilde{x}[f \circ \lambda_y][f \circ \gamma] = \widetilde{f}(y)[f \circ \gamma] \in \widetilde{U}.$$

(Gra rolę to, że $f\circ\gamma$ ma w $\widetilde{U}$ podniesienie zaczepione w $\widetilde{f}(y)$, bo $\mathrm{im}(f\circ\gamma) \subset p(\widetilde{U})$.) □

Uwaga 1. Jeśli przestrzeń Z jest jednospójna, to warunek b) jest spełniony.

2. Grupa automorfizmów nakrycia

UZGODNIENIE A: W TYM PUNKCIE,

$p : \widetilde{X} \to X$ i $p' : \widetilde{X}' \to X$ są nakryciami nad wspólną bazą X.

Definicja. a) Jeśli homeomomorfizm $f : \widetilde{X} \to \widetilde{X}'$ spełnia warunek $p' \circ f = p$, to mówimy, że f jest **izomorfizmem** między nakryciami p i p' i piszemy $f \in \mathrm{Iso}(p, p')$. Jeśli taki izomorfizm istnieje, nakrycia p i p' nazywamy **izomorficznymi** lub **równoważnymi**.

Jeśli w miejsce „homeomorfizm" użyć słowa „przekształcenie", to zdefiniujemy **morfizm** nakrycia p w nakrycie p'; piszemy wtedy $f \in \mathrm{Mor}(p, p')$.

b) Jeśli wyżej $\widetilde{X} = \widetilde{X}'$ i $p = p'$, to w miejsce $\mathrm{Iso}(p, p')$ piszemy $\mathrm{Iso}(p)$ lub $\mathrm{Aut}(p)$ i mówimy o izomorfizmach nakrycia p – czy, dla podkreślenia, o jego **automorfizmach**.

Uwaga 0. a) Gdy $f \in \mathrm{Mor}(p, p')$ i $\widetilde{u}$ jest podniesieniem przekształcenia $u : Z \to X$ względem p, to $f \circ u$ jest jego podniesieniem względem p'.

b) Podobnie, $f(\widetilde{x}[\lambda]) = f(\widetilde{x})[\lambda]$ dla $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, ścieżki $\lambda : I \to X$ zaczepionej w $p(\widetilde{x})$, i $f \in \mathrm{Mor}(p, p')$.

c) $\mathrm{Aut}(p)$ jest grupą przekształceń przestrzeni $\widetilde{X}$ i każde włókno $p^{-1}(x)$ jest zbiorem niezmienniczym każdego automorfizmu $f \in \mathrm{Aut}(p)$. Będziemy zainteresowani własnościami naturalnego działania grupy $\mathrm{Aut}(p)$ i jej podgrup na $\widetilde{X}$ i na włóknach nakrycia p.

Uwaga 1. Niech przestrzeń nakrywająca $\widetilde{X}$ będzie spójna. Wówczas:

a) Jeśli $f_1, f_2 \in \mathrm{Mor}(p, p')$ są równe w pewnym punkcie, to $f_1 = f_2$. (Wynika to z twierdzenia 1a) w §1.1, bo f_1 i f_2 są podniesieniami p względem p'.)

b) Jeśli grupa $G \leq \mathrm{Aut}(p)$ działa tranzytywnie na pewnym włóknie $p^{-1}(x)$, to $G = \mathrm{Aut}(p)$. Istotnie, gdy $f \in \mathrm{Aut}(p)$, to obierając $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$ dowolnie, uzyskamy $g \in G$ z $g(\widetilde{x}) = f(\widetilde{x})$ – co wraz z a) daje $f = g \in G$.

Stwierdzenie 1. *Jeśli przestrzeń $\widetilde{X}$ jest spójna i $G \leq \mathrm{Aut}(p)$, to indukowane działanie G na $\widetilde{X}$ jest nakrywające (więc jest wolne i rzutowanie $\widetilde{X} \to \widetilde{X}/G$ jest nakryciem).*

Dowód. Każdy punkt zbioru $\widetilde{X}$ ma otoczenie $\widetilde{U}$, na którym p jest 1-1. Pozostaje dowieść, że jeśli $\widetilde{U}$ jest takim otoczeniem, a $\widetilde{x} \in \widetilde{U}$ i $g \in G$ są takie, że $g(\widetilde{x}) \in \widetilde{U}$, to $g = \mathrm{id}_{\widetilde{X}}$. Jednak $p(g(\widetilde{x})) = p(\widetilde{x})$ (bo $g \in \mathrm{Aut}(p)$), więc skoro $p_{|\widetilde{U}}$ jest 1-1, to $g(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$. Stąd $g = \mathrm{id}_{\widetilde{X}}$ na podstawie uwagi 1a). $\square$

Definicja. Nakrycie $p : \widetilde{X} \to X$ nazwiemy **regularnym**, jeśli grupa $\mathrm{Aut}(X)$ działa tranzytywnie na każdym włóknie $p^{-1}(x)$.

Twierdzenie 1. *Jeśli przestrzeń X jest łukowo spójna, to równoważne są warunki:*

i) Nakrycie p jest regularne.

ii) Przy $q : \widetilde{X} \to \widetilde{X}/\mathrm{Aut}(p)$ oznaczającym rzutowanie na przestrzeń orbit działania grupy $\mathrm{Aut}(p)$, istnieje taki homeomorfizm $f : X \to \widetilde{X}/\mathrm{Aut}(p)$, że $f \circ p = q$.

iii) Dla pewnego $x \in X$, grupa $\mathrm{Aut}(p)$ działa tranzytywnie na włóknie $p^{-1}(x)$.

Dowód. i)$\Leftrightarrow$ii). (Lukowa spójność nie gra tu roli.) Regularność p jest równoważna temu, by p i q miały te same włókna – a więc temu, by $f \circ p = q$ dla pewnej bijekcji

$f : X/\mathrm{Aut}(p) \to X$. (Zauważmy, że p i q są „na".) Gdy istnieje, bijekcja taka jest homeomorfizmem, bo p i q są ciągłe i otwarte, patrz komentarz przed stwierdzeniem 1 w §2.3.

i)⇔iii). Dowodu wymaga tylko to, że gdy grupa $\mathrm{Aut}(p)$ działa tranzytywnie na $p^{-1}(x)$, to dla $y \in X$ i $\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2 \in p^{-1}(y)$ istnieje $f \in \mathrm{Aut}(p)$ z $f(\widetilde{y}_1) = \widetilde{y}_2$. W tym celu obierzmy ścieżkę λ od y do x. Wówczas $\widetilde{y}_i[\lambda] \in p^{-1}(x)$ dla $i = 1, 2$, więc $f(\widetilde{y}_1[\lambda]) = \widetilde{y}_2[\lambda]$ dla pewnego $f \in \mathrm{Aut}(p)$. Korzystając z uwagi 0b) wnosimy, że $f(\widetilde{y}_1)[\lambda] = \widetilde{y}_2[\lambda]$, skąd „mnożąc przez $[\lambda^{\leftarrow}]$" uzyskujemy $f(\widetilde{y}_1) = \widetilde{y}_2$. (Patrz uwaga 1b) w §1.2.) ⊟

Ze względu na warunek ii), na nakrycie regularne p możemy patrzeć jak na rzutowanie $\widetilde{X} \to \widetilde{X}/\mathrm{Aut}(p)$. Tym samym, z uwagi 2 w §2.3 i stwierdzenia 1 wynika:

Wniosek 1. *Gdy nakrycie p jest regularne, przestrzeń $\widetilde{X}$ jest łukowo spójna i $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, to istnieje epimomorfizm $u_{\widetilde{x}} : \pi_1(X, p(\widetilde{x})) \to \mathrm{Aut}(p)$ z jądrem $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$. Określa go warunek, by $u_{\widetilde{x}}([\lambda])$ był dla $\lambda \in \Omega(X, p(\widetilde{x}))$ automorfizmem przeprowadzającym $\widetilde{x}$ na $\widetilde{x}[\lambda]$.*

Uwaga 2. Niech $f \in \mathrm{Mor}(p, p')$. Z zadania 3 w §1.1 wynika, że jeśli przestrzeń $\widetilde{X}'$ jest spójna i lokalnie łukowo spójna, to f jest nakryciem (w tym jest „na").

UZGODNIENIE B: W dalszej części tego punktu, przez (♢) oznaczam warunek:
(♢) przestrzenie $\widetilde{X}$ i $\widetilde{X}'$ (a przez to i X) są spójne i lokalnie łukowo spójne.
Przy wynikach, w których założenie to obowiązuje, umieszczam znak (♢) .

Twierdzenie 2 (♢). *Niech $\widetilde{x} \in \widetilde{X}, \widetilde{x}' \in \widetilde{X}'$ i $x \in X$ będą takie, że $p(\widetilde{x}) = p'(\widetilde{x}') = x$; niech też $H := p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ i $H' := p'_*(\pi_1(\widetilde{X}', \widetilde{x}'))$. (Są to podgrupy grupy $\pi_1(X, x)$.)*

a) Jeśli $H \subset H'$, to istnieje (jedyny) morfizm $f \in \mathrm{Mor}(p, p')$ taki, że $f(\widetilde{x}) = \widetilde{x}'$.

b) Jeśli $H = H'$, to morfizm ten jest izomorfizmem.

c) Jeśli H i H' są sprzężonymi podgrupami grupy $\pi_1(X, x)$, to $\mathrm{Iso}(p, p') \neq \emptyset$. Jeśli zaś H' tylko zawiera pewną podgrupę sprzężoną w $\pi_1(X, x)$ z H, to $\mathrm{Mor}(p, p') \neq \emptyset$.

d) Implikacje odwrotne też są prawdziwe.

Dowód. Ad a). Ta część wynika z istnienia i jednoznaczności takiego podniesienia (względem p') przekształcenia $p : \widetilde{X} \to X$, że $f(\widetilde{x}) = \widetilde{x}'$; patrz twierdzenie 1 w p.1.

Ad b). Jeśli $H' = H$, to podobnie zachodzi $f'(\widetilde{x}') = \widetilde{x}$ dla pewnego $f' \in \mathrm{Mor}(p', p)$. Ponieważ $\widetilde{f}' \circ \widetilde{f}(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$, to $\widetilde{f}' \circ \widetilde{f} = \mathrm{id}_{\widetilde{X}}$ na podstawie uwagi 1a). Tak samo, $\widetilde{f} \circ \widetilde{f}' = \mathrm{id}_{\widetilde{X}'}$.

Ad c). Jeśli podgrupa H jest sprzężona z H', to na podstawie wniosku 1b) w §2.2 istnieje taki punkt $\widetilde{y} \in (p)^{-1}(x)$, że $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{y})) = H'$. Pozostaje więc zastosować b) przy H zastąpionym przez H', a $\widetilde{x}$ przez $\widetilde{y}$. Dowód pozostałej części tezy c) jest podobny.

Ad d). Teza ta jest oczywista. (Ponownie należy uwzględnić wniosek 1b) w §2.2.) □

Twierdzenie 3 (♢). *Niech $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ i $x = p(\widetilde{x})$. Nakrycie p jest regularne wtedy i tylko wtedy, gdy $\Pi_{\widetilde{x}} := p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ jest podgrupą normalną grupy $\pi_1(X, x)$.*

Dowód. Konieczność tego warunku wynika z wniosku 1 w p.1.

Odwrotnie, niech $\Pi_{\widetilde{x}} := p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ będzie podgrupą normalną grupy $\pi_1(X, x)$. Jak wiemy z wniosku 1b) w §2.2, gdy $\widetilde{x}' \in p^{-1}(x)$, to podgrupy $\Pi_{\widetilde{x}}$ i $\Pi_{\widetilde{x}'} := p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}'))$ są sprzężone w $\pi_1(X, x)$. A że $\Pi_{\widetilde{x}}$ jest podgrupą normalną, to $\Pi_{\widetilde{x}'} = \Pi_{\widetilde{x}}$ i z części b) twierdzenia 1 (przy $p' = p$) wynika, że $\widetilde{x}' = f(\widetilde{x})$ dla pewnego $f \in \mathrm{Aut}(p)$. Tak więc spełniony jest warunek ii) twierdzenia 2, bo $\mathrm{Aut}(p)$ działa tranzytywnie na $p^{-1}(x)$. □

Uwaga 3. Jeśli $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) = \{0\}$ lub grupa $\pi_1(X, x)$ jest abelowa, to $\Pi_{\widetilde{x}} \lhd \pi_1(X, x)$.

Zadanie 2. ($\diamondsuit$) Nakrycie p jest regularne wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje ścieżka w X, której pewne podniesienie jest ścieżką zamkniętą, a inne niezamkniętą.

Zadanie 3. * (Por. wniosek 1.) Zakładamy, że $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}) \to (X, x)$ jest nakryciem spójnym i lokalnie łukowo spójnym. Przy $\Pi := \pi_1(X, x)$ i $\Pi_{\widetilde{x}} := p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ dowieść, że

a) Dla $g \in \Pi$, automorfizm $f \in \mathrm{Aut}(p)$ przeprowadzający $\widetilde{x}$ na $\widetilde{x}g$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy g należy do **normalizatora** $N(\Pi_{\widetilde{x}})$ podgrupy $\Pi_{\widetilde{x}} \leq \Pi$ (czyli gdy $g^{-1}\Pi_{\widetilde{x}}g = \Pi_{\widetilde{x}}$). Gdy istnieje, automorfizm ten jest jedyny; oznaczamy go f_g. (Wskazówka: wniosek 1b) w §2.2 i tw.2.)

b) $g \mapsto f_g$ jest epimorfizmem grupy $N(\Pi_{\widetilde{x}})$ na $\mathrm{Aut}(p)$, z jądrem $\Pi_{\widetilde{x}}$. (Wskazówka: zauważyć, że $f_g(f_h(\widetilde{x})) = \widetilde{x}gh$, por. uwaga 0b) w p.2.)

3. Istnienie nakryć, wyznaczających daną podgrupę grupy podstawowej bazy

W związku z wynikami z p.2 powstaje pytanie: czy dla każdej przestrzeni punktowanej (X, x) i podgrupy H grupy podstawowej $\pi_1(X, x)$, istnieje takie nakrycie $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}) \to (X, x)$, że $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) = H$? W tym paragrafie pokażemy, że gdy przestrzeń X jest „dostatecznie dobra", to odpowiedź jest pozytywna. Zasadniczy jest przypadek $H = \{1\}$.

Definicja. a) Nakrycie $p : \widetilde{X} \to X$ jest **jednospójne**, jeśli przestrzeń $\widetilde{X}$ jest jednospójna.

b) Przestrzeń X spełnia **warunek małych pętli**, jeśli każdy jej punkt ma takie otoczenie U, że

$$\text{każda pętla w } U \text{ jest nieistotna w } X \tag{$*$}$$

Twierdzenie 1. *Niech przestrzeń X będzie spójna, lokalnie łukowo spójna i spełnia warunek małych pętli. Wówczas istnieje nakrycie jednospójne $p : \widetilde{X} \to X$.*

Wobec twierdzenia 2 w §2.1, twierdzenie 1 wynika z następującego, przy $G = \{1\}$:

Twierdzenie 2. *Niech spełnione będą założenia twierdzenia 1, niech $x \in X$ i niech G będzie podgrupą grupy $\pi_1(X, x)$. Wówczas istnieje takie łukowo spójne nakrycie $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}) \to (X, x)$, że $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) = G$.*

Uwaga 1. a) Nakrycie p w twierdzeniu 2 jest jedyne z dokładnością do *izmorfizmu nakryć punktowanych*: jeśli $p' : (\widetilde{X}', \widetilde{x}') \to (X, x)$ też spełnia warunki tezy, to istnieje taki izomorfizm $f \in \mathrm{Iso}(p, p')$, że $f(\widetilde{x}) = \widetilde{x}'$. (Wynika to z twierdzenia 1b) w p.2.)

b) Gdy przestrzeń X ma nakrycie jednospójne, to spełnia warunek małych pętli: każda pętla w jakimkolwiek otoczeniu elementarnym jest nieistotna w X. Wynika to stąd, że pętla taka ma podniesienie – siłą rzeczy nieistotne, wobec jednospójności $\widetilde{X}$.

c) Niejednokrotnie, nakrycie jednospójne umiemy bezpośrednio wskazać, uzyskując o nim znacznie więcej informacji, niż dałby poniższy ogólny dowód. I tak, jednospójne są nakrycia rozpatrywane w przykładzie 1a),d) w §1.1, w przykładzie 1 w §2.3, czy w zadaniu 1c) w §2.4. (Jednospójność przestrzeni $\widetilde{X}$ jest w nich widoczna.)

d) ($\diamondsuit$) Niech nakrycie $p : \widetilde{X} \to X$ i $p' : \widetilde{X}' \to X$ będą nakryciami, przy czym nakrycie p jest jednospójne. Z twierdzenia z p.1 wynika, że istnieje morfizm $f \in \mathrm{Mor}(p, p')$, a z uwagi 2 w p.2 – że jest on nakryciem. (Stąd używana też nazwa „nakrycie uniwersalne".)

<u>Dowód twierdzenia 2.</u> Oznaczmy przez C zbiór ścieżek w X, zaczepionych w punkcie bazowym x. Dla $\alpha, \beta \in C$ piszemy $\alpha \sim \beta$ gdy $\alpha(1) = \beta(1)$ i $[\alpha \star \beta^{\leftarrow}] \in G$, gdzie – jak dotąd – $[\ \ ]$ oznacza klasę homotopii relatywnie krańce ścieżki. Klasę ścieżki $\alpha \in C$ względem $\sim$ oznaczmy przez $\langle\alpha\rangle$, a zbiór $C/_\sim$ tych klas –przez $\widetilde{X}$. Rzutowanie $p : \widetilde{X} \to X$ zadamy wzorem $p(\langle\alpha\rangle) = \alpha(1)$. (Konstrukcja ta jest motywowana lematem 1 w p.1.)

Pozostaje w $\widetilde{X}$ wprowadzić topologię, przy której przestrzeń $\widetilde{X}$ jest spójna, p jest nakryciem i $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) = G$ dla pewnego $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$. W tym celu oznaczmy przez $\mathcal{U}$ rodzinę zbiorów otwartych $U \subset X$, które spełniają warunek $(*)$ i są łukowo spójne. Z założeń wynika łatwo, że $\mathcal{U}$ jest bazą topologii przestrzeni X. Dla $U \in \mathcal{U}$ i $\alpha \in C$, niech

$$\widetilde{U}_\alpha := \{\langle\alpha \star \lambda\rangle : \ \lambda \text{ jest ścieżką w } U \text{ i } \lambda(0) = \alpha(1)\}.$$

Niżej, litery U, V, W oznaczają elementy zbioru $\mathcal{U}$, a α, β, γ – zbioru C. Zachodzi:

a) Jeśli $\alpha, \alpha' \in C$ i ścieżka λ są takie, że $\langle\alpha\rangle = \langle\alpha'\rangle$ i $\lambda(0) = \alpha(1)$, to $\langle\alpha * \lambda\rangle = \langle\alpha' * \lambda\rangle$. Istotnie: $[(\alpha' * \lambda) * (\alpha * \lambda)^{\leftarrow}] = [\alpha' * (\lambda * \lambda^{\leftarrow}) * \alpha^{\leftarrow}] = [\alpha' * c_{\alpha(1)} * \alpha^{\leftarrow}] = [\alpha' * \alpha^{\leftarrow}] = [c_x] \in G$. Podobnie, gdy $[\alpha] = [\alpha']$, to $\langle\alpha\rangle = \langle\alpha'\rangle$.

b) Jeśli $\alpha(1) \in U$, to $\langle\alpha\rangle \in \widetilde{U}_\alpha$ i $p(\widetilde{U}_\alpha) = U$. (Gra rolę łukowa spójność U.)

c) $p|\widetilde{U}_\alpha$ jest 1-1: gdy $\langle\gamma_1\rangle, \langle\gamma_2\rangle \in \widetilde{U}_\alpha$ i $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, to $\langle\gamma_1\rangle = \langle\gamma_2\rangle$. Istotnie, wtedy $\langle\gamma_i\rangle = \langle\alpha \star \lambda_i\rangle$ dla takich ścieżek λ_i w U, że $\alpha \star \lambda_i$ istnieje ($i = 1, 2$) i $\lambda_1(1) = \lambda_2(1)$. A że U spełnia warunek $(*)$, to $[\alpha * \lambda_1] = [\alpha * \lambda_2]$, skąd $\langle\gamma_1\rangle = \langle\gamma_2\rangle$.

d) Jeśli $\langle\gamma\rangle \in \widetilde{U}_\alpha$, to $\widetilde{U}_\alpha = \widetilde{U}_\gamma$. (Stąd jeśli $\widetilde{U}_\alpha \cap \widetilde{U}_\beta \neq \emptyset$, to $\widetilde{U}_\alpha = \widetilde{U}_\beta$.) Istotnie, wystarczy dowieść, że $\widetilde{U}_\alpha \subseteq \widetilde{U}_\gamma$, bo da to $\langle\alpha\rangle \in \widetilde{U}_\gamma$ i dzięki uzyskanej symetrii pary (α, γ) zajdzie też $\widetilde{U}_\gamma \subseteq \widetilde{U}_\alpha$. Niech więc $\beta \in \widetilde{U}_\alpha$; wtedy $\langle\beta\rangle = \langle\alpha * \lambda\rangle$ i $\langle\gamma\rangle = \langle\alpha * \mu\rangle$ dla pewnych ścieżek λ, μ w U takich, że $\lambda(0) = \alpha(1)$ i $\mu(0) = \gamma(1)$. Przy $\nu = \mu^{\leftarrow} * \lambda$ wnosimy z a), że $\langle\gamma * \nu\rangle = \langle(\alpha * \mu) * \nu\rangle = \langle\beta\rangle$, skąd $\beta \in \widetilde{U}_\gamma$.

e) Gdy $\langle\gamma\rangle \in \widetilde{U}_\alpha \cap \widetilde{V}_\beta$, to $\langle\gamma\rangle \in \widetilde{W}_\gamma \subset \widetilde{U}_\alpha \cap \widetilde{V}_\beta$ dla pewnego $W \in \mathcal{U}$. Można bowiem obrać $W \in \mathcal{U}$ tak, by $\gamma(1) \in W \subset U \cap V$, i wówczas $\widetilde{W}_\gamma \subset \widetilde{U}_\gamma \cap \widetilde{V}_\gamma = \widetilde{U}_\alpha \cap \widetilde{V}_\beta$, por. d).

f) $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in C} \widetilde{U}_\alpha$. Istotnie, gdy $\gamma(1) \in U$, to $\langle\gamma\rangle \in \widetilde{U}_\gamma$, co dowodzi inkluzji $\subseteq$; zaś $\supseteq$ wynika z b).

g) Wobec e), możemy $\widetilde{X}$ wyposażyć w topologię, której bazą jest rodzina $\{\widetilde{U}_\alpha : U \in \mathcal{U}, \alpha \in C\}$. Funkcja $p : \widetilde{X} \to X$ stanie się wówczas ciągła (na podstawie f)) i otwarta (bo $p(\widetilde{U}_\alpha) = U$). Z f), c) i d) wynika więc, że $\mathcal{U}$ jest otwartym pokryciem przestrzeni X, złożonym ze zbiorów elementarnych. Tym samym $p : \widetilde{X} \to X$ jest nakryciem.

h) Dla $\gamma \in C$, wzór $\widetilde{\gamma}(t) := \langle \gamma_t \rangle$, gdzie $\gamma_t(s) := \gamma(st)$ dla $s, t \in I$, zadaje takie podniesienie ścieżki γ względem p, że $\widetilde{\gamma}(0) = \langle c_x \rangle$. Istotnie, równość $p(\widetilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ wynika z definicji, zaś dla sprawdzenia ciągłości ustalmy $t \in I$ i dowolne otoczenie $\widetilde{U}_\alpha$ punktu $\widetilde{\gamma}(t) = \langle \gamma_t \rangle$. Wtedy $\widetilde{U}_\alpha = \widetilde{U}_{\gamma_t}$, por. d), więc można przyjąć, iż $\alpha = \gamma_t$. Wobec ciągłości γ, istnieje takie spójne otoczenie J punktu t w I, że $\gamma(J) \subset U$. Pozostaje zauważyć, że $\widetilde{g}_{t'} \in \widetilde{U}_{\gamma_t}$ dla wszystkich $t' \in J$. (To ostatnie wynika z definicji zbioru $\widetilde{U}_{\gamma_t}$ i z a)): gdy bowiem $t' \geq t$, to $[\gamma_{t'}] = [\gamma_t \star \gamma_{|[t,t']}]$ i $\operatorname{im}(\gamma_{|[t,t']}) \subset U$, i podobnie gdy $t' \leq t$.)

i) Przestrzeń $\widetilde{X}$ jest łukowo spójna, bo każdy punkt $\langle \gamma \rangle \in \widetilde{X}$ można w $\widetilde{X}$ połączyć ścieżką $\widetilde{\gamma}$ z punktem $\langle c_x \rangle$. Ponadto, $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \langle c_x \rangle)) = G$, bo gdy $\gamma \in \Omega(X, x)$, to:

$$[\gamma] \in p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \langle c_x \rangle)) \Leftrightarrow \widetilde{\gamma}(1) = \langle c_x \rangle \Leftrightarrow \langle \gamma \rangle = \langle c_x \rangle \Leftrightarrow [\gamma] \in G.$$

(Równoważności wynikają, kolejno, z uwagi 1c) w §1.2, definicji $\widetilde{\gamma}(1)$, i definicji $\langle \gamma \rangle$.) □

Uwaga 1. Wskażmy jeszcze, jak z istnienia nakrycia jednospójnego $q_0 : (\widetilde{X}_0, \widetilde{x}_0) \to (X, x)$ wynika prawdziwość twierdzenia 2. W tym celu, dla izomorfizmu $u : \pi_1(X, x) \to \operatorname{Aut}(q_0)$ z wniosku 1 w p.2, przyjmijmy $G' := u(G)$ i oznaczmy przez $q : \widetilde{X}_0 \to \widetilde{X}_0/G'$ rzutowanie ilorazowe. Przy $\widetilde{X} := \widetilde{X}_0/G'$ i $\widetilde{x} := q(\widetilde{x}_0)$, nakryciem żądanym w twierdzeniu 2 jest naturalne przekształcenie $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}) \to (X, x)$. (Patrz zad. 3 w §2.3 i stw. 1 w p.2.)

Zadanie 1. Dać uzasadnienie tej uwagi. (Wskazówka: dla epimorfizmu $u' : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \to G' \subset \operatorname{Aut}(q_0)$ z twierdzenia w §2.3 zauważyć, że $u \circ p_* = u'$.)

Zadanie 2. $q : \widetilde{X} \to Y$ i $r : Y \to X$ są nakryciami, a przestrzeń X jest lokalnie łukowo spójna i spełnia warunek małych pętli. Dowieść, że $r \circ q : \widetilde{X} \to X$ jest nakryciem. (Wskazówka: zad. 1 w §1.2 i 2 w §1.1, lub zad. 3 w §1.1 i twierdzenie 1 z uwagą 1d).)

4. Równoważność kategorii nakryć nad X i kategorii $\pi_1(X, x)$–zbiorów

Przypomnijmy, że zbiory, na których określono pewne działanie grupy G, nazywane są G–**zbiorami**. Działanie może być prawostronne lub lewostronne, zależnie od wygody; niżej zakładamy, że jest prawostronne. Funkcja $f : S \to T$ pomiędzy takimi G–zbiorami nazywana jest G–**przekształceniem** lub przekształceniem **ekwiwariantnym**, jeśli $f(sg) = f(s)g$ dla wszystkich $s \in S$ i $g \in G$. Jeśli ponadto f jest bijekcją, to f nazywamy G–**izomorfizmem**. (Wówczas f^{-1} też jest G–przekształceniem.)

Umowa. W tym punkcie, (X, x) jest ustaloną przestrzenią punktowaną, która jest spójna i lokalnie łukowo spójna. Dla krótkości, grupę $\pi_1(X, x)$ oznaczamy przez Π. Przypomnijmy, że każde nakrycie p nad X czyni zbiór $p^{-1}(x)$ w naturalny sposób prawym Π–zbiorem, który będziemy nazywać **włóknem nad** x nakrycia p. (Nazwa obejmuje zbiór wraz z działaniem na nim grupy Π.)

Będziemy rozpatrywać nakrycia nad X. W odróżnieniu od większości wcześniej badanych sytuacji, nie żądamy, by przestrzenie nakrywające były spójne.

Twierdzenie 1. *Gdy X spełnia nadto warunek małych pętli, to dla każdego prawego Π–zbioru T istnieje nakrycie $p : \widetilde{X}_T \to X$, którego włókno nad x jest Π–izomorficzne z T.*

Dowód. Π–zbiór T jest rozłączną sumą orbit. Jeśli dla każdej orbity T_α skonstruujemy nakrycie $p_\alpha : \widetilde{X}_\alpha \to X$, którego włókno nad x jest Π–izomorficzne z T_α, to za $\widetilde{X}_T$ będziemy mogli przyjąć sumę rozłączną przestrzeni $\widetilde{X}_\alpha$, z naturalnym rzutowaniem na X.

Możemy więc założyć, że T ma tylko jedną orbitę. Ustalmy wtedy punkt $t_0 \in T$ i oznaczmy przez H jego stabilizator. Jak wiemy, istnieje takie (łukowo) spójne nakrycie $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}) \to (X, x)$, że $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) = H$. Punkty $\widetilde{x}$ i t_0 mają ten sam stabilizator H względem działań rozpatrywanych na $p^{-1}(x)$ i na T, odpowiednio, które oba są tranzytywne. (Gra rolę twierdzenie 1 w §2.2.) Pozostaje więc powołać się na:

Lemat 1. *Dwa tranzytywne G–zbiory S i T, mające ten sam stabilizator punktów $s_0 \in S$ i $t_0 \in T$, są G–izomorficzne. Ogólniej, jeśli zamiast $G_{s_0} = G_{t_0}$ zachodzi $G_{s_0} \subset G_{t_0}$, to istnieje jedyne G–przekształcenie $h : S \to T$, dla którego $h(s_0) = t_0$.*

Dowód. Określamy h formułą $h(s_0 g) = t_0 g$. (Por. dowód stwierdzenia 1a) w §2.1.) ⊟

Uwaga 1. Traktujmy T jako przestrzeń dyskretną. Gdy zmienić $\widetilde{X}_T$ na $\widetilde{X}'_T := \widetilde{X}_T \cup_h T$, gdzie $h : p^{-1}(x) \to T$ jest Π–izomorfizmem, to naturalne rzutowanie $\widetilde{X}'_T$ na X będzie nakryciem, którego włókno nad x będzie nawet równe T (co do zbioru i Π–działania).

Twierdzenie 2. *Dla każdych nakryć p, p' nad X, obcięcie $f \mapsto f_{|p^{-1}(x)}$ wyznacza bijekcję zbioru $\mathrm{Mor}(p, p')$ na zbiór wszystkich Π–przekształceń włókna $p^{-1}(x)$ we włókno $(p')^{-1}(x)$.*

Dowód. Kolejno dowodzimy, że:

a) Gdy $f \in \mathrm{Mor}(p, p')$, to $f_{|p^{-1}(x)}$ jest Π–przekształceniem włókna $p^{-1}(x)$ we włókno $(p')^{-1}(x)$. Istotnie, inkluzja $f(p^{-1}(x)) \subset (p')^{-1}(x)$ wynika z definicji $\mathrm{Mor}(p, p')$, a ekwiwariantność wynika z uwagi 0b) w p.2.

b) Jeśli morfizmy f i f' są równe na $p^{-1}(x)$, to $f = f'$. Istotnie, f i f' są wtedy równe na każdej składowej łukowej spójności przestrzeni $\widetilde{X}$, przecinającej $p^{-1}(x)$; sumą zaś tych składowych jest $\widetilde{X}$. (Skorzystano z uwagi 1a) w p.2 i zadania 1b) w §1.2.)

c) Każde Π–przekształcenie $h : p^{-1}(x) \to (p')^{-1}(x)$ rozszerza się do pewnego $\overline{h} \in \mathrm{Mor}(p, p')$. Istotnie, ponieważ składowe przestrzeni $\widetilde{X}$ są otwarte i parami rozłączne, możemy (i będziemy) zakładać w dowodzie łukową spójność $\widetilde{X}$. (Gra rolę uwaga 1 w §2.2 oraz, ponownie, zadanie 1b) w §1.2.) Ustalmy dalej punkt $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$; ze względu na ekwiwariantność, jego stabilizator jest zawarty w stabilizatorze punktu $h(\widetilde{x})$. Uwzględniając to, czym są te stabilizatory i korzystając z twierdzenia 1a) w p.2 stwierdzamy, że

$h(\widetilde{x}) = \overline{h}(\widetilde{x})$ dla pewnego $\overline{h} \in \mathrm{Mor}(p, p')$. Π–przekształcenia $\overline{h}_{|p^{-1}(x)}$ i h są więc równe w punkcie $\widetilde{x}$, skąd $\overline{h}_{|p^{-1}(x)} = h$ na podstawie jedyności w lemacie 1. $\square$

Uwaga 2. a) Przy oznaczeniach twierdzenia 2 i przyjętych założeniach, każde Π–przekształcenie $h : p^{-1}(x) \to (p')^{-1}(x)$ ma więc jedyne przedłużenie $\overline{h} \in \mathrm{Mor}(p, p')$.

b) Z jednoznaczności wynika, że operacja przedłużania $h \mapsto \overline{h}$ jest funktorialna: przedłużenie złożenia jest złożeniem przedłużeń, a gdy $p = p'$, to przedłużeniem przekształcenie identycznościowego jest identyczność. Oczywiście, funktorialna jest też operacja obcięcia morfizmu do włókna nad x.

c) Wynika stąd (jak?), że przy bijekcji $f \leftrightarrow f_{|p^{-1}(x)}$ izomorfizmom nakryć odpowiadają izomorfizmy Π–zbiorów, a nakrycia p i p' są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy Π–zbiory $p^{-1}(x)$ i $(p')^{-1}(x)$ są Π–izomorficzne.

Uwaga 3. * Tytułowi tego punktu (i paragrafu) można nadać ścisły sens matematyczny. Z parą (X, x) można związać dwie *kategorie*. Jedną jest kategoria $\mathcal{C}$, której obiektami są (niepunktowane) nakrycia nad X, a morfizmy są jak zdefiniowano je w p.2; drugą zaś – kategoria $\mathcal{S}$, której obiektami są $\pi_1(X, x)$–zbiory, a morfizmami są przekształcenia ekwiwariantne. Wyniki powyższe oznaczają, że określony jest funktor z $\mathcal{C}$ do $\mathcal{S}$, przyporządkowujący każdemu obiektowi p kategorii $\mathcal{C}$ jego włókno nad x (traktowane jako obiekt kategorii $\mathcal{S}$), a każdemu morfizmowi $f \in \mathrm{Mor}(p, p')$ – jego obcięcie do tego włókna, i dla „dobrych" (X, x) funktor ten ustala *równoważność kategorii* $\mathcal{C}$ i $\mathcal{S}$. (Nie przytaczam definicji równoważności kategorii, a uwagę traktuję jako materiał uzupełniający.)

§ 4. Pewne zastosowania teorii nakryć

1. Przykładowe zastosowania w Algebrze

Twierdzenie 1 (J. Nielsen i O. Schreier, 1921 i 1927). *Każda podgrupa grupy wolnej jest grupą wolną. Co więcej, podgrupa H indeksu k grupy F_n (mającej $n < \infty$ wolnych generatorów) ma $kn - k + 1$ wolnych generatorów.*

Dla prostoty, udowodnimy tylko prawdziwość drugiego zdania; pomijamy więc przypadki, gdy wyjściowa grupa wolna jest nieskończenie generowana lub podgrupa H jest nieskończonego indeksu. Stosujemy niżej konwencję z uwagi 1c) w §II.2.4.

Lemat 1. *Jeśli Y jest skończonym, spójnym CW-kompleksem wymiaru 1 (czyli skończonym grafem spójnym), mającym e krawędzi i v wierzchołków, to $\pi_1(Y) \cong F_{e-v+1}$*

Dowód. Na ćwiczeniach pan Pielasa podał krótkie uzasadnienie. (Oto ono. Jeśli $v > 1$, to pewna krawędź grafu ma dwa różne krańce. Gdy zlepić ją do punktu to zarówno e, jak i v zmaleją o 1, więc $e - v + 1$ nie ulegnie zmianie; nie zmieni się też typ homotopii grafu. W ten sposób przez indukcję sprowadzamy lemat do przypadku, gdy $v = 1$, kiedy to graf jest bukietem okręgów.) $\boxminus$

Dowód twierdzenia 1 (R. Baer i F. Levi, 1936; rozpatrujemy przypadek gdy indeks k i liczba generatorów n są skończone). Interpretujmy F_n jako $\pi_1(X,x)$, gdzie bukiet $X := \vee_{i=1}^n S_i^1$ jest grafem o n krawędziach i jednym wierzchołku x. Dla zadanej podgrupy $H \leq F_n$ istnieje takie spójne nakrycie $p : (\widetilde{X},\widetilde{x}) \to (X,x)$, że $p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x})) = H$. Z wniosku 1 w §2.2 wiemy, że nakrycie to jest k–krotne, zaś z zadania 2 w §1.2 – że $\widetilde{X}$ jest grafem, mającym kn krawędzi i k wierzchołków. Na podstawie lematu, $\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}) \cong F_{kn-k+1}$. Teza wynika więc z tego, że $H \cong \pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x})$, patrz twierdzenie 2 w §2.1. □

Twierdzenie 2. *Niech grupa G będzie skończenie prezentowalna, a H będzie jej podgrupą skończonego indeksu. Wówczas grupa H też jest skończenie prezentowalna.*

Dowód. Na podstawie twierdzenia 2 w §II.2.4 istnieje spójny, skończony CW-kompleks X, dla którego $\pi_1(X,x) \cong G$. (Punkt $x \in X$ obieramy dowolnie.) Dalej, istnieje takie nakrycie $p : (\widetilde{X},\widetilde{x}) \to (X,x)$, że $p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x})) = H$. Krotność tego nakrycia jest skończona, bo jest równa indeksowi podgrupy H (w G). Na podstawie zadania 2 w §1.2, $\widetilde{X}$ też jest skończonym CW–kompleksem. Tym samym, grupa $\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x})$ jest skończenie prezentowalna; patrz zadanie 1 w §II.2.4. Dowód kończymy jak wyżej. □

Przykład 1. Podajmy inny przykład „algebraicznego” wykorzystania teorii nakryć. Udowodnimy, że grupa wolna F_2 zawiera podgrupę izomorficzną z grupą wolną $F(\mathbb{N})$ o przeliczalnie wielu wolnych generatorach. W tym celu nakrycie torusa płaszczyzną, z przykładu 1d) w §1.1, obetnijmy do „kratownicy” $K := \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Otrzymamy nakrycie $p : K \to L := p(K)$, gdzie L jest podzbiorem torusa, homeomorficznym z $S^1 \vee S^1$; ono zaś wyznacza monomorfizm $p_* : \pi_1(K) \to \pi_1(L) = F_2$. Nietrudno jednak udowodnić, że $\pi_1(K) = F(\mathbb{N})$, i to kończy dowód.

Zadanie uzupełniające 1. Wykorzystać to rozumowanie do wskazania pewnego zbioru wolnych generatorów żądanej podgrupy grupy F_2.

2. Dowód A. Grothendiecka ważnego przypadku twierdzenia Seiferta – van Kampena.

Niech X_1, X_2 i $X_0 := X_1 \cap X_2$ będą otwartymi, łukowo spójnymi podzbiorami przestrzeni X i niech $x \in X_0$. Oznaczmy przekształcenia inkluzji $X_0 \hookrightarrow X_n$ i $X_n \hookrightarrow X$ przez i_n i j_n, odpowiednio ($n = 1, 2$). Teza twierdzenia Seiferta – van Kampena orzeka, że dla każdej grupy H i homomorfizmów $w_n : \pi_1(X_n, x) \to H$ ($n = 1, 2$), spełniających warunek $w_1 \circ i_{1*} = w_2 \circ i_{2*}$, istnieje jedyny taki homomorfizm $w : \pi_1(X,x) \to H$, że $w \circ j_{1*} = w_1$ i $w \circ j_{2*} = w_2$.

Poniżej udowodnimy to twierdzenie wykorzystując wyniki z §3.4, jednak przy dodatkowym założeniu, że X_1 i X_2 są lokalnie łukowo spójne i spełniają warunek małych pętli. (Wówczas X też spełnia te warunki.) Dla wygody oznaczeń, zamiast H piszemy G.

Oznaczenie. Niech G i Π będą grupami, a $u : \Pi \to G$ homomorfizmem grup. Zbiór G wyposażmy w prawe działanie grupy Π, zadane jako $(g, a) \mapsto g \cdot u(a)$ dla $g \in G, a \in \Pi$, gdzie $\cdot$ to mnożenie w G. Otrzymany Π-zbiór oznaczmy przez $G^{(u)}$.

Dowód istnienia homomorfizmu w w twierdzeniu S-vK (przy zadanych G, w_1, w_2). Zgodnie z uwagą 1 w §3.4, dla $n = 1, 2$ istnieje nakrycie $p_n : \widetilde{X}_n \to X_n$, którego włóknem nad x jest $\pi_1(X_n, x)$–zbiór $G^{(w_n)}$. Ograniczając p_n do $\widetilde{X}_n^0 := p_n^{-1}(X_0)$ otrzymujemy nakrycie $p_n^0 : \widetilde{X}_n^0 \to X_0$, którego włókno nad x jest nadal równe G jako zbiór, lecz z działaniem na nim zadanym wzorem $(g, [\lambda]) \mapsto g \cdot w_n(i_{n*}([\lambda]))$ dla $g \in G$ i $[\lambda] \in \pi_1(X_0, x)$. A że $w_1 \circ i_{1*} = w_2 \circ i_{2*}$, to istnieje izomorfizm f nakrycia p_1^0 na nakrycie p_2^0, będący identycznością na włóknie G nad x. (Korzystamy z uwagi 2a) w §3.4.)

Niech teraz $\widetilde{X} := \widetilde{X}_1 \cup_f \widetilde{X}_2$ i $p : \widetilde{X} \to X$ będzie naturalnym rzutowaniem. Nietrudno udowodnić (jest to zadanie), że p jest nakryciem. Tym samym, p wyznacza prawostronne działanie grupy $\pi_1(X, x)$ na zbiorze $p^{-1}(x) = G$; oznaczmy je przez $(g, [\mu]) \mapsto g \diamond [\mu]$. Dla $n = 1, 2$ zachodzi więc

$$g \diamond (j_{n*}([\lambda])) = g \cdot w_n([\lambda]) \text{ dla } [\lambda] \in \pi_1(X_n, x) \text{ i } g \in G.$$

W szczególności, formuła $w([\mu]) = 1_G \diamond [\mu]$ definiuje taką funkcję $w : \pi_1(X, x) \to G$, że $w \circ j_{n*} = w_n$ dla $n = 1, 2$. Pozostaje dowieść, że jest ona homomorfizmem grup.

W tym celu zauważmy, że dany element $h \in G$ wyznacza funkcję $\dot{h} : G \to G$ mnożenia z lewej przez h, tzn. taką, że $\dot{h}(g) = h \cdot g$. Dla $n = 1, 2$, funkcja ta jest ekwiwariantna gdy na G patrzeć jako na $\pi_1(X_n, x)$–zbiór $G^{(w_n)}$ (czy tak?), skąd – znów na podstawie uwagi 2a) w §3.4 – zachodzi $\dot{h} = f_{n|p^{-1}(x)}$ dla pewnego $f_n \in \mathrm{Aut}(p_{|p^{-1}(X_n)})$. Obcięcia f_1 i f_2 do $\widetilde{X}_0 := p^{-1}(X_0)$ są automorfizmami nakrycia $p_0 := p_{|\widetilde{X}_0}$, równymi na włóknie $p_0^{-1}(x) = p^{-1}(x)$. Na podstawie tejże uwagi są one równe na $\widetilde{X}_0$, więc łącznie wyznaczają automorfizm nakrycia p. Tym samym $\dot{h}$ jest, jako obcięcie do $p^{-1}(x)$ tego automorfizmu, przekształceniem ekwiwariantnym względem działania $\diamond$. (Patrz uwaga 0b) w §3.2.) Oznacza to, że dla $g \in G = p^{-1}(x)$ i $[\mu] \in \pi_1(X, x)$ zachodzi

$$h \cdot (g \diamond [\mu]) = (h \cdot g) \diamond [\mu]$$

Przy $g := 1_G$ i $h := 1_G \diamond [\nu]$ uzyskujemy żądaną tożsamość $w([\nu]) \cdot w([\mu]) = w([\nu][\mu])$, dla $[\nu], [\mu] \in \pi_1(X, x)$. (Korzystamy z tego, że $(1_G \diamond [\nu]) \diamond [\mu] = 1_G \diamond ([\nu][\mu])$.) $\square$

Jednoznaczność homomorfizmu w można uzyskać uzupełniając to rozumowanie. Wynika też ona bezpośrednio z poniższego lematu:

Lemat 1. *Przy założeniach i oznaczeniach twierdzenia Seiferta – van Kampena, zbiór* $\mathrm{im}(j_{1*}) \cup \mathrm{im}(j_{2*})$ *generuje* $\pi_1(X, x)$.

Dowód. (Jest to fragment „klasycznego” dowodu tego twierdzenia). Niech $\lambda \in \Omega(X, x)$. Podzielmy odcinek I liczbami $0 = s_0 < s_1 < ... < s_N = 1$ tak drobno, by każdy zbiór

$\lambda([s_{i-1}, s_i])$ był zawarty w X_1 lub w X_2. Dla każdego punktu $y \in \{\lambda(s_i)\}_{i=0}^N$ obierzmy też ścieżkę α_y od x do y, stałą gdy $y = x$ i przyjmującą wartości w X_0 gdy $y \in X_0$, zaś w X_1 lub w X_2 w przeciwnym razie. (Gra rolę łukowa spójność zbiorów X_0, X_1, X_2.)

Zauważmy teraz, że obraz każdej ścieżki $\beta_i := (\alpha_{\lambda(s_{i-1})} \star \lambda_{|[s_{i-1},s_i]}) \star \alpha^{\leftarrow}_{\lambda(s_i)}$ jest zawarty w X_1 lub w X_2. (Uzasadnienie: gdy $\lambda([s_{i-1}, s_i]) \subset X_n$, to $\mathrm{im}(\beta_i) \subset X_n$.) Ponadto, $[\beta_1][\beta_2]...[\beta_N] = [\lambda]$ (Por. dowód stwierdzenia 1a) w §III.1.2; gra rolę to, że ścieżka α_x jest stała.) Zatem $[\lambda] \in \langle \mathrm{im}(j_{1*}) \cup \mathrm{im}(j_{2*})\rangle$. $\square$

<u>Zadanie uzupełniające 1.</u> Niech $p : \widetilde{X} \to X$ będzie nakryciem i $x \in X$. Udowodnić, że:

a) Jeśli $G := p^{-1}(x)$ ma strukturę grupy i $g\cdot(h[\lambda]) = (g\cdot h)[\lambda]$ dla $[\lambda] \in \Pi := \pi_1(X, x)$ i $g, h \in G$, to Π–zbiór $p^{-1}(x)$ jest postaci $G^{(u)}$ dla pewnego homomorfizmu $u : \Pi \to G$.

b) Dla lokalnie łukowo spójnej przestrzeni X prawdziwa jest też implikacja odwrotna.

IV Wstępne informacje o teorii homologii

§ 1. Definicja grup homologii i opis w wymiarach 0 i 1

A. Grupy abelowe wolne

<u>Definicja.</u> a) Niech G będzie grupą. **Komutatorem** elementów $\alpha, \beta \in G$ nazywamy element $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$. **Komutantem** grupy G, oznaczanym przez $[G, G]$, nazywamy podgrupę $\langle\{\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} : \alpha, \beta \in G\}\rangle$, generowaną przez zbiór wszystkich komutatorów. (Jest to podgrupa normalna, patrz niżej zadanie 1.) Grupę ilorazową $G/[G, G]$ nazywamy **abelianizacją** grupy G i oznaczamy G_{ab}. Określone jest **rzutowanie** $p : G \to G_{\mathrm{ab}}$

b) Dla dowolnego zbioru S, abelianizację $F(S)_{\mathrm{ab}}$ grupy wolnej $F(S)$ nazywamy **wolną grupą abelową** generowaną przez S. Jest to więc grupa $\langle S|\{st = ts : s, t \in S\}\rangle$ – lub inaczej, grupa zredukowanych słów w <u>przemiennym</u> alfabecie S. Słowa te zapisujemy addytywnie jako $\sum_{i=1}^k n_i s_i$, zamiast $\prod_{i=1}^k s_i^{n_i}$. (Tu, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, s_i \in S, n_i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ i $s_i \neq s_j$ dla $i \neq j$; gdy $k = 0$, słowo jest *puste* i traktowane jako zero grupy $F(S)_{\mathrm{ab}}$.) [15]

Zadanie 1. Zauważyć, że homomorfizm grup przeprowadza każdy komutator na komutator, więc komutant w komutant. Uzyskać stąd normalność podgrupy $[G, G]$.

Uwaga 1. Gdy $h : G \to A$ jest homomorfizmem grup i grupa A jest abelowa, to $h([G, G]) = \{0\}$, więc $h' \circ p = h$ dla jedynego homomorfizmu $h' : G_{\mathrm{ab}} \to A$.

Uwaga 2. Dla każdej funkcji $v : S \to A$, gdzie A jest grupą abelową, istnieje jedyny homomorfizm $\overline{v} : F(S)_{\mathrm{ab}} \to A$, przedłużajacy v. Istotnie, v przedłuża się do homomorfizmu $F(S) \to A$, a ten jak wyżej wyznacza żądany homomorfizm $F(S)_{\mathrm{ab}} \to A$.

[15] Grupa $F(S)_{\mathrm{ab}}$ jest też izomorficzna z grupą tych funkcji z S w zbiór $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych, które są równe 0 prawie wszędzie. (Działanie to dodawanie funkcji; funkcji f odpowiada słowo $\sum\{f(s)s : f(s) \neq 0\}$.) Gdy $\#S = n < \infty$, to $F(S)_{\mathrm{ab}} = \mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}$ (n składników).

Odnotujmy, że $\overline{v}(\sum_{i=1}^{k} n_i s_i) = \sum_{i=1}^{k} n_i v(s_i)$ dla każdego słowa $\sum_{i=1}^{k} n_i s_i \in F(S)_{\mathrm{ab}}$.

B. Homologie singularne (definicja)

Dla utrzymania zgodności z większością podręczników omawiających homologie singularne, osi iloczynu kartezjańskiego $\mathbb{R}^n$ numerujemy liczbami $0, \ldots, n-1$ (a nie $1, \ldots, n$). Przez Δ^n oznaczamy standardowy n–sympleks w $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Delta^n := \{t = (t_0, ..., t_n) \in I^{n+1} : t_0 + ... + t_n = 1\}$$

Gdy $0 \leq k \leq n$, określamy też włożenie $\iota_k : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ tak, by jego złożenie z rzutowaniem $\mathbb{R}^{n+1}$ na $\mathbb{R}^n$ wzdłuż k-tej osi było identycznością:

$$\iota_k(t_0, ..., t_{n-1}) = (t'_0 ..., t'_n), \text{ gdzie } t'_j = t_j \text{ dla } j < k, \;\; t'_k = 0 \text{ i } t'_j = t_{j-1} \text{ dla } j > k.$$

Definicja. a) Przekształcenia z Δ^n w przestrzeń topologiczną X nazywamy n–**sympleksami singularnymi w** X. Zbiór wszystkich n–sympleksów singularnych oznaczymy przez X^{Δ^n}, a wolną grupę abelową, generowaną przez X^{Δ^n} oznaczymy przez $S_n(X)$. Elementy tej grupy nazywamy n–**łańcuchami** w X. Gdy $n = 0$, utożsamiamy X^{Δ^0} z X.

b) Dla $n \geq 1$ i n–sympleksu singularnego $\sigma : \Delta^n \to X$ oraz $k = 0, ..., n$ zachodzi $\sigma \circ \iota_k \in X^{\Delta^{n-1}}$, więc $\partial\sigma := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sigma \circ \iota_k$ jest poprawnie określonym $(n-1)$–łańcuchem. Zgodnie z uwagą 2, otrzymana funkcja $\partial : X^{\Delta^n} \to S_{n-1}(X)$ jednoznacznie przedłuża się do homomorfizmu grupy $S_n(X)$ w $S_{n-1}(X)$, który też oznaczymy przez ∂.

c) Obraz tego homomorfizmu oznaczymy przez $B_{n-1}(X)$, a jego jądro przez $Z_n(X)$. Są to podgrupy abelowych grup $S_{n-1}(X)$ i $S_n(X)$, odpowiednio.

d) Przyjmujemy, że na $S_0(X)$ operator ∂ jest zerowy, wobec czego $Z_0(X) = S_0(X)$.

Uwaga 3. Dla $n = 2$ naprzemienny wybór znaków w definicji operatora ∂ wyjaśnia się tym, że gdy odcinek Δ^1 i brzeg sympleksu Δ^2 zorientować tak, by włożenie ι_2 zachowywało orientację, to ι_1 ją odwróci, a ι_0 zachowa. (Podobnie jest dla $n > 2$.)

Zadanie 2. Dowieść, że $B_n(X) \subset Z_n(X)$.

Oznaczenia i nazwy.

a) $B_n(X)$ nazywamy grupą n-brzegów w X, a $Z_n(X)$ grupą n–cykli w X.

b) Dla każdego n-łańcucha φ, warstwę $\varphi + B_n(X)$ oznaczymy przez $\langle\varphi\rangle$ i nazwiemy jego **klasą homologii**. Dwa n–łancuchy są **homologiczne**, gdy są w tej samej klasie (równoważnie: gdy ich różnica jest n-brzegiem).

c) Jeśli $X \neq \emptyset$, to grupę ilorazową $Z_n(X)/B_n(X)$ oznaczamy przez $H_n(X)$ i nazywamy n**-tą grupą homologii** przestrzeni X.[16] Jest to więc zbiór klas homologii n-cykli w X, z działaniami grupy ilorazowej. Przyjmujemy też $H_n(\emptyset) = \{0\}$.

Gdy $\varphi = \sum_i n_i\sigma_i$ jest n-łańcuchem w X i $f : X \to Y$ jest przekształceniem, to $f \circ \varphi := \sum n_i(f \circ \sigma_i)$ jest n–łancuchem w Y. Jest widoczne, że $\partial_Y(f \circ \varphi) = f \circ \partial_X\varphi$,

[16] Ściślej, jest to n-ta grupa homologii singularnych przestrzeni X, o współczynnikach w $\mathbb{Z}$. Na potrzeby tego paragrafu upraszczamy jednak te nazwy.

gdzie ∂_X i ∂_Y to operatory brzegu na $S_n(X)$ i $S_n(Y)$, odpowiednio. Stąd zaś wynika, że przyporządkowanie $\varphi \mapsto f \circ \varphi$ przeprowadza klasę homologii $\langle\varphi\rangle$ łańcucha φ w klasę $\langle f\circ\varphi\rangle$ łańcucha $f\circ\varphi$. W szczególności, dla $X \neq \emptyset$ przyporządkowanie to określa funkcję z $H_n(X)$ w $H_n(Y)$, którą oznaczymy przez f_* . (Jest jasne, czym jest f_* gdy $X = \emptyset$.)

Zadanie 3. a) Dowieść, że f_* jest homomorfizmem grup abelowych, a przyporządkowania $X \mapsto H_n(X)$ i $C(X,Y) \ni f \mapsto f_*$ określają funktor kowariantny z kategorii przestrzeni topologicznych w kategorię grup abelowych.

b) Dowieść, że $H_n(X) = \oplus_\alpha H_n(X_\alpha)$, gdzie X_α przebiega wszystkie składowe łukowej spójności przestrzeni X.

C. Homologie w wymiarach 0 i 1.

Wygodnie bywa ścieżkę w X traktować jako singularny 1-sympleks. W tym celu utożsamijmy Δ^1 z odcinkiem $I = [0,1]$ (afinicznie, tak by $(0,1) \leftrightarrow 0$ i $(1,0) \leftrightarrow 1$), a tym samym zbiór X^{Δ^1} singularnych 1-sympleksów w X – ze zbiorem X^I ścieżek w X. Niżej będziemy traktować X^I i X^{Δ^1} wymiennie, dokonując milcząco tych utożsamień.

Przy utożsamieniu X^I z X^{Δ^1}, grupa 1-łańcuchów $S_1(X)$ jest abelową grupą wolną rozpiętą na zbiorze X^I wszystkich ścieżek w X, i podobnie $S_0(X) = F(X)_{\mathrm{ab}}$. Operator ∂ jest na $S_1(X)$ wyznaczony tym, że $\partial\tau = \tau(1) - \tau(0) \in S_0(X)$ dla $\tau \in X^I$.

Zadanie 4. Dowieść, że jeśli przestrzeń $X \neq \emptyset$ jest łukowo spójna, to $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

Przejdźmy do zbadania grupy $H_1(X)$. Wykorzystamy następujący lemat:

Lemat 1. *Niech ścieżki $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in X^I$ będą takie, że $(\alpha_2 \star \alpha_1^{\leftarrow}) \star \alpha_0$ istnieje i $[(\alpha_2 \star \alpha_1^{\leftarrow}) \star \alpha_0] = [c_x]$, gdzie $x = \alpha_2(0)$. Wówczas $\langle\alpha_0\rangle + \langle\alpha_2\rangle = \langle\alpha_1\rangle$.*

Dowód. Niech $\delta\Delta^2 := \{(x_0, x_1, x_2) \in \Delta^2 : \min_i x_i = 0\}$ oznacza brzeg sympleksu Δ^2. Ponieważ $\gamma := (\alpha_2\star\alpha_1^{\leftarrow})\star\alpha_0$ istnieje i jest ścieżką zamkniętą, to z definicji włożeń $\Delta^1 \to \Delta^2$ wynika istnienie takiego przekształcenia $g : \delta\Delta^2 \to X$, że $g \circ \iota_i = \alpha_i$ dla $i = 0, 1, 2$. A że ponadto $\gamma \sim_\partial c_x$, to odwzorowanie g jest nieistotne. Można je więc przedłużyć do $\overline{g} : \Delta^2 \to X$, otrzymując $\langle\alpha_0\rangle - \langle\alpha_1\rangle + \langle\alpha_2\rangle = \langle\partial\overline{g}\rangle = 0$ (bo $\partial\overline{g} \in B_1(X)$). $\square$

Wniosek 1. *a) Jeśli $\alpha, \beta \in X^I$ i istnieje $\alpha \star \beta$, to $\langle\alpha \star \beta\rangle = \langle\alpha\rangle + \langle\beta\rangle$.*

b) W szczególności, $\langle c_x\rangle = 0$ i $\langle\alpha^{\leftarrow}\rangle = -\langle\alpha\rangle$ dla $x \in X$ i $\alpha \in X^I$.

c) Jeśli $\alpha, \beta \in X^I$ i $\alpha \sim_\partial \beta$, to $\langle\alpha\rangle = \langle\beta\rangle$.

Dowód. Przyjmując w lemacie $\alpha_0 := \alpha$, $\alpha_2 = \beta$ i $\alpha_1 := \alpha\star\beta$ uzyskamy a), zaś b) wynika z a) przy $\alpha = c_x$ i następnie $\beta = \alpha^{\leftarrow}$. A gdy w lemacie weźmiemy $\alpha_0 := \alpha$, $\alpha_2 := \beta^{\leftarrow}$ i $\alpha_1 := c_x$, gdzie $x = \alpha(0)$, i skorzystamy z b), to otrzymamy c). $\square$

Każda ścieżka zamknięta $\lambda \in \Omega(X, x)$ może być traktowana jako 1–cykl w X, więc wyznacza element grupy $H_1(X)$, i to zależny tylko od klasy $[\lambda] \in \pi_1(X, x)$. (Korzystamy z wniosku 1c).). Uzyskana funkcja z $\pi_1(X,x)$ w $H_1(X)$ jest homomorfizmem na postawie wniosku 1a), więc wyznacza taki homomorfizm $u : \pi_1(X,x)_{\mathrm{ab}} \to H_1(X)$, że $u(p([\lambda])) = \langle\lambda\rangle$ dla $\lambda \in \Omega(X,x)$. (Tym razem wykorzystano uwagę 1 i abelowość grupy $H_1(X)$.)

Twierdzenie 1 (W. Hurewicz, 1936). [17] *Gdy przestrzeń X jest łukowo spójna, to powyższy homomorfizm $u : \pi_1(X,x)_{\mathrm{ab}} \to H_1(X)$ jest izomorfizmem grup (w tym jest „na").*

Dowód. Zdefiniujemy homomorfizm $w : H_1(X) \to \pi_1(X,x)_{\mathrm{ab}}$, odwrotny do u. W tym celu ustalmy rodzinę ścieżek $\{\alpha_{x'}\}_{x'\in X}$ taką, że

$\alpha_{x'}(0) = x$ i $\alpha_{x'}(1) = x'$ dla $x' \in X$, gdzie (dla ułatwienia) α_x jest ścieżką stałą c_x. Następnie, dla każdej ścieżki $\tau \in X^I$ przyjmijmy $v(\tau) := \alpha_{\tau(0)} \star \tau \star \alpha^{\leftarrow}_{\tau(1)} \in \Omega(X,x)$. Ponieważ X^I jest zbiorem przemiennych wolnych generatorów grupy łańcuchów $S_1(X)$, to istnieje taki homomorfizm $\overline{v} : S_1(X) \to \pi_1(X,x)_{\mathrm{ab}}$, że $\overline{v}(\tau) = p([v(\tau)])$ dla $\tau \in X^I$. (Tu $p : \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,x)_{\mathrm{ab}}$ nadal oznacza rzutowanie ilorazowe. Patrz uwaga 2.)

Zauważmy teraz, że $\overline{v}(\varphi) = 0$ dla $\varphi \in B_1(X)$. Istotnie, wystarczy tego dowieść gdy $\varphi = \partial f$ i $f \in X^{\Delta^2}$. Przy $\tau_i = f \circ \iota_i$ dla $i = 0,1,2$, mamy wtedy $\overline{v}(\varphi) = p([v(\tau_2)]) - p([v(\tau_1)]) + p([v(\tau_0)]) = p([\lambda])$, gdzie $\lambda = v(\tau_2) \star v(\tau_1^{\leftarrow}) \star v(\tau_0)$. (Gra rolę homomorficzność p.) Dla $\mu := \tau_2 \star \tau_1^{\leftarrow} \star \tau_0$ jest też widoczne, że $[\lambda] = [\alpha_{\mu(0)} * \mu * \alpha^{\leftarrow}_{\mu(1)}]$. Ale $\mu(1) = \mu(0)$ i $\mu \sim_\partial c_{\mu(0)}$, bo f zaświadcza, że wyznaczone przez μ przekształcenie $\partial\Delta^2 \to X$ przedłuża się na Δ^2. Stąd $[\lambda] = [c_x]$, wobec czego $p([\lambda]) = 0$.

Skoro $\overline{v}(B_1(X)) = \{0\}$, to $\langle\varphi\rangle \mapsto \overline{v}(\varphi)$ poprawnie określa homomorfizm z $S_1(X)/B_1(X)$ w $\pi_1(X)_{ab}$, którego obcięcie do $H_1(X) = Z_1(X)/B_1(X)$ oznaczmy przez w. Dla $\gamma \in \Omega(X,x)$ zachodzi więc $w(\langle\gamma\rangle)) = p([v(\gamma)]) = p([\alpha_x \star \gamma \star \alpha_x^{\leftarrow}]) = p([\gamma])$ (bo $\alpha_x = c_x$); a że, z definicji, $\langle\gamma\rangle = u(p([\gamma])$ i p jest „na", to $w \circ u$ jest identycznością. Pozostaje dowieść, że jest nią $u \circ w$ – czyli, że $u(w(\langle\tau\rangle)) = \langle\tau\rangle$ dla każdego 1-cyklu τ.

W tym celu dla każdego 0-łańcucha $s = \sum n_i x_i$ przyjmijmy $\Phi(s) = \sum_i n_i \alpha_{x_i}$, gdzie $\{\alpha_{x'}\}_{x'\in X}$ to obrana wcześniej rodzina ścieżek (interpretowanych jako 1-łańcuchy). Dla $\tau \in X^I$, wynikła z definicji i wniosku 1 równość $u(\overline{v}(\tau)) = \langle\tau + \alpha_{\tau(0)} - \alpha_{\tau(1)}\rangle$ zapisuje się tak: $u(\overline{v}(\tau)) = \langle\tau - \Phi(\partial\tau)\rangle$. Z addytywności ∂ , Φ , u i $\overline{v}$ otrzymujemy dalej tę równość dla τ będących już dowolnym 1-łańcuchem. Gdy zaś τ jest cyklem, to $\partial\tau = 0$, wobec czego $u(\overline{v}(\tau)) = \langle\tau\rangle$. Kończy to dowód twierdzenia, bo $\overline{v}(\tau) = w(\langle\tau\rangle)$. □

Wniosek 2. *Gdy X jest skończonym CW-kompleksem spójnym, to $H_1(X)$ jest skończenie generowaną grupą abelową.*

Wniosek 2 wynika bezpośrednio zadania 1 w §II.2.4 i twierdzenia 1. Warto tu przypomnieć, że z Algebry znamy twierdzenie o klasyfikacji wymienionych we wniosku grup.

[17] Niektórzy autorzy, m.in Rokhlin i Novikov, przypisują ten wynik już Poincarému. Jest on jednak powszechnie wiązany z nazwiskiem Hurewicza, który odkrył jego odpowiednik w wyższych wymiarach.