Dodatek

1. Przekształcenia ilorazowe (przypomnienie z Topologii 1)

Niech dane będą przekształcenia $f : X \to Y$ i $g : X \to Z$, przy czym f jest „na"; pytamy, czy istnieje przekształcenie $u : Y \to Z$ takie, że $u \circ f = g$. Gdy zapomnimy o ciągłości, funkcja taka istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy g zlepia do punktu każdy zbiór $f^{-1}(y)$, dla $y \in Y$. Gdy u istnieje, to $u(y) = g(f^{-1}(y))$ dla $y \in Y$; musimy jednak zbadać, czy formuła ta zadaje funkcję ciągłą.

Wygodny warunek wystarczający dają poniższa definicja i uwaga:

Definicja. Przekształcenie $f : X \to Y$ nazywamy **ilorazowym**, jeśli jest „na" i dla każdego zbioru $Y_0 \subset Y$, gdy zbiór $f^{-1}(Y_0)$ jest domknięty w X, to zbiór Y_0 jest domknięty w Y.

Gdy słowo „domknięty" dwukrotnie zamienimy na „otwarty", to otrzymamy definicję równoważną.

Uwaga 1. Jeśli f jest przekształceniem ilorazowym, a $g = u \circ f$ jest ciągłe, to i u jest ciągłe. Istotnie, mamy dowieść, że gdy założenia te są spełnione i Z_0 jest zbiorem domkniętym w Z, to zbiór $Y_0 := u^{-1}(Z_0)$ jest domknięty w Y. Wobec „ilorazowości" f, sprowadza się to do pytania, czy zbiór $f^{-1}(Y_0)$ jest domknięty w X. (Gra rolę m.in. to, że f jest „na".) Jednak $f^{-1}(Y_0) = f^{-1}(u^{-1}(Z_0)) = (u \circ f)^{-1}(Z_0) = g^{-1}(Z_0)$, co jest zbiorem domkniętym w X na podstawie ciągłości g.

Tym samym jeśli u istnieje i przekształcenie f jest ilorazowe, to ciągłość u wynika z powyższej uwagi. Warto więc pamiętać o następujących kryteriach pomagających uzasadnić ilorazowość f (pierwsze jest znane z Topologii 1, drugie omówimy jeśli starczy czasu, ale tak czy siak można z niego korzystać):

1. Surjektywne przekształcenie, które jest otwarte lub jest domknięte, jest ilorazowe. W szczególności, przekształcenie przestrzeni zwartej na przestrzeń Hausdorffa, jest ilorazowe (bo jest domknięte).
2. Gdy przekształcenie $f : X \to Y$ jest ilorazowe, a T jest przestrzenią zwartą (ogólniej: lokalnie zwartą), to przekształcenie $f \times \mathrm{id}_T : X \times T \to Y \times T$ też jest ilorazowe. Jest to **twierdzenie Whiteheada**; dowód nie jest oczywisty, lecz go pomijam.
3. Gdy $(X, \mathcal{T}_X)$ jest przestrzenią topologiczną, a $f : X \to Y$ funkcją „na", to Y można wyposażyć w topologię $f_*(\mathcal{T}_X) := \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X\}$. (Nazywamy ją topologią **wypchniętą przez** f lub **ilorazową**.) Wówczas $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, f_*(\mathcal{T}_X))$ staje się przekształceniem ilorazowym.

2. Przestrzenie rozkładu

Definicja. a) **Rozkładem** zbioru X nazywamy pokrycie $\mathcal{D}$ tego zbioru, złożone ze zbiorów parami rozłącznych. Wyznaczone jest **naturalne rzutowanie** $\pi_{\mathcal{D}} : X \to \mathcal{D}$, które każdemu punktowi $x \in X$ przyporządkowuje jedyny zbiór $D \in \mathcal{D}$ taki, że $x \in D$.

c) Gdy ponadto X jest przestrzenią topologiczną, to zbiór $\mathcal{D}$ (będący zbiorem zbiorów) można wyposażyć w topologię $\mathcal{T}$ wypchniętą przez $\pi_{\mathcal{D}}$ z X do $\mathcal{D}$, jedyną, czyniącą $\pi_{\mathcal{D}}$ przekształceniem ilorazowym. Przestrzeń $(\mathcal{D}, \mathcal{T})$ nazywamy **przestrzenią rozkładu** $\mathcal{D}$ i oznaczamy przez $X/\mathcal{D}$, myśląc o niej jako o przestrzeni powstałej z X przez „zgniecenie" każdego zbioru $D \in \mathcal{D}$ do punktu, przy czym różnych zbiorów z $\mathcal{D}$ do różnych punktów. (Bezpośredni opis topologii w $X/\mathcal{D}$ jest taki: zbiór U jest otwarty w $X/\mathcal{D}$ wtedy i tylko wtedy, gdy otwarty w X jest zbiór $\pi_{\mathcal{D}}^{-1}(U) = \bigcup\{D : D \in U\}$.)

d) Nierzadko, gdy mowa o przestrzeni rozkładu $\mathcal{D}$, wymienia się tylko zbiory $D \in \mathcal{D}$, liczące więcej niż jeden punkt. I tak, dla rodziny $\mathcal{D}_0$ parami rozłącznych podzbiorów przestrzeni X, pisze się $X/\mathcal{D}_0$ w miejsce $X/\mathcal{D}$, gdzie $\mathcal{D} := \mathcal{D}_0 \cup \{\{x\} : x \in X \setminus \bigcup \mathcal{D}_0\}$.

e) Ponadto, dla $A \subset X$ pisze się X/A w miejce $X/\{A\}$.

Przykład 1. Wyżej, $X/A = \{A\} \cup (X \setminus A)$ (dlaczego?) i zbior $U \subset X/A$ jest otwarty, jeśli jest podzbiorem przestrzeni $X \setminus A$, otwartym w X, lub jeśli $\{A\} \in U$ i zbiór $(U \setminus \{A\}) \cup A$ jest otwarty w X. Stąd naturalne rzutowanie $X \to X/A$ przekształca zbiór $X \setminus A$ homeomorficznie na $X/A \setminus \{A\}$; ponadto, X/A jest przestrzenią normalną, jeśli X jest przestrzenią normalną i $A = \overline{A}$ (dlaczego?). W szczególności, gdy $A = \overline{A}$ i przestrzeń X jest zwarta, to X/A też jest zwarta, jako obraz zwartej przestrzeni X przy rzutowniu $\pi : X \to X/A$ na przestrzeń, która jest Hausdorffa (bo jest normalna).

Uwaga 1. Gdy przestrzeń X jest spójna, to $X/\mathcal{D}$ też jest, jako obraz przestrzeni spójnej przy ciągłym przekształceniu $\pi_{\mathcal{D}}$. Implikacja odwrotna jest prawdziwa jeśli wszystkie zbiory $D \in \mathcal{D}$ są spójne.

Przestrzeń $X/\mathcal{D}$, z uwzględnieniem jej topologii, nie zawsze łatwo jest sobie wyobrazić. Może ona mieć złe własności (np. nie być przestrzenią Hausdorffa), nawet, gdy przestrzeń X jest „porządna". Sporym ułatwieniem bywa następujący lemat:

Lemat 1. *Niech $\mathcal{D} = \{h^{-1}(z) : z \in Z\}$ dla pewnego ciągłego przekształcenia $h : X \to Z$ przestrzeni X w przestrzeń Hausdorffa Z. Wówczas:*

a) $X/\mathcal{D}$ jest przestrzenią Hausdorffa, przy tym homeomorficzną z $h(X)$, jeśli przekształcenie h jest ilorazowe.

b) Jeśli istnieje taki zwarty zbiór $K \subset X$, że $K \cap D \neq \emptyset$ dla każdego $D \in \mathcal{D}$, to przestrzeń $X/\mathcal{D}$ jest zwarta (i homeomorficzna z $h(X) = h(K)$).

Dowód. Z założenia wynika istnienie bijekcji $g : X/\mathcal{D} \to h(X)$ takiej, że $g \circ \pi_{\mathcal{D}} = h$. Na podstawie uwagi 2, bijekcja ta jest ciągła (wobec czego przestrzeń $X/\mathcal{D}$ jest Hausdorffa, w ślad za Z), zaś gdy przekształcenie h jest ilorazowe, to jest homeomorfizmem. To dowodzi a). By uzyskać b) pozostaje zauważyć, że gdy $D \cap K \neq \emptyset \ \forall D \in \mathcal{D}$, to $h(K) = h(X)$ i $\pi_{\mathcal{D}}(K) = \pi_{\mathcal{D}}(X)$, przy czym ze zwartości K i własności (T2) przestrzeni Z i $X/\mathcal{D}$ wynika, że przekształcenia $h_{|K}$ i $(\pi_D)_{|K}$ są ilorazowe (bo są domknięte). ⊟

Wniosek 1. *Gdy $X/\mathcal{D}$ jest przestrzenią Hausdorffa, to dla każdego zbioru zwartego $L \subset X$, jego obraz w $X/\mathcal{D}$ jest homeomorficzny z $L/\mathcal{D}'$, gdzie $\mathcal{D}' = \{D \cap L : D \in \mathcal{D}\}$.*

Dowód. Przy $Z := \pi_{\mathcal{D}}(L)$ i $h := (\pi_{\mathcal{D}})_{|L} : L \to Z$ zachodzi $\mathcal{D}' = \{h^{-1}(z) : z \in Z\}$. ⊟

Przykład 2. a) Przestrzeń $[-1,1]/\{-1,1\}$ jest homemomorficzna z okręgiem $S^1 = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$ na płaszczyźnie $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$. Wynika to tak z przykładu 1, jak i z lematu, przy $h(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t))$ dla $t \in [0,1]$ – bo $\{h^{-1}(s)\}_{s \in S^1} = \{-1,1\} \cup \{\{t\}\}_{t \in (-1,1)}$.

b) Niech $\mathcal{D} = \{D_t : t \in [0,1)\}$, gdzie $D_t = \{t+n : n \in \mathbb{Z}\}$. Przestrzeń $\mathbb{R}/\mathcal{D}$ jest nadal homeomorficzna z okręgiem S^1 –co w podobny sposób wynika z części c) lematu, przy $K = [0,1]$ i $h(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ dla $t \in \mathbb{R}$.

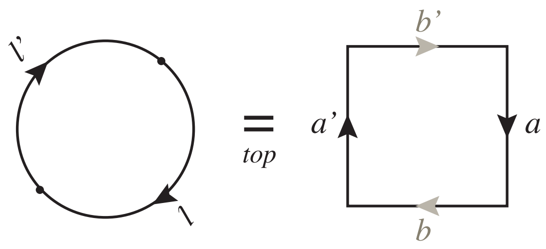
c) Ogólniej niż w a), przestrzeń $\overline{B^n}/S^{n-1}$ jest homeomorficzna z S^n. (Dlaczego?)

d) W sferze S^n rozważmy rodzinę zbiorów $\mathcal{D} = \{\{x, -x\} : x \in S^n\}$. Przestrzeń $S^n/\mathcal{D}$ nazywana jest n–**wymiarową przestrzenią rzutową** i oznaczana przez P^n. Gdy przyjąć $h(x) = (x_i x_j)_{i \leq j}$ dla $x = (x_i)_{i=1}^{n+1} \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, to przy $m = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ otrzymamy takie ciągłe przekształcenie $h : S^n \to \mathbb{R}^m$, że $\mathcal{D} = \{h^{-1}(y) : y \in \mathrm{im}(h)\}$. Ponieważ $\mathbb{R}^m$ jest przestrzenią Hausdorffa, więc z lematu 1b) wynika, że przestrzeń P^n jest homeomorficzna ze zwartą (ze względu na zwartość sfery) podprzestrzenią $\mathrm{im}(h)$ przestrzeni $\mathbb{R}^m$, a więc jest zwarta i metryzowalna.

Zadanie 1. Gdy $n = 2$, to samo pozostaje prawdą przy $m = 6$ zastąpionym przez 4, a h określonym wzorem $h(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - x_2^2, x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3)$.

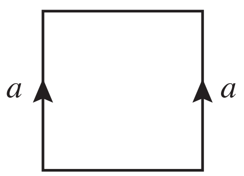
W sferze $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \leq 1\}$ zbiór $K = \{x \in S^n : x_{n+1} \geq 0\}$ przecina każdy zbiór $\{-x, x\}$ rozkładu $\mathcal{D}$, wobec czego przestrzeń P^n jest homeomorficzna z $K/\mathcal{D}'$, gdzie $\mathcal{D}' = \{D \cap K : D \in \mathcal{D}\}$. Elementami rozkładu $\mathcal{D}'$ przestrzeni K, zawierajacymi więcej niż 1 punkt, są zbiory $\{x, -x\}$, dla $x = (x_1, ..., x_n, 0) \in K$. Traktując kulę domkniętą $\overline{B^n}$ jako obraz zbioru K przy rzutowaniu wzdłuż osi Ox_{n+1} stwierdzamy więc, że $P^n = \overline{B^n}/\mathcal{E}$, gdzie $\mathcal{E} = \{\{x, -x\} : x \in S^{n-1}\}$.

Przykład 3. a) Weźmy wyżej $n = 2$. Ponieważ istnieje homeomorfizm kuli $\overline{B^2}$ na kwadrat $[-1,1]^2$, który zachowuje antypodyzm względem zera, więc przestrzeń P^2 jest homeomorficzna z $[-1,1]^2/\mathcal{F}$, gdzie $\mathcal{F} = \{\{x,-x\} : \max(|x_1|,|x_2|) = 1\}$. Oddajemy to rysunkiem oznaczajacym, że identyfikujemy każdy punkt x z $u(x)$, gdzie u jest afinicznym homeomorfizmem odcinka a na a' lub odcinka b na b', zachowującym zaznaczone orientacje odcinków. (W dalszych rysunkach „primy” będą opuszczane.)

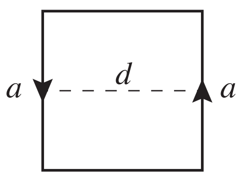


powierzchnia rzutowa P^2

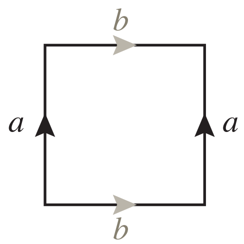
b) Wziąć poniższe rysunki jako definicje podpisanych pod nimi zbiorów:



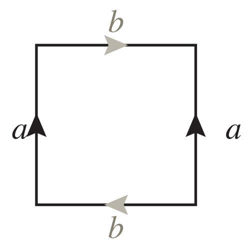
powierzchnia boczna walca



wstęga Möbiusa



torus



butelka Kleina

Zadanie 2. a) Niech $h(s,t) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), t)$. Sprawdzić, że funkcja $h : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ wyznacza na $[0,1]^2$ ten sam rozkład $\{h^{-1}(z) : z \in \mathrm{im}(h)\}$, co użyty wyżej do zdefiniowania powierzchni bocznej walca. Stąd i z lematu 1 wywnioskować, że powierzchnia ta jest homeomorficzna z podprzestrzenią $\mathrm{im}(h)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

b) To samo, przy powierzchni bocznej walca zastąpionej przez torus, zaś funkcji h zdefiniowanej wzorem $h(s,t) =$ ...... Dowieść też, że powierzchnia boczna walca jest homeomorficzna z $S^1 \times [0,1]$, a torus – z $S^1 \times S^1$.

3. Doklejanie wzdłuż przekształcenia

Definicja. Niech X i Y będą rozłącznymi przestrzeniami topologicznymi i niech $f : A \to Y$ będzie ciągłym przekształceniem domkniętej podprzestrzeni A przestrzeni X. Możemy wtedy rozważyć następującą rodzinę $\mathcal{D}$ parami rozłącznych podzbiorów przestrzeni $X \cup Y$:

$$\mathcal{D} = \{f^{-1}(y) \cup \{y\} : y \in Y\}$$

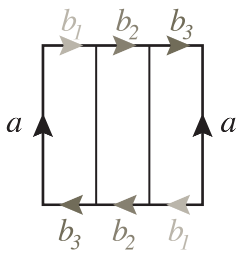
Przestrzeń ilorazową $(X \cup Y)/\mathcal{D}$ oznaczamy $X \cup_f Y$ i nazywamy wynikiem **doklejenia przestrzeni X do Y wzdłuż przekształcenia f**. Określone jest **naturalne rzutowanie** $X \cup Y \to X \cup_f Y$.

Założenie rozłączności zbiorów X i Y można łatwo ominąć, utożsamiając X z $X' := X \times \{0\}$, a Y z $Y' := Y \times \{1\}$. (Dlatego na ogół nie żąda się, by było ono spełnione.)

<u>Przykład 1.</u> Niech X i Y będą domkniętymi podzbiorami przestrzeni Z i $A := X \cap Y$. Dla $i_A : A \to Y$ oznaczającego naturalne włożenie twierdzimy, że przestrzeń $X \cup_{i_A} Y$ jest homeomorficzna z $X \cup Y$. Wynika to z lematu 1, bo przekształcenie $h : X' \cup Y' \to X \cup Y$, gdzie X' i Y' są jak wyżej i $h(x, 0) = x, h(y, 1) = y$, jest domknięte i ma te same przeciwobrazy punktów, co naturalne rzutowanie $X' \cup Y' \to X' \cup_{i_A} Y'$. Teza jest też prawdziwa, gdy oba zbiory X, Y są otwarte w Z (bo wtedy h jest otwarte).

Zadanie 1. a) Na podstawie poniższego rysunku stwierdzić, że butelka Kleina K jest homeomorficzna z sumą wstęgi Möbiusa i powierzchni bocznej walca, mającymi wspólny brzeg.

(K jest też sumą dwóch wstęg Möbiusa o wspólnym brzegu; uzasadnię to na ćwiczeniach.)



b) Stwierdzić podobnie, że płaszczyzna rzutowa P^2 jest sumą wstęgi Möbiusa i dysku, mającymi wspólny brzeg (w P^2). W a) i b), wspólny brzeg jest homeomorficzny z S^1.

c) Co otrzymamy ze wstęgi Möbiusa, gdy ją rozetniemy wzdłuż linii d? Jakich identyfikacji można dokonać w powierzchni bocznej walca, by otrzymać wstęgę Möbiusa?

d) Co otrzymamy z przestrzeni P^2, torusa i butelki Kleina, gdy je podobnie rozetniemy? (Przy butelce Kleina są dwa przypadki.)

e) Z czym jest homeomorficzna przestrzeń ilorazowa $M/\partial M$, gdzie ∂M to „brzeg" wstęgi Möbiusa M?

Zadanie 2. a) Niech $D = I^2 \subset \mathbb{R}^2$ i $D \times D \subset \mathbb{R}^4$. Korzystając ze wzoru

$$\mathrm{Fr}(D \times D) = \mathrm{Fr}(D) \times D \cup D \times \mathrm{Fr}(D)$$

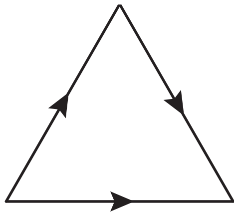
dowieść, że sfera S^3 jest sumą dwóch pełnych torusów, sklejonych brzegami.

b)* Wywnioskować, że gdy z przestrzeni $\mathbb{R}^3$ wyjąć wnętrze standardowo położonego pełnego torusa, to otrzymamy przestrzeń homeomorficzną z pełnym torusem bez punktu.

c)* Sprobować wyobrazić to sobie!

<u>Problem 1.</u> W torusie $T = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$ definiujemy rodzinę zbiorów $\mathcal{D} = \{\{x, -x\} : x \in T\}$. (Tu $-$ odnosi się do $\mathbb{R}^4$.) Z czym jest homeomorficzna przestrzeń $T/\mathcal{D}$?

<u>Problem 2.</u> Wobrazić sobie **trąbkę Borsuka**, zdefiniowaną na rysunku, lub zrobić jej model plastelinowy. Czy trąbka ta jest przestrzenią ściągalną ?



trąbka Borsuka

Uwaga 1. Na koniec zauważmy, że każda relacja równoważności $\sim$ w X wyznacza rozkład przestrzeni X na klasy abstrakcji tej relacji. Przestrzeń tego rozkładu oznaczamy $X/\sim$ i nazywamy **przestrzenią ilorazową relacji** $\sim$.

4. Geometryczny opis wyniku doklejenia wzdłuż przekształcenia

Gdy w p. 3 obie przestrzenie X i Y są zwartymi podzbiorami przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^k$, to możemy się pokusić, by przestrzeń $X \cup_f Y$ też zanurzyć w pewnej przestrzeni $\mathbb{R}^l$, dla dostatecznie dużego l. W tym celu przedłużmy f do przekształcenia $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}^n$ i obierzmy $\lambda : X \to [0,1]$ tak, by $\lambda^{-1}(0) = A$. (N.p., niech $\lambda(x) = \mathrm{dist}(x, A)/\mathrm{diam}(X)$.) Pierwsza próba polega na rozpatrzeniu przekształcenia $p : X \to \mathbb{R}^l$ określonego zwzorem $p(x) = (1 - \lambda(x))\widetilde{f}(x) + \lambda(x)x$. Wprowadza ono żądane identyfikacje każdego punktu $a \in A$ z punktem $f(a) \in Y$, lecz może też się zdarzyć, że $p(x) \in Y$, choć $x \notin A$, jak również, że $p(x_1) = p(x_2)$, choć $x_1 \neq x_2$ i $x_1 \notin A$. Poprawiona próba polega na wzięciu $l = 2k+1$ i imieszczeniu (kopii) X i Y tak, by odcinki $[x, \widetilde{f}(x)]$ i $[x', \widetilde{f}(x')]$ przecinały się tylko wtedy, gdy $x = x'$ lub $x, x' \in A$ i $f(x) = f(x')$. Można to osiągnąć na różne sposoby; jednym z nich jest przyjęcie

$$q(x) = (\lambda(x)x, (1 - \lambda(x))\widetilde{f}(x), \lambda(x)) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \text{ dla } x \in X$$

Wówczas za $X \cup_f Y$ należy przyjąć $q(X) \cup Y'$, gdzie $Y' = \{0_{\mathbb{R}^k}\} \times Y \times \{0_{\mathbb{R}}\}$, zaś rzutowanie $X \sqcup Y \to X \cup_f Y$ należy interpretować jako przekształcenie, które na X jest równe q, a na Y jest zanurzeniem $y \mapsto (0_{\mathbb{R}^l}, y, 0_{\mathbb{R}})$.