Używane oznaczenia:

• Znak $\subset$ dopuszcza równość zbiorów; piszę $\subsetneq$ gdy ją wykluczam.

• $\mathbb{F}$ –ciało skalarów rozważanej przestrzeni wektorowej (=liniowej).

• $\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{E}, \mathcal{B}$ – bazy uporządkowane (skończone!).

• $[\mathbf{v}]_{\mathcal{V}}$ – ciąg współrzędnych wektora $\mathbf{v}$ w danej bazie $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$, tzn. ciąg $(\lambda_i)_{i=1}^k \in \mathbb{F}^k$ taki, że $\mathbf{v} = \sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i$.

• $[L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$ – macierz operatora (=przekształcenia) liniowego $L : V \to W$ w danych bazach $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ przestrzeni V i $\mathcal{W} = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l)$ przestrzeni W. Jest to jedyna macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ taka, że $\mathbf{A}[\mathbf{v}]_{\mathcal{V}} = [L(\mathbf{v})]_{\mathcal{W}}$ dla $\mathbf{v} \in V$.

• **Mapą**, wyznaczoną przez bazę $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ przestrzeni V, nazywam izomorfizm liniowy $S : V \to \mathbb{F}^k$, zadany wzorem $S(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_{\mathcal{V}}$ dla $\mathbf{v} \in V$. Każdy izomorfizm $S : V \to \mathbb{F}^k$ jest tej postaci, dla $\mathcal{V} := (S^{-1}(\mathbf{e}_1), ..., S^{-1}(\mathbf{e}_k))$, gdzie $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_k)$ to **baza standardowa** przestrzeni $\mathbb{F}^k$, z $\mathbf{e}_1 := (1, 0, ..., 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, ..., 0)$ i.t.d.

• $\mathcal{L}(V, W)$ to zbiór wszystkich operatorów liniowych z V do W; zamiast $\mathcal{L}(V, V)$ piszę $\mathcal{L}(V)$.

• Dla macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ oznaczam przez $L_{\mathbf{A}}$ przekształcenie z $\mathbb{F}^k$ do $\mathbb{F}^l$, zadane tą macierzą w standardowych bazach. (Jest ono zdefiniowane wzorem $L_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ dla $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^k$, gdzie wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^k$ interpretujemy jako kolumnę.)

• Czasem dla uwidocznienia konstrukcji ciągu możemy pisać $(x_s, x_{s+1}, ..., x_t)$ i wtedy, gdy $t < s$ (ciąg jest więc pusty) lub gdy $t = s$ (wyrazu x_{s+1} więc de facto nie ma).

• „Zadanie" oznacza lemat, którego dowód pozostawiono czytelnikowi. Zadania te są w dalszej części wykorzystywane.

• „Zadanie uzupełniające" to zadanie, które w materiale zasadniczym nie jest wykorzystywane i spełnia rolę zadania, a nie lematu. Wymieniam też zadania ze zbioru Kostrykina, dotykające bieżącego materiału; numeracja odnosi się do pierwszego polskiego wydania tego zbioru, z 1995r.

* oznacza materiał uzupełniający i zadania, które go dotyczą lub są trudniejsze.

** stawiam przy materiale, który przy pierwszym czytaniu lepiej pominąć.

V PRZESTRZENIE z ILOCZYNEM SKALARNYM

Wstęp. Przez analogię ze znanymi ze szkoły średniej pojęciami długości wektora i iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^3$, zdefiniujemy teraz ich odpowiedniki w rzeczywistych lub zespolonych przestrzeniach wektorowych wyższego wymiaru. Umożliwi to wprowadzenie w tych przestrzeniach pojęć geometrycznych, takich jak odległość, miara kąta czy objętość brył. Jeśli chodzi o badanie przekształceń liniowych $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ czy $\mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^l$, pojęcia te są o tyle ważne, że pozwalają wyróżnić rzuty czy symetrie prostopadłe, a także przekształcenia liniowe nie zmieniające odległości. Oczywiście, będziemy się starali wymienione przekształcenia opisać, a ich własności zrozumieć. Ułatwione to zostanie przez wprowadzeniu zagadkowego „przekształcenia sprzężonego”, które nieodłącznie okazuje się towarzyszyć każdemu przekształceniu liniowemu pomiędzy przestrzeniami, wyposażonymi w iloczyn skalarny.

W tym rozdziale zakładamy zawsze, że $\mathbb{F}$ oznacza jedno z ciał $\mathbb{R}, \mathbb{C}$. Ograniczenie się do tych ciał skalarów powodowane jest nie tylko znaczeniem, ale i szczególnymi własnościami liczb rzeczywistych i liczb zespolonych.

§ 1. Podstawowe pojęcia.

1. Iloczyn skalarny i wyznaczona przezeń norma.

Przypomnijmy, że długość wektora $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ zdefiniowana jest wzorem $\|\mathbf{w}\| := \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}$ i że podobnie określana jest długość wektora na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Sugeruje to przyjęcie

$$\|\mathbf{w}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{k} w_i^2} \quad \text{dla} \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^k.$$

Mamy więc

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}, \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := \sum_i u_i v_i \text{ dla } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^k.$$

Jak powinniśmy określić długość wektorów w $\mathbb{C}^k$, jeśli chcemy, by przy naturalnym włożeniu $\mathbb{R}^k$ w $\mathbb{C}^k$ długości nie ulegały zmianie? Najprościej zrobić to tak:

$$\|\mathbf{w}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |w_i|^2} \quad \text{dla} \quad \mathbf{w} \in \mathbb{C}^k.$$

Tym razem nie jest prawdą, że $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}$, lecz $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle}$, gdzie

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \sum_{i=1}^{k} u_i \overline{v_i} \quad \text{dla} \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^k.$$

Definicja. Powyższą funkcję $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}$ nazywamy **standardowym iloczynem skalarnym na** $\mathbb{C}^k$, zaś funkcję $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ zadaną przez $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ nazywamy **standardowym iloczynem skalarnym na** $\mathbb{R}^k$.

Ponieważ $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ gdy $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ mają wyrazy rzeczywiste, więc możemy (i często będziemy) używać $\langle\ ,\ \rangle$ jako wspólnego oznaczenia obu tych iloczynów skalarnych. Gdy chcemy je rozróżnić, standardowy iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^k$ oznaczamy przez $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^k}$, a na $\mathbb{C}^k$ – przez $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}^k}$.

Uwaga 1. Standardowy iloczyn skalarny $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na przestrzeni $V = \mathbb{F}^k$, gdzie $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, ma poniższe własności:

(i) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \in \mathbb{F}$ i $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle}$ dla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ (**symetria hermitowska**);

(ii) $\langle \mathbf{u}+\mathbf{u}', \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u}', \mathbf{v}\rangle$ i $\langle \lambda\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ dla $\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v} \in V$ i $\lambda \in \mathbb{F}$ (**liniowość względem pierwszej zmiennej**);

(iii) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią dla $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ (**dodatnia określoność**). ⊟

Definicja. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. **Iloczynem skalarnym** na przestrzeni V nazywamy każdą funkcję

$$V \times V \ni (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \in \mathbb{F}$$

spełniającą powyższe warunki od (i) do (iii). **Przestrzeń z iloczynem skalarnym** (ang. "inner product space") to przestrzeń wektorowa nad ciałem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, na której wyróżniono pewien iloczyn skalarny (czyli jest to para $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, gdzie V i $\langle\cdot,\cdot\rangle$ są jak wyżej). Gdy ponadto $\dim V < \infty$, to $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazywamy **przestrzenią euklidesową** jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, zaś **przestrzenią unitarną** jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Uwaga 2. a) Iloczyn skalarny $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na przestrzeni V ma też następującą własność:

(ii') $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}+\mathbf{v}'\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}'\rangle$ i $\langle \mathbf{u}, \lambda\mathbf{v}\rangle = \overline{\lambda}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ dla $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ i $\lambda \in \mathbb{F}$.

Ta **antyliniowość względem drugiej zmiennej** wynika z ciągu równości:

$$\langle \mathbf{u}, \lambda\mathbf{v}+\mathbf{v}'\rangle = \overline{\langle \lambda\mathbf{v}+\mathbf{v}', \mathbf{u}\rangle} = \overline{\lambda\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{v}', \mathbf{u}\rangle} = \overline{\lambda}\overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle} + \overline{\langle \mathbf{v}', \mathbf{u}\rangle} = \overline{\lambda}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}'\rangle$$

b) Podkreślić należy, że iloczyn skalarny jest symetryczną funkcją dwóch zmiennych gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, lecz nie gdy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. (Patrz własność (i).) Podobnie, jest on jednorodny względem pierwszej zmiennej, lecz tylko $\mathbb{R}$–jednorodny względem drugiej (tzn. tylko dla $\lambda \in \mathbb{R}$ ma miejsce tożsamość $\langle \mathbf{u}, \lambda\mathbf{v}\rangle = \lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$.) Jednak i gdy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ jest on addytywną funkcją każdej zmiennej przy ustalonej pozostałej; patrz (ii) i (ii'). □

c) Mimo, iż przestrzeń z iloczynem skalarnym stanowi para $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, to często będziemy pomijać oznaczenie iloczynu skalarnego, zwłaszcza, gdy został on już ustalony lub gdy żadne jego własności poza (i)-(iii) nie są dla nas istotne. (Podobnie mówiliśmy „ciało $\mathbb{F}$" zamiast „ciało $(\mathbb{F}, +, \cdot)$", itp.) □

Jeśli nie powiedziano inaczej, przestrzenie $\mathbb{R}^k$ i $\mathbb{C}^k$ rozważamy z ich standardowym iloczynem skalarnym. Jest też wiele innych przykładów przestrzeni z iloczynem skalarnym:

Zadanie 1. W następujących przypadkach mamy do czynienia z iloczynem skalarnym na przestrzeni V:

a) $V = \mathbb{R}^k$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ i $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \sum_{n=1}^{k} n u_n v_n$, a także $V = \mathbb{R}^2, \mathbb{F} = \mathbb{R}$ i $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 5u_2v_2$. (Dodatnia określoność wymaga uzasadnienia!)

b) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $V = C([a,b], \mathbb{R})$ = zbiór wszystkich funkcji ciągłych $[a,b] \to \mathbb{R}$, zaś $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ dla $f, g \in V$. (Tu i poniżej, $a < b$.)

c)* Jak w b), lecz $\mathbb{R}$ zastępujemy przez $\mathbb{C}$ i przyjmujemy $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$.

d) $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $V = \mathbb{F}[x]$ (przestrzeń wielomianów zmiennej x, o współczynnikach w $\mathbb{F}$), a iloczyn skalarny zaczerpnięty jest z c): $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$ dla $f, g \in \mathbb{F}[x]$. Możemy też wyżej zamiast $\mathbb{F}[x]$ wziąć za V przestrzeń $V = \mathbb{F}_k[x]$ wielomianów stopnia $\leq k$. (Wielomiany traktujemy tu jako wyrażenia algebraiczne, a nie jako funkcje.)

Definicja. **Długością** lub **normą** wektora $\mathbf{v} \in V$, wyznaczoną przez rozważany iloczyn skalarny $\langle ., . \rangle$, nazywamy liczbę $\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$. Również funkcję

$$V \ni \mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \in [0, \infty)$$

nazywamy normą na przestrzeni V, wyznaczoną przez $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Z (ii) i (ii') wynika, że

$$\|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \; \|\mathbf{v}\| \text{ oraz } \|\mathbf{v}\| > 0 \text{ gdy } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \qquad (\mathbf{v} \in V, \; \lambda \in \mathbb{F}). \tag{1}$$

Zadanie 2. Gdy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni V, to

$$\langle \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^{l} y_j \mathbf{w}_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} x_i \overline{y_j} \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j \rangle \;\; \text{dla } \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j \in V \text{ oraz } x_i, y_j \in \mathbb{F} \tag{2}$$

$$\| \sum_{i=1}^{k} \mathbf{v}_i \|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|\mathbf{v}_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} \mathrm{Re} \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle \;\; \text{dla} \;\; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V. \tag{3}$$

Zadanie 3. Zachodzą tzw. „tożsamości polaryzacyjne": $4\mathrm{Re}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$, a gdy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, to także $4\mathrm{Im}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u} + i\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - i\mathbf{v}\|^2$.

Iloczyn skalarny zarówno więc wyznacza odpowiadającą mu normę, jak jest przez nią wyznaczony. Jednak (nawet w przypadku przestrzeni $\mathbb{R}^k$ ze standardową normą) to iloczyn skalarny szybciej prowadzi do pojęć geometrycznych, takich jak miara kąta między wektorami, i jest pojęciem prostszym do badania –a to dzięki liniowości czy „omal liniowości" ze względu na każdą zmienną przy ustalonej pozostałej. (Są to własności (ii) oraz (ii)'.) Prowadzi on też bezpośrednio do ważnego pojęcia ortogonalności, które badamy w następnym punkcie i które wyrażone w terminach normy nie jest wcale przejrzyste (zwłaszcza w przypadku zespolonym).

Zadanie 4. Dla wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ przestrzeni z iloczynem skalarnym udwodnić

a) regułę równoległoboku: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$

b) tożsamość Apolloniusza: $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|^2 + 2\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 - 4\|\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{2} - \mathbf{w}\|^2$. W przypadku płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym, zinterpretować a) i b) w terminach długości boków i przekątnych równoległoboku oraz boków i środkowej trójkąta, odpowiednio; podać też związek między a) i b). (Wskazówka: zredukować b) do przypadku $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.)

Zadanie 5. Gdy tak $(U, \langle\cdot,\cdot\rangle_U)$, jak i $V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ jest przestrzenią z iloczynem skalarnym, to jest nią też para $(U \times V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, gdzie $\langle(\mathbf{u},\mathbf{v}),(\mathbf{u}',\mathbf{v}')\rangle := \langle\mathbf{u},\mathbf{u}'\rangle_U + \langle\mathbf{v},\mathbf{v}'\rangle_V$.

Zadanie 6. Gdy operator $L \in \mathcal{L}(U,V)$ jest różnowartościowy, to iloczyn skalarny $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na przestrzeni V zadaje wzorem $(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \mapsto \langle L(\mathbf{u}_1), L(\mathbf{u}_2)\rangle$ iloczyn skalarny na U. Na każdej podprzestrzeni liniowej $V_0 \subset V$ rozpatrywać więc można „obcięty" iloczyn skalarny $V_0 \times V_0 \ni (\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) \mapsto \langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle$. (Za L obieramy tu włożenie V_0 w V.)

Ćwiczenie. Wyrazić ten iloczyn gdy $U = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}_{\le 2}[x]$ i $L(\mathbf{a}) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ dla $\mathbf{a} = (a_0,a_1,a_2) \in \mathbb{R}^3$, zaś $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ dla $f,g \in V$. (Patrz zadanie 1d).)

Zadania uzupełniające. (V jest przestrzenią z iloczynem skalarnym $\langle\cdot,\cdot\rangle$ i odpowiadającą mu normą.)

1. Uogólnić tożsamość równoległoboku następująco: dla $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in V$ zachodzi $\sum_\varepsilon \|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\mathbf{v}_i\|^2 = 2^n\sum_{i=1}^n \|\mathbf{v}_i\|^2$, gdzie sumowanie jest po wszystkich ciągach $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$. (Inaczej: średnią arytmetyczną liczb $c_\varepsilon := \|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\mathbf{v}_i\|^2$, $\varepsilon \in \{-1,1\}^n$, jest $\sum_{i=1}^n \|\mathbf{v}_i\|^2$.)

2. Przyjmijmy $\mathbf{v}' = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}$ dla $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. (Przekształcenie $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}'$ nazywane jest **inwersją** względem sfery $\|\mathbf{v}\| = 1$.) Dowieść, że $\|\mathbf{v}' - \mathbf{w}'\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|/\|\mathbf{v}\|\cdot\|\mathbf{w}\|$.

3. Dla $\mathbf{u},\mathbf{v}, \in V$ wyprowadzić **tożsamość Cauchy'ego** $\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{w}\|^2 + |\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle|^2$, gdzie $\mathbf{w} := \mathbf{v} - \frac{\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}$, a z niej **nierówność Cauchy'ego–Buniakowskiego–Schwarza**: $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \le \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$, ostrą dla liniowo niezależnych wektorów $\mathbf{u},\mathbf{v}$. (Dyskusja i inny dowód są w p.3.)

4. Ustalmy $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k \in V$ i $m_1,\ldots,m_k \in \mathbb{R}$, i niech $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k m_i\|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|^2$ dla $\mathbf{x} \in V$. Przy $M := \sum_i m_i$ i $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^k m_i\mathbf{a}_i$ (gdy $M \ne 0$) dowieść, że:
   a) Jeśli $M \ne 0$, to $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + M\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$ ($\mathbf{x} \in V$).
   b) Jeśli $M > 0$, to f przyjmuje w $\mathbf{x}_0$ swe minimum, równe $\sum_i m_i\|\mathbf{a}_i\|^2 - \frac{1}{M}\|\sum_i m_i\mathbf{a}_i\|^2$.
   c) Jak jest, gdy $M = 0$?

5. W przypadku $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ udowodnić, że dla $\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ i $n \in \mathbb{N}$ zachodzą równości
   $\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\mathbf{v} + (\cos\alpha + i\sin\alpha)\mathbf{w}\|^2(\cos\alpha + i\sin\alpha)d\alpha =$
   $= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \|\mathbf{v} + (\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n))\mathbf{w}\|^2(\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n))$.

Korzystając z następnego zadania uzyskać też odpowiadające powyższym tożsamości, gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

6. Niech teraz $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Rozpatrzmy zbiór W wszystkich wyrażeń $\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$, gdzie $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, z naturalną strukturą zespolonej przestrzeni liniowej. Przyjmijmy dla $\mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2 \in W$:

$$\langle \mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2 \rangle_W := \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2 \rangle + i(\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle - \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 \rangle)$$

Udowodnić, że $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ jest iloczynem skalarnym na zespolonej przestrzeni liniowej W.

Zadania ze zbioru Kostrykina: 31 w §II.4.1.

2. Ortogonalność w przestrzeni z iloczynem skalarnym; istnienie rzutów i baz ortogonalnych.

W tym punkcie zakładamy, że V jest przestrzenią z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definicja. Wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ nazywamy **ortogonalnymi** i piszemy $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, jeśli $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Zbiory $A, B \subset V$ nazywamy ortogonalnymi i piszemy $A \perp B$, jeśli $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ dla wszystkich $\mathbf{v} \in A$ i $\mathbf{w} \in B$. Zamiast $\{\mathbf{v}\} \perp A$ piszemy $\mathbf{v} \perp A$.

Uwaga 1. Jeśli $\mathbf{v} \perp V$ (ogólniej, $\mathbf{v} \perp A$ i $\mathbf{v} \in A$), to $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ – bo $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$ dla $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Lemat 1. *a) Gdy $A \perp B$, to $B \perp A$, a także* $\mathrm{lin}(A) \perp \mathrm{lin}(B)$.
b) W szczególności, $(\mathbf{v} \perp \mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)) \Leftrightarrow (\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_i$ *dla* $i = 1, ..., k)$.
c) ma miejsce **równość Pitagorasa**:

$$\| \sum_{i=1}^{k} \mathbf{v}_i \|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|\mathbf{v}_i\|^2 \text{ gdy dla } i \neq j \text{ zachodzi } \mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j \text{ (lub, ogólniej, } \mathrm{Re}\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0\text{)}$$

Dowód. Wynika to ze wzoru (3) w p.1 i własności (i) iloczynu skalarnego. □

W geometrii szkolnej, prostokątne układy odniesienia są ze względów geometrycznych wyróżnione. Podobną rolę grają układy wektorów wzajemnie ortogonalnych.

Definicja. Niech $(\mathbf{v}_i)_{i \in I}$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Powiemy, że układ ten jest **ortogonalny**, gdy $\mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j$ dla wszystkich $i, j \in I$ takich, że $i \neq j$. Gdy ponadto $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ dla każdego i, to układ $(\mathbf{v}_i)_{i \in I}$ nazwiemy **ortogonalnym unormowanym** lub **ortonormalnym**.

Udowodnimy teraz dwa ważne i związane ze sobą twierdzenia.

Twierdzenie 1 (o istnieniu i wyznaczaniu rzutu ortogonalnego)**.** *Niech U będzie skończenie-wymiarową podprzestrzenią przestrzeni V i niech $\mathbf{v} \in V$. Wówczas*

a) Istnieje dokładnie jeden wektor $\mathbf{v}' \in U$ taki, że $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \perp U$.

b) Gdy $(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n)$ *jest ortogonalną bazą przestrzeni* U*, to wektor ten zadany jest wzorem*

$$\mathbf{v}' = \sum_i \lambda_i \mathbf{u}_i, \quad \text{gdzie} \quad \lambda_i = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle} \text{ dla } i = 1, ..., n. \tag{4}$$

Twierdzenie 2 (Grama-Schmidta o ortogonalizacji)**.** *Gdy* $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k \in V$*, to istnieją wzajemnie ortogonalne wektory* $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k \in V$ *takie, że* $\mathrm{lin}(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k) = \mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$*.*

Wektor $\mathbf{v}'$ opisany w twierdzeniu 1 nazywamy **rzutem ortogonalnym** wektora $\mathbf{v}$ na U. Obu twierdzeń dowodzić będziemy równocześnie, w następujący sposób: wpierw udowodnimy twierdzenie 1 przy dodatkowym założeniu, że U ma bazę ortogonalną; potem zaś, wykorzystując ten (pozornie) szczególny przypadek, udowodnimy twierdzenie 2 – co uczyni dodatkowe założenie zbytecznym.

Tak więc łączny dowód składa się z trzech części:

i) Dowód twierdzenia 1, gdy istnieje baza ortogonalna podprzestrzeni U; niech będzie nią $(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n)$. Każdy wektor $\mathbf{u} \in U$ możemy przedstawić w postaci $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{u}_j$, przy czym $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_i \rangle = c_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle \ \forall i$. (Korzystamy z tego, że $\langle \sum_j c_j \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle = \sum_j c_j \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle$ i $\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle = 0$ dla $i \neq j$.)

Ponadto, warunek $\mathbf{v} - \mathbf{u} \perp \mathrm{lin}(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n)$ jest wobec lematu 1b) równoważny temu, by $\mathbf{v} - \mathbf{u} \perp \mathbf{u}_i \ \forall i$, czy inaczej, by $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_i \rangle \ \forall i$. A że $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_i \rangle = c_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle$, to jest tak wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{u} = \mathbf{v}'$ dla wektora $\mathbf{v}'$ określonego wzorami (4) – co kończy dowód obu części twierdzenia 1 (przy dodatkowym założeniu).

ii) Dowód twierdzenia 2 (indukcyjny względem k). Gdy $k = 1$ obieramy $\mathbf{u}_1 := \mathbf{v}_1$; przypuśćmy więc, że znamy parami ortogonalne wektory $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{k-1}$ takie, że $\mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}) = \mathrm{lin}(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{k-1})$. W szczególności, podprzestrzeń $U = \mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1})$ ma bazę ortogonalną (można ją wybrać z układu $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1})$). Przyjmujemy $\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k - \mathbf{v}'_k$, gdzie $\mathbf{v}'_k$ jest rzutem ortogonalnym wektora $\mathbf{v}_k$ na U. Wówczas $\mathbf{u}_k \perp \mathbf{u}_i$ dla $i < k$. Ponadto, $\mathbf{u}_k$ jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, a $\mathbf{v}_k$ – kombinacją wektorów $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ (bo $\mathbf{v}'_k$ jest kombinacją jednych i drugich). Tak samo jest z $\mathbf{u}_i$ i $\mathbf{v}_i$ dla $i < k$ (z założenia indukcyjnego), skąd $\mathrm{lin}(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k) = \mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$.

iii) Ta część sprowadza się do obserwacji, że gdy $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ jest bazą podprzestrzeni U, to układ $(\mathbf{u}_i)_{i=1}^k$ dany twierdzeniem 2 też nią jest, bo rozpina U i liczy tyle wektorów, ile wynosi $\dim U$. □

Uwaga 2. a) Gdy więc układ $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ jest liniowo niezależny, to $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$ dla $i = 1, \ldots, k$, zaś dowód twierdzenia 2 daje pochodzące od Grama i Schmidta indukcyjne wzory:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 \ \text{ i } \ \mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n - \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle} \mathbf{u}_i \ \text{ dla } n = 2, \ldots, k. \tag{5}$$

b)* Odnotujmy, że dla $s = 1, ..., k$ zachodzi równość $\mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_s) = \mathrm{lin}(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_s)$.

Wniosek 1. *Ciąg współrzędnych wektora* $\mathbf{v}$ *względem bazy ortonormalnej* $(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k)$ *jest równy* $(\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle, ..., \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k \rangle)$.

Wniosek 2. *Każda skończenie–wymiarowa przestrzeń z iloczynem skalarnym ma bazę ortonormalną i każdy ortonormalny układ jej wektorów można rozszerzyć do bazy ortonormalnej.*

Dowody. Pierwszy wniosek wynika z twierdzenia 1 b), zastosowanego przy $U = V$. By otrzymać drugi, rozszerzamy zadany układ ortonormalny do dowolnej bazy, tę poddajemy „ortogonalizacji Grama–Schmidta", i otrzymaną bazę normujemy: dzielimy każdy wektor przez jego długość. □

Uwaga 3. Wniosek 1 ukazuje jedną z zalet bazy ortonormalnej: wyznaczenie współrzędnych dowolnego wektora względem niej jest łatwe i sprowadza się do obliczenia pewnych iloczynów skalarnych.

Zadanie uzupełniające 1. Dodatnia określoność iloczynu skalarnego nie we wszystkich dotychczasowych (i przyszłych) rozważaniach gra rolę. Jako przykład weźmy proces ortogonalizacji Grama–Schmidta. Niech funkcja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ spełnia tylko warunki i) oraz ii) definicji iloczynu skalarnego z p.1 i niech $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ będzie bazą w V. Definiujmy kolejno $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ...$ wzorami (5), kończąc gdy gdy $i = k$ lub $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = 0$. Dowieść, że:

a) Jeśli proces zakończy się dopiero przy $i = k$, przy czym $\mathbf{u}_k \neq \mathbf{0}$, to otrzymany układ $(\mathbf{u}_i)_{i=1}^k$ jest bazą w V i $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ dla $i \neq j$.

b) Jeśli ponadto $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle > 0$ dla $i = 1, ..., k$, to $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest iloczynem skalarnym, tzn. spełnia też warunek dodatniej określoności z p.1.

3. Zastosowanie: ważne nierówności i postać funkcjonałów liniowych

Niech nadal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni V. Ważną rolę gra

Uwaga 1. Gdy $\mathbf{v}'$ jest rzutem ortogonalnym wektora $\mathbf{v}$ na podprzestrzeń U, to:

a) $\|\mathbf{v}'\| \leq \|\mathbf{v}\|$ i nierówność jest ostra, jeśli $\mathbf{v} \notin U$. (Istotnie, $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \perp U$ i $\mathbf{v}' \in U$, więc $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \perp \mathbf{v}'$, skąd $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}'\|^2 + \|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|^2$; przy tym $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \neq 0$ gdy $\mathbf{v} \notin U$.)

b) $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$ dla $\mathbf{u} \in U$ i nierówność jest ostra, jeśli $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}'$. (Istotnie, skoro $\mathbf{v}' \in U$ i $\mathbf{u} \in U$, to $\mathbf{v}' - \mathbf{u} \in U$, skąd jak wyżej $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}'\|^2$).

Twierdzenie 1. *Zachodzi* **nierówność Cauchy'ego–Buniakowskiego–Schwarza***:*

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \text{ dla } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \tag{6}$$

i jest ona ostra gdy wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *są liniowo niezależne.*

Dowód. Gdy $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, teza jest oczywista. A gdy $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, to stosujemy nierówność z części a) uwagi, przy $U = \mathrm{lin}(\{\mathbf{u}\})$. Ponieważ $\mathbf{v}' = \lambda \mathbf{u}$ dla $\lambda = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle / \|\mathbf{u}\|^2$, patrz wzór (4) w p.2, więc $|\lambda|\cdot\|\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{v}\|$ i ostatecznie $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle|/\|\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{v}\|$ (ostra nierówność gdy $\mathbf{v} \notin U$). $\square$

Uwaga 2. a) Jak wynika z dowodu, nierówność (6) zaświadcza, iż długość ortogonalnego rzutu wektora $\mathbf{v}$ na „prostą" $\mathbb{F}\mathbf{u}$ ($\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$) nie przekracza długości wektora $\mathbf{v}$.

b) Nierówność ta, oznaczana dalej (CBS), ma też konsekwencje analityczne niezależnie od tej interpretacji. N.p., gdy przyjąć $V = \mathbb{C}^k$ wzgl. $V = C([a,b],\mathbb{C})$ (por. zadanie 1 w §1.1), otrzymamy dwa jej ważne przypadki szczególne:

$$\left|\sum_{i=1}^k x_i y_i\right|^2 \leq \sum_{i=1}^k |x_i|^2 \sum_{i=1}^k |y_i|^2 \quad \text{i} \quad \left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2\,dt \int_a^b |g(t)|^2\,dt$$

dla $x_i, y_i \in \mathbb{C}$ i $f, g \in C([a,b];\mathbb{C})$. (Dlaczego mogę pominąć sprzężenie przy y_i i g?)

Ćwiczenie. Dla $a_1, ..., a_n > 0$ dowieść, że $\sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq n^2$. Kiedy jest równość?

Twierdzenie 2 (nierówność Bessela)**.** * *Gdy układ* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subset V$ *jest ortonormalny, to*

$$\sum_i |\langle\mathbf{v},\mathbf{u}_i\rangle|^2 \leq \|\mathbf{v}\|^2 \ \textit{dla}\ \mathbf{v} \in V, \tag{7}$$

przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{v} \in \mathrm{lin}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$.

Dowód. Niech $\mathbf{v}'$ oznacza rzut ortogonalny wektora $\mathbf{v}$ na podprzestrzeń $\mathrm{lin}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$. Wtedy $\mathbf{v}' = \sum_i \langle\mathbf{v},\mathbf{u}_i\rangle\mathbf{u}_i$ na podstawie twierdzenia 1b) z p.2, i $\|\mathbf{v}'\|^2 = \sum_i |\langle\mathbf{v},\mathbf{u}_i\rangle|^2$ na podstawie równości Pitagorasa. Teza wynika więc z uwagi 1a). $\square$

Wskażemy jeszcze, jaką postać mają funkcjonały liniowe na badanych tu przestrzeniach

Twierdzenie 3. *Niech* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *będzie skończenie–wymiarową przestrzenią z iloczynem skalarnym i niech* $\varphi \in V^*$. *Wówczas istnieje jedyny wektor* $\mathbf{w} \in V$ *taki, że* $\varphi(\mathbf{v}) = \langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle\ \forall\mathbf{v} \in V$.

Dowód. Obierzmy w V bazę ortonormalną $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$. Funkcjonał φ wyznacza skalary $c_1, ..., c_k$ takie, że gdy $\mathbf{v}$ ma w tej bazie współrzędne $\lambda_1, ..., \lambda_k$, to $\varphi(\mathbf{v}) = \sum_i \lambda_i c_i$. (Jest tak dla każdej bazy.) Jak wiemy, $\lambda_i = \langle\mathbf{v},\mathbf{v}_i\rangle$, wobec czego $\varphi(\mathbf{v}) = \sum_i c_i\langle\mathbf{v},\mathbf{v}_i\rangle = \langle\mathbf{v}, \sum_i \overline{c_i}\mathbf{v}_i\rangle$. Wektor $\mathbf{w} := \sum_i \overline{c_i}\mathbf{v}_i$ spełnia więc żądany warunek. Jedyność wynika stąd, że gdy $\langle\mathbf{v},\mathbf{w}_1\rangle = \langle\mathbf{v},\mathbf{w}_2\rangle\ \forall\mathbf{v} \in V$, to $\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 \perp V$, co daje $\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 = 0$. $\square$

Zadania uzupełniające. Udowodnić, że:

1. Tożsamość Cauchy'ego z zadania uz. 3 w p.1 wynika z równości Pitagorasa.
2. Gdy V jest przestrzenią z iloczynem skalarnym $\langle\cdot,\cdot\rangle$, to
   a) $\|\mathbf{u}\| = \sup\{\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle : \mathbf{v} \in V \text{ i } \|\mathbf{v}\| \leq 1\}$ dla $\mathbf{u} \in V$.

b) Dla wektorów $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k$ i skalarów $c_1, ..., c_k$ zachodzi $\| \sum_i c_i \mathbf{u}_i\|^2 \leq (\sum_i |c_i|^2)(\sum_i \|\mathbf{u}_i\|^2)$.

c) Dla bazy ortonormalnej $(\mathbf{u}_i)_{i=1}^k$ w V, wektora $\mathbf{v} \in V$ i przekształcenia $L \in \mathcal{L}(V)$ zachodzi $\|L(\mathbf{v})\| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \sqrt{\sum_i \|L(\mathbf{u}_i)\|^2}$.

3. Dla danej bazy $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ przestrzeni V istnieje jedyny układ wektorów $(\mathbf{w}_i)_{i=1}^k$, taki że $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j\rangle$ jest jedynką gdy $i = j$, a zerem w przeciwnym razie ($i, j = 1, ..., k$). Dowieść też, że układ ten jest bazą i dla dowolnego wektora $\mathbf{v} \in V$ zachodzi $\mathbf{v} = \sum_i \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i\rangle \mathbf{w}_i$.

4. Rozpatrujemy $C := C([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$ jako rzeczywistą przestrzeń wektorową, z iloczynem skalarnym $\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$.

a) Dowieść, że układ funkcji $\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, ...$ jest ortonormalny.

b) Dowieść, że rzut ortogonalny funkcji $f \in C$ na $\mathrm{lin}(1, \sin(t), \cos(t), \sin(2t), \cos(2t), ..., \sin(kt), \cos(kt))$ jest równy $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^k (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$, gdzie

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)dt, \;\; b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)dt \;\; \text{dla } n = 0, 1, 2, ...$$

c) Dowieść, że przy tych oznaczeniach

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{k} a_n^2 + \sum_{n=1}^{k} b_n^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt \;\; \text{dla każdego} \;\; k \in \mathbb{N}$$

skąd szeregi $\sum_{n=1}^\infty a_n^2$ i $\sum_{n=1}^\infty b_n^2$ są zbieżne i nierówność zachodzi też dla $k = \infty$.

Zadania ze zbioru Kostrykina: 10, 13, 32 w §II.4.1.

4. Dopełnienie ortogonalne i rzutowanie ortogonalne.

Nadal, $(V, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ jest przestrzenią z iloczynem skalarnym.

Definicja. Dla dowolnego zbioru $A \subset V$ definiujemy zbiór $A^\perp$ (czytaj „A z pinezką" lub „A ortogonalne") następująco:

$$A^\perp := \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} \perp A\}, \;\; \text{przy czym zamiast} \;\; \{\mathbf{a}\}^\perp \;\; \text{piszemy też} \;\; \mathbf{a}^\perp.$$

Zadanie 1. a) $A^\perp = \bigcap_{\mathbf{a} \in A} \mathbf{a}^\perp$ i jest to podprzestrzeń przestrzeni V.

b) $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$ i podobnie dla większej liczby podzbiorów przestrzeni V;

c) Jeśli $A \subset B$, to $A^\perp \supset B^\perp$;

d) $(\mathrm{lin}(A))^\perp = A^\perp$ i $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.

Przykład 1. Niech $V = \mathbb{F}^k$, ze standardowym iloczynem skalarnym. Gdy $W = \mathrm{lin}(\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^l)$, dla pewnych $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_l \in \mathbb{F}^k$, to $W^\perp = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_l\}^\perp$ i jest to przestrzeń rozwiązań układu równań $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}_l$, dla macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ o wierszach $\overline{\mathbf{a}_1}, \ldots, \overline{\mathbf{a}_l}$.

(Wynika to z definicji zbioru rozwiązań i standardowego iloczynu skalarnego, połączonych z częściami a) i d) zadania 1.)

Definicja. Mówimy, że V jest **sumą ortogonalną** podprzestrzeni $V_1, ..., V_k$ i piszemy $V = V_1 \bigoplus ... \bigoplus V_k$, jeśli $V = V_1 + ... + V_k$ i $V_i \perp V_j$ dla $i \neq j$. Powiemy też, że V_2 jest **dopełnieniem ortogonalnym** podprzestrzeni V_1 (i vice versa), jeśli $V = V_1 \bigoplus V_2$.

Uwaga 1. a) Suma ortogonalna $V_1 \bigoplus ... \bigoplus V_k$ jest prosta: jeśli $\sum_i \mathbf{v}_i = 0$ i $\mathbf{v}_i \in V_i$ $\forall i$, to $\sum_i \|\mathbf{v}_i\|^2 = 0$ (równość Pitagorasa), skąd wszystkie wektory $\mathbf{v}_i$ są zerowe.

b) W szczególności, ortogonalny układ niezerowych wektorów jest liniowo niezależny.

Stwierdzenie 1. *Niech $V = U \bigoplus W$, tzn. podprzestrzenie U i W dopełniają się ortogonalnie. Wówczas $W = U^\perp$ i $(U^\perp)^\perp = U$.*

Dowód. Z definicji, $W \subset U^\perp$. Ale też gdy $\mathbf{v} \in U^\perp$, to pisząc $\mathbf{v}$ w postaci $\mathbf{u} + \mathbf{w}$, gdzie $\mathbf{u} \in U$ oraz $\mathbf{w} \in W$, otrzymujemy $0 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 0$, bo $\mathbf{v} \in U^\perp$, $\mathbf{w} \in W \subset U^\perp$ i $\mathbf{u} \in U$. Zatem $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, czyli $\mathbf{v} = \mathbf{w} \in W$ dla $\mathbf{v} \in U^\perp$.

Tak więc $U^\perp = W$ i symetrycznie $W^\perp = U$, skąd $(U^\perp)^\perp = U$. □

Wniosek 1. *Skończenie–wymiarowa podprzestrzeń U przestrzeni V ma jedyne dopełnienie ortogonalne; jest nim $U^\perp$.*

Dowód. $U^\perp$ jest dopełnieniem ortogonalnym, bo $U + U^\perp = V$ na podstawie twierdzenia 1b) z p.2. Jednoznaczność dopełnienia wynika ze stwierdzenia 1. □

Wniosek 2. *Gdy $\dim V < \infty$, to $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$ dla podprzestrzeni $U \subset V$.*

Wniosek 3. *Gdy $A \subset V$ i $\dim(\mathrm{lin} A) < \infty$, to $(A^\perp)^\perp = \mathrm{lin} A$.*

Dowód. Niech $U := \mathrm{lin} A$; wtedy $(U^\perp)^\perp = U$ na podstawie wniosku 1 i stwierdzenia 1. Jest to równoważne tezie, bo $U^\perp = (\mathrm{lin} A)^\perp = A^\perp$, patrz zadanie 1 d). □

Definicja. Niech U będzie skończenie–wymiarową podprzestrzenią przestrzeni V. Ponieważ $V = U \oplus U^\perp$, więc poprawnie określony jest rzut liniowy P przestrzeni V na U, wzdłuż podprzestrzeni $U^\perp$. (Tzn. $P : V \to V$ jest jedynym przekształceniem liniowym takim, że $P(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}$ dla $\mathbf{u} \in U$ i $\mathbf{w} \in U^\perp$.) Dla $\mathbf{v} \in V$ zachodzi wtedy $P(\mathbf{v}) - \mathbf{v} \in U^\perp$, tzn. $P(\mathbf{v})$ jest rzutem ortogonalnym wektora $\mathbf{v}$ na podprzestrzeń U w sensie definicji z p. 1. Dlatego P nazywamy **operatorem rzutu ortogonalnego** na U (krótko: **rzutowaniem** czy **rzutem** ortogonalnym[1] z V na U.) Operator $S := 2P - I$ zaś nazywamy **symetrią ortogonalną względem** U (jest ona wzdłuż $U^\perp$).

Zadania uzupełniające. Dowieść, że:

1. Gdy podprzestrzenie $U, W \subset V$ są skończonego wymiaru, to $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

[1] „Rzut ortogonalny” może więc oznaczać zarówno przekształcenie, jak i obraz wektora przy tym przekształceniu.

2. Rzut liniowy $P : V \to V$ jest ortogonalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $\mathbf{v} \in V$ spełniony jest któryś z poniższych warunków:
a) $\langle P(\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle \geq 0$; b) $\|P(\mathbf{v})\| \leq \|\mathbf{v}\|$; c) $\angle\{\mathbf{v} - P(\mathbf{v}), P(\mathbf{v})\} = \pi/2$.

3. Gdy $\mathbf{w} \in \mathbb{F}^k$ jest wektorem o długości 1, to macierz rzutu ortogonalnego przestrzeni $\mathbb{F}^k$ na prostą $\mathbb{F}\mathbf{w}$ jest równa $\mathbf{w}\overline{\mathbf{w}}^t$, gdzie $\mathbf{w}$ traktujemy jako macierz jednokolumnową.

4. Jeśli dla $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{R})$ przyjąć $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^t)$ i $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\langle \mathbf{A}, \mathbf{A}\rangle}$, to
a) $(\mathcal{M}_{l,k}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ jest przestrzenią euklidesową;
b) $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|$ dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$ i $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{k,m}$;
c) $\mathbf{A} \mapsto \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^t)$ jest rzutem ortogonalnym przestrzeni $(\mathcal{M}_k, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ na podprzestrzeń $U = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k : \mathbf{A} = \mathbf{A}^t\}$ macierzy symetrycznych; wyznaczyć też $U^\perp$.
d)* $\|\mathbf{A}\mathbf{A}^t - \mathbf{A}^t\mathbf{A}\|^2 \leq 2\|\mathbf{A}\|^4$.

5. Dowieść, że dla danej bazy $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ przestrzeni V istnieje jedyny układ wektorów $(\mathbf{w}_i)_{i=1}^k$, taki że $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j\rangle$ jest jedynką gdy $i = j$, zaś zerem w przeciwnym razie $(i, j = 1, ..., k)$. Dowieść też, że układ ten jest bazą i dla dowolnego wektora $\mathbf{v} \in V$ zachodzi $\mathbf{v} = \sum_i \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i\rangle \mathbf{w}_i$.

6. Udowodnić, że jeśli $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ ma tę własność, że $\mathrm{tr}(\mathbf{AX}) = 0$ dla każdej macierzy $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_k$ ze śladem zero, to $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{I}_k$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$.

7. Niech $\langle\cdot,\cdot\rangle$ będzie iloczynem skalarnym na rzeczywistej przestrzeni V.
a) Dowieść, że jeśli wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ są takie, że iloczyn skalarny każdych dwóch z nich jest ujemny, to rzut ortogonalny $\mathbf{u}'$ wektora $\mathbf{u}$ na $\mathbf{w}^\perp$ i takiż rzut $\mathbf{v}'$ wektora $\mathbf{v}$ spełniają warunek $\langle \mathbf{u}', \mathbf{v}'\rangle < 0$.
b) Dowieść, że wektory $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k \in V$, spełniające warunek $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle < 0$ dla wszystkich $i \neq j$, rozpinają podprzestrzeń wymiaru $\geq k - 1$.

5. Przykłady wyznaczania rzutów i baz ortogonalnych; rola macierzy Grama.

Niech $\langle\cdot,\cdot\rangle$ będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni V i niech $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k \in V$. Jak znaleźć rzut ortogonalny wektora $\mathbf{v}$ na podprzestrzeń $U = \mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$? Jedną metodę podsuwają wyniki p.1: użyć wektorów $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, by przy pomocy ortogonalizacji Grama–Schmidta uzyskać bazę ortogonalną w U, po czym wykorzystać wzór (4) z §2. Inną umożliwia następująca uwaga:

Uwaga 1. Przy powyższych oznaczeniach równoważne są warunki:
a) rzut ortogonalny $\mathbf{v}'$ wektora $\mathbf{v}$ na podprzestrzeń $\mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ jest równy $\sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{v}_j$;
b) $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ jest rozwiązaniem układu równań

$$\sum_{i=1}^k x_j \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i\rangle \quad \text{dla } i = 1, ..., k. \tag{8}$$

Istotnie, równość $\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\langle \mathbf{v}_j,\mathbf{v}_i\rangle = \langle \mathbf{v},\mathbf{v}_i\rangle$ oznacza, że wektor $\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\mathbf{v}_j - \mathbf{v}$ jest ortogonalny do $\mathbf{v}_i$. Wraz z zadaniem 1d) w p.4 dowodzi to, że a)$\Leftrightarrow$b).

Ponieważ żądany rzut istnieje i jest jedyny, więc układ (8) jest niesprzeczny, a kombinacja $\sum_j \lambda_j\mathbf{v}_j$ nie zależy od wyboru rozwiązania $(\lambda_1,...,\lambda_k)$, jeśli tych jest wiele.

Definicja. Macierz kwadratowa $(\langle \mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\rangle)_{1\le i,j\le k}$, transponowana do macierzy układu (8), nazywana jest **macierzą Grama** wektorów $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_k$. Odnotujmy jej ważną własność:

Wniosek 1. *Macierz Grama $(\langle \mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\rangle)_{1\le i,j\le k}$ jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_k$ są liniowo niezależne.*

Dowód. Przyjmijmy $\mathbf{v}=\mathbf{0}$, co daje $\mathbf{v}'=\mathbf{0}$. Liniowa niezależność układu $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k$ oznacza, że równanie $x_1\mathbf{v}_1+\cdots+x_k\mathbf{v}_k=\mathbf{0}$ ma jedyne rozwiązanie, a nieosobliwość macierzy Grama –że układ (8) ma jedyne rozwiązanie. Stąd i z uwagi 1 wynika teza.

Przykład 1. Na przestrzeni $\mathbb{R}[x]$ wielomianów rzeczywistych rozpatrujmy iloczyn skalarny $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

a) Znajdziemy bazę ortonormalną podprzestrzeni $U=\mathbb{R}_{\le 2}[x]$.
W tym celu zastosujemy procedurę Grama–Schmidta do wielomianów $v_0=1, v_1=x, v_2=x^2$. Otrzymujemy:

$u_0=v_0=1,\ \|u_0\|^2=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}t=2;$

$u_1=v_1-\frac{\langle v_1,u_0\rangle}{\|u_0\|^2}u_0 = x-\frac{\int_{-1}^{1}t\mathrm{d}t}{2}1 = x,\ \|u_1\|^2=\int_{-1}^{1}t^2\mathrm{d}t=2/3;$

$u_2=v_2-\frac{\langle v_2,u_0\rangle}{\|u_0\|^2}u_0-\frac{\langle v_2,u_1\rangle u_1}{\|u_1\|^2}u_1 = x^2-\frac{\int_{-1}^{1}t^2\cdot 1\mathrm{d}t}{2}1-\frac{\int_{-1}^{1}t^2\cdot t\mathrm{d}t}{2/3}x = x^2-\frac{1}{3},$

Układ (u_0,u_1,u_2) jest bazą ortogonalną podprzestrzeni U, ale nie jest znormalizowany. Należy jeszcze każdy z wektorów u_i podzielić przez $\|u_i\|$, by otrzymać bazę ortonormalną (w_0,w_1,w_2), gdzie $w_0=1/\sqrt{2},\ w_1=x\sqrt{3/2},\ w_2=(3x^2-1)\sqrt{10}/2$.

b) Wyznaczymy rzut ortogonalny wektora $v=x^3$ na podprzestrzeń U, korzystając ze wzoru (4). Mamy $v'=\langle v,w_0\rangle w_0+\langle v,w_1\rangle w_1+\langle v,w_2\rangle w_2$; a że $\langle v,w_0\rangle=0=\langle v,w_2\rangle$ i $\langle v,w_1\rangle=\frac{2}{5}\sqrt{3/2}$, więc $v'=\frac{3}{5}x$. (Można też w miejsce $(w_i)_{i=0}^2$ użyć bazy $(u_i)_{i=0}^2$.)

c) Wyznaczymy ten sam rzut opierając się na uwadze 1, bez konieczności znajdywania bazy (u_i). Wyrazy macierzy Grama $(\langle v_i,v_j\rangle)_{i,j=1}^k$ są takie: $\langle v_i,v_j\rangle=0$ gdy liczba $i+j$ jest nieparzysta, $\langle v_0,v_0\rangle=2, \langle v_0,v_2\rangle=\langle v_2,v_0\rangle=2/3, \langle v_1,v_1\rangle=2/3, \langle v_2,v_2\rangle=2/5$; ponadto $\langle v,v_0\rangle=0=\langle v,v_2\rangle$ i $\langle v,v_1\rangle=2/5$. Układ równań (8) wygląda więc tak: $2x+0y+\frac{2}{3}z=0,\ 0x+\frac{2}{3}y+0z=\frac{2}{5},\ \frac{2}{3}x+0y+\frac{2}{5}z=0$. Latwo widzieć, że jego rozwiązaniem jest $(0,\frac{3}{5},0)$, co daje $v'=0v_0+\frac{3}{5}v_1+0v_2=\frac{3}{5}x$.

Ćwiczenie. Przy $V=\mathbb{R}^4$ wykorzystać każdą z opisanych metod do znalezienia ortogonalnego rzutu wektora $(1,2,3,4)$ na $V_0=\mathrm{lin}((1,1,1,1),(0,1,0,1))$.

Przykład 2. Niech $U=W^{\perp}$ i niech P i Q oznacza rzutowania ortogonalne na U i W, odpowiednio. Każdy z tych rzutów wyznacza drugi, bo $P+Q=I_V$. Gdy $U=\mathbf{w}^{\perp}$

dla pewnego wektora $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, to korzystając ze wzoru (4) w p. 2 stwierdzamy, że

$$P(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \lambda\mathbf{w} \ \text{ oraz } \ Q(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{w}, \ \text{ gdzie } \ \lambda = \langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle/\langle\mathbf{w},\mathbf{w}\rangle.$$

Przykład 3. Niech R będzie zbiorem rozwiązań równania $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, gdzie $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ jest macierzą, której wiersze oznaczymy przez $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_l \in \mathbb{F}^k$. (Nadal, $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, przy czym $\mathbb{F}^k$ rozpatrujemy ze standardowym iloczynem skalarnym.) Wówczas:

a) Dla $W := \mathrm{lin}(\overline{\mathbf{a}_1}, ..., \overline{\mathbf{a}_l})$ zachodzi $R^\perp = W$, bo $R = W^\perp$; patrz przykład 1 w p.4.

b) Rzut ortogonalny $\mathbf{v}'$ wektora $\mathbf{v}$ na R wyznaczyć można znajdując pewną bazę przestrzeni rozwiązań R, a następnie postępując jak opisano w uwadze 1 lub przed nią.

c) Można też, wzorem przykładu 2, wyznaczyć $\mathbf{v}'$ równością $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - Q(\mathbf{v})$, gdzie Q to rzutowanie ortogonalne na podprzestrzeń $R^\perp = W$. Wyznaczenie Q jest o tyle ułatwione, że znamy układ $\overline{\mathbf{a}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{a}}_l$, rozpinający W.

Zadanie uzupełniające 1. Udowodnić, że rząd układu wektorów jest taki, jak jego macierzy Grama.

Zadania ze zbioru Kostrykina: 5 i od 14 do 17 w §II.4.1

§ 2. Pojęcia metryczne w przestrzeni z iloczynem skalarnym.

1. Odległość i miara kąta.

Niech $\langle\cdot,\cdot\rangle$ będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni V. Przypomnijmy, że $\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle \geq 0$ dla $\mathbf{v} \in V$, wobec czego możemy określić **normę** (lub: **długość**) wektora $\mathbf{v}$ wzorem $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle}$ dla $\mathbf{v} \in V$. Ważne, choć oczywiste własności normy odnotowano we wierszu (1) w §1.1; mniej oczywista nierówność dotycząca normy i iloczynu skalarnego, to nierówność (CBS).

Twierdzenie 1. *Dla wektorów* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ *prawdziwe są* **nierówności trójkąta***:*

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \quad \text{oraz} \quad |\,\|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{w}\|\,| \leq \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\| \tag{9}$$

i są one ostre gdy wektory $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ *są liniowo niezależne.*

Dowód. Ponieważ $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle$, a $|2\mathrm{Re}\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle| \leq 2\|\mathbf{v}\|\cdot\|\mathbf{w}\|$ na podstawie nierówności (CBS), więc $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 \leq (\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|)^2$. Druga zaś nierówność w (9) wynika z już udowodnionej, zastosowanej do $\mathbf{v}' = \pm(\mathbf{v}-\mathbf{w}), \mathbf{w}' = \pm\mathbf{w}$. □

Posługując się analogią z przestrzeniami $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$, dla wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ określmy ich **odległość** wzorem $\rho(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$ dla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Ze względu na (9) zachodzi

$$\rho(\mathbf{u},\mathbf{w}) \leq \rho(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \rho(\mathbf{v},\mathbf{w}) \ \text{ dla wszystkich } \ \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V.$$

Również i tę nierówność nazywamy nierównością trójkąta.

Oprócz odległości, w przestrzeni V można określić miarę α kąta między dwoma niezerowymi wektorami $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Znowu posłużymy się analogią z przestrzeniami $\mathbb{R}^k$ dla $k \in \{2, 3\}$, gdzie rozważając trójkąt o wierzchołkach $\mathbf{0}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ otrzymujemy na podstawie twierdzenia cosinusów:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos(\alpha)$$

Z zadania 2 w §1.1 wynika, że jeśli chcemy zachować tę tożsamość w przestrzeni V, to powinniśmy zadbać o to, by

$$\cos(\alpha) = \frac{\operatorname{Re}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \tag{10}$$

Możemy to uczynić: funkcja cos odwzorowuje w sposób różnowartościowy $[0, \pi]$ na $[-1, 1]$, więc przy zadanych $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ równość (10) wyznacza wobec nierówności (CBS) jedyną liczbę $\alpha \in [0, \pi]$, którą przyjmujemy za **miarę kąta** między wektorami $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ i oznaczamy $\angle\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Miara ta nie zmieni się, gdy $\mathbf{u}$ zastąpimy przez $c\mathbf{u}$, a $\mathbf{v}$ przez $d\mathbf{v}$, gdzie c i d są skalarami dodatnimi.

Ćwiczenie. Jak zmieni się ta miara, gdy $c > 0$ i $d < 0$?

Oczywiście, dwa ortogonalne wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ są prostopadłe (tzn. $\angle\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \pi/2$). Jednak gdy ciałem skalarów jest $\mathbb{C}$, to przeciwna implikacja nie jest prawdziwa; ponadto, w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym, płaszczyzna $x_3 = 0$ nie jest ortogonalna do płaszczyzny $x_1 = 0$, choć zgodnie z definicjami stereometrii jest do niej prostopadła. Dlatego rezygnujemy tu z kuszącej i często stosowanej możliwości nazywania ortogonalności „prostopadłością”.

Zadania uzupełniające.

1. * Udowodnić **nierówność Ptolomeusza**: $\|\mathbf{v} - \mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{w} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{v} - \mathbf{y}\| \cdot \|\mathbf{w} - \mathbf{x}\|$ dla $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. (Wskazówka: tw. 1 i zad. uz. 2 w §1.1.)

2. a) Dowieść, że jeśli $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$ i $\mathbf{u} \neq \pm\mathbf{v}$, to $\angle\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\} = \pi/2$. (Co mówi to o rombie?)

   b) Jeśli $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$ i $\|\mathbf{w} - \mathbf{u}\| = \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|$, to $\angle\{\mathbf{w}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\} = \pi/2$.

   c) Dla trójkąta, którego wierzchołkami są $\mathbf{0}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, udowodnić „twierdzenie sinusów”: $\sin(\angle\{\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{u}\})/\|\mathbf{v}\| = \sin(\angle\{\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{v}\})/\|\mathbf{u}\|$.

3. Gdy $W \subset V$ jest podprzestrzenią i $\mathbf{v} \in V$, to $\mathbf{v} \perp W \Leftrightarrow \angle\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} = \pi/2\ \forall \mathbf{w} \in W$.

4. Niech $\mathbf{v}'$ będzie rzutem ortogonalnym wektora $\mathbf{v}$ na podprzestrzeń liniową W i niech $\mathbf{w} \in W$. Dowieść, że:

   a) $\angle\{\mathbf{v}, \mathbf{v}'\} \leq \angle\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$;

   b) $\angle\{\mathbf{w}, \mathbf{v}\} \leq \pi/2 \Leftrightarrow \angle\{\mathbf{w}, \mathbf{v}'\} \leq \angle\{\mathbf{w}, \mathbf{v}\}$.

Uwaga 1. $\angle\{\mathbf{v}, \mathbf{v}'\}$ nazywamy **miarą kąta pomiędzy wektorem v i podprzestrzenią** W. Z zadania wynika, że jest ona najmniejszą z liczb $\angle\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, gdzie $\mathbf{w} \in W$.

5. a) Dowieść, że $\angle\{\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{u}\} = \pi/2 \Leftrightarrow \|\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{v}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{v}\|$. Dać interpretację geometryczną.

b) Niech $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$ będą rzutami ortogonalnymi wektora $\mathbf{v}$ na dwie podprzestrzenie. Dowieść, że $\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\| \leq \|\mathbf{v}\|$.

6. Niech $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. Dowieść, że jeśli $\|\mathbf{v}\| = 1$ i $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| < 1$, to $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}'\| < \sqrt{2}$ dla $\mathbf{w}' := \mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|$.

7. Niech $\dim V = 2$ i $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

a) Czy istnieją wektory $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_4 \in V$ takie, że $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle < 0$ dla $1 \leq i < j \leq 4$?

b) Wyznaczyć kresy zbioru liczb $\{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle : \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \text{ i } \|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = 1\}$.

Problem 1. Niech $\|\cdot\|$ będzie taką funkcją na rzeczywistej przestrzeni liniowej V, że dla $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ jest $\|\mathbf{v}\| \in (0, \infty)$ i $\lim_{t\to 0} \|t\mathbf{v}\| = 0$. Dowieść, że jeśli $\|\mathbf{0}\| = 0$ i spełniona jest też tożsamość równoległoboku z zadania 4a) w §1.1, to istnieje iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na V taki, że $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ dla $\mathbf{v} \in V$.

2. Wektor najbliższy w podprzestrzeni i odległość między warstwami.

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym.

Definicja. Jak w przypadku każdej przestrzeni metrycznej, przyjmujemy dla $A, B \subset V$

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{\rho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) : \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}$$

Dla $\mathbf{a} \in V$ piszemy też $\operatorname{dist}(\mathbf{a}, B)$ zamiast $\operatorname{dist}(\{\mathbf{a}\}, B)$. Liczby $\operatorname{dist}(A, B)$ i $\operatorname{dist}(\mathbf{a}, B)$ nazywamy **odległością od** A **do** B i **odległością od a do** B, odpowiednio.

Wyznaczenie tych odległości jest na ogół rzeczą trudną. Tu ograniczymy się do przypadku bardzo specjalnych zbiorów A i B, związanych ze strukturą liniową przestrzeni V. Niech na początek $A = \{\mathbf{a}\}$ i B będzie podprzestrzenią (liniową).

Uwaga 1. Końcową część uwagi 1 z §1.3 można wypowiedzieć tak: gdy B jest podprzestrzenią (liniową) przestrzeni V, a $P_B(\mathbf{a})$ rzutem ortogonalnym na nią wektora $\mathbf{a}$, to $P_B(\mathbf{a})$ leży bliżej wektora $\mathbf{a}$ niż jakikolwiek inny wektor podprzestrzeni B. Wyrażamy to mówiąc, że $P_B(\mathbf{a})$ jest **wektorem podprzestrzeni** B**, najbliższym** wektorowi $\mathbf{a}$. W szczególności, odległość wektora $\mathbf{a}$ do podprzestrzeni B jest równa $\|\mathbf{a} - P_B(\mathbf{a})\|$.

Przykład 1. Rozpatrujemy $\mathbb{R}[x]$ jako przestrzeń z iloczynem skalarnym $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$, i jej podrzestrzeń U złożoną z wielomianów stopnia ≤ 2. Jak wiemy z przykładu 1b) w §1.5, rzutem ortogonalnym na U wielomianu x^3 jest $v' = \frac{3}{5}x$. Wielomianem stopnia ≤ 2, najbliższym wielomianowi x^3, jest więc $\frac{3}{5}x$; ponadto $\mathrm{dist}(x^3, U) = \sqrt{\int_{-1}^{1}(t^3 - \frac{3}{5}t)^2 dt} = ...$

Inny ważny przypadek, to gdy A i B są tzw. warstwami w V.

Definicja. a) Dla $A, B \subset V$ i $\mathbf{v} \in V$ przyjmujemy

$$A \pm B := \{\mathbf{a} \pm \mathbf{b} : \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\} \text{ i } \mathbf{v} \pm B := \{\mathbf{v}\} \pm B$$

b) **Warstwą** w V nazywamy zbiór postaci $\mathbf{v} + A_0$, gdzie $\mathbf{v} \in V$ i A_0 jest podprzestrzenią liniową w V. O $\mathbf{v} + A_0$ mówimy, że jest warstwą **względem** A_0.

Przypomnijmy, że warstwą w przestrzeni $\mathbb{F}^k$ jest każdy zbiór rozwiązań niesprzecznego układu równań liniowych. (Patrz twierdzenie Kroneckera–Cappellego z §III. ....).

Zadanie 1. a) Gdy A jest warstwą względem A_0, to $A - \mathbf{a} = A_0$ dla $\mathbf{a} \in A$.

b) Dla $K, L \subset V$ i $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ ma miejsce równość

$$\mathrm{dist}(\mathbf{a} + K, \mathbf{b} + L) = \mathrm{dist}(\mathbf{a} - \mathbf{b}, L - K) \tag{11}$$

Stwierdzenie 1. *Niech dane będą warstwy A i B względem skończenie–wymiarowych podprzestrzeni liniowych A_0 i B_0, odpowiednio. Wówczas:*

a) Dla $\mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B$, warunek $\mathrm{dist}(A, B) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ jest równoważny temu, by wektor $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ był ortogonalny tak do A_0, jak i do B_0.

b) Istnieją $\mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B$, spełniające powyższe dwa równoważne warunki.

Dowód. a) Niech $\mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B$. Na podstawie części b) zadania i uwagi 1, $\mathrm{dist}(A, B) = \mathrm{dist}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, A_0 - B_0)$. Dalej, $\mathrm{dist}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, A_0 - B_0) \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{x} - \mathbf{y} \perp (A_0 - B_0)$; patrz uwaga 1, zastosowana do podprzestrzeni liniowej $A_0 - B_0$. Teza a) wynika więc stąd, że $(A_0 - B_0)^{\perp} = A_0^{\perp} \cap B_0^{\perp}$.

b) Oznaczmy przez P rzutowanie ortogonalne na podprzestrzeń liniową $A_0 - B_0$, obierzmy $\mathbf{a} \in A$ i $\mathbf{b} \in B$, i przedstawmy $P(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ w postaci $\mathbf{a}_0 - \mathbf{b}_0$, gdzie $\mathbf{a}_0 \in A_0, \mathbf{b}_0 \in B_0$. Wówczas dla $\mathbf{x} := \mathbf{a} - \mathbf{a}_0$ i $\mathbf{y} := \mathbf{b} - \mathbf{b}_0$ otrzymamy $\mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B$, przy czym wektor $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ jest ortogonalny do $A_0 - B_0$ –bo jest równy $\mathbf{a} - \mathbf{b} - P(\mathbf{a} - \mathbf{b})$. Tym samym jest on ortogonalny do A_0 i do B_0. □

Uwaga 2. Szukane pary $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ możemy znajdywać jak opisano w części b) dowodu, lub wprost korzystając z warunków $\mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B, \mathbf{x} - \mathbf{y} \in A_0^{\perp} \cap B_0^{\perp}$.

Zadania uzupełniające.

1. Przy oznaczeniach zadania uz. 5 z §1.3 określić wzorem ortogonalny rzut przestrzeni $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ na

a) podprzestrzeń macierzy skalarnych (tzn. zbiór $\{\lambda \mathbf{I}_k : \lambda \in \mathbb{R}\}$);

b) podprzestrzeń macierzy dolnie trójkątnych;

c) podprzestrzeń macierzy o śladzie 0.

2. Niech f_n oznacza n–ty wielomian powstały z wielomianów $1, x, ..., x^n$ w wyniku ortogonalizacji Grama–Schmidta (bez normowania) w przestrzeni $\mathbb{R}[x]$, wyposażonej w iloczyn skalarny $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$. Dowieść, że współczynnik wielomianu f_n przy x^n jest równy 1 oraz $\int_{-1}^{1}(f_n(t))^2 dt = \inf \int_{-1}^{1}(f(t))^2 dt$, gdzie infimum jest wzięte po wszystkich wielomianach stopnia $\leq n$ mających współczynnik 1 przy x^n. (Wielomian $g_n := \frac{1}{f_n(1)} f_n$ nazywany jest n–tym **wielomianem Legendre'a**.)

Zadania ze zbioru Kostrykina: II.6.3.14 oraz 19,25,29,30 i 35–40 w §II.4.1. (Zadania 39 i 40 wykorzystują definicję z uwagi 1 w p. 2 i inną, której należy się domyśleć.)

3. Metoda najmniejszych kwadratów.

Niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ i niech V_0 będzie obrazem przestrzeni $\mathbb{F}^k$ przy odwzorowaniu liniowym $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$. (Jak uprzednio, $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.) Gdy wektor $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^l$ nie leży w V_0, to układ równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jest sprzeczny i starać się możemy jedynie o znalezienie wektora $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_k) \in \mathbb{F}^k$ takiego, by wektor $\mathbf{At} \in V_0$ był jak najbliższy $\mathbf{b}$. Jeśli odległość w $\mathbb{F}^k$ mierzyć przy pomocy standardowej normy, to jest tak wtedy, gdy $\mathbf{At}$ jest rzutem ortogonalnym wektora $\mathbf{b}$ na podprzestrzeń V_0.

Najważniejszy jest przypadek, gdy $\mathrm{rk}(\mathbf{A}) = k$, tzn. gdy kolumny macierzy $\mathbf{A}$, które oznaczymy przez $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$, są liniowo niezależne. Na podstawie uwagi 1 w §1.5, wektor $\mathbf{At} = t_1\mathbf{v}_1 + ... + t_k\mathbf{v}_k$ jest rzutem $\mathbf{b}$ na $\mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{t}$ jest rozwiązaniem układu równań

$$\sum_{j=1}^{k} x_j\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i\rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{v}_i\rangle \quad \text{dla } i = 1, ..., k \tag{12}$$

Układ ten nazywamy **układem w postaci normalnej**, odpowiadającym wyjściowemu układowi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$; wektor $\mathbf{t}$ zaś nazywamy **przybliżonym rozwiązaniem** układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ **metodą najmniejszych kwadratów**. Jest on wyznaczony jednoznacznie, bo macierz Grama $(\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle)_{i,j=1}^k$ jest nieosobliwa (patrz §1.5.) Odnotujmy też, że układ (12) zapisuje się tak: $\mathbf{A}^h\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^h\mathbf{b}$, gdzie $\mathbf{A}^h$ jest macierzą o wierszach $\overline{\mathbf{v}_1}, ..., \overline{\mathbf{v}_k}$.

Warto zauważyć, że pomiary eksperymentalne często prowadzą do sprzecznych układów równań. Na przykład, by zmierzyć pewną temperaturę możemy czynić to wielokrotnie przy pomocy różnych termometrów, uzyskując wyniki $t_1, ..., t_n$ nieco się od siebie różniące. Układ równań $t = t_1, ..., t = t_n$ jest oczywiście sprzeczny.

Ćwiczenie. a) Sprawdzić, że metoda najmniejszych kwadratów prowadzi do przyjęcia $t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$ jako szukanej temperatury.

b)* Ogólniej, dowieść, że dla $\mathbf{b}_1, ...\mathbf{b}_n \in \mathbb{C}^k$ funkcja $\sum_{i=1}^n \|\mathbf{x} - \mathbf{b}_i\|^2$ przyjmuje swe minimum w $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{b}_i$. (Było to znane **Leibnizowi**; patrz też zad. uz. 3 z §1.1.)

c) Zadanie §II.4.1.27 u Kostrykina.

Bliskie rozważanemu wyżej jest następujące zagadnienie. Niech teraz układ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ będzie niesprzeczny (jest tak np., gdy $\mathrm{rk}(\mathbf{A}) = l$). Ze wszystkich rozwiązań możemy jednak chcieć wybrać te, które jest najbliższe zadanego wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$. Gdy $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, to szukane rozwiązanie jest ortogonalnym rzutem wektora $\mathbf{v}$ na zbiór rozwiązań układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$; znaleźć je można jak w przykładzie 3 w §1.5.

<u>Zadanie uzupełniające 1.</u> Jak postąpić, gdy $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$?

<u>Problem 2.</u> (**metoda Kaczmarza** rozwiązywania równań.) Rozważmy układ l równań liniowych jednorodnych w $\mathbb{F}^k$ i wektor $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{F}^k$. Niech V_i oznacza zbiór rozwiązań i-tego równania, dla $i \in \{0, 1, ..., l-1\}$. Zdefiniujmy indukcyjnie ciąg $(\mathbf{v}_n)_{n=1}^\infty$ w $\mathbb{F}^k$ jak następuje: gdy znamy $\mathbf{v}_{n-1}$, obieramy za $\mathbf{v}_n$ rzut ortogonalny wektora $\mathbf{v}_{n-1}$ na V_j, gdzie j jest resztą z dzielenia n przez l. (Rzut ten łatwo jest wyznaczyć, patrz przykład 1 z p.3.) Dowieść, że ciąg $(\mathbf{v}_n)$ jest zbieżny do rozwiązania najbliższego wektorowi $\mathbf{v}_0$. (Wskazówka: dla $l = 2$ zrobić szkice przy $k = 2$ i $k = 3$.)

§ 3. Unitarność i sprzężenie hermitowskie (macierzy lub przekształceń).

1. Zanurzenia izometryczne i ich macierze.

<u>W tym punkcie, przestrzenie są nad wspólnym ciałem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i mają wyróżniony iloczyn skalarny.</u>

<u>Definicja.</u> Przekształcenie $L : V \to W$ nazwiemy **zanurzeniem izometrycznym**, jeśli

$$\|L(\mathbf{v}_1) - L(\mathbf{v}_2)\|_W = \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V \text{ dla } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V \tag{13}$$

Jeśli ponadto $L(V) = W$, to L nazwiemy **izometrią** (przestrzeni V na W). Będziemy mieli najczęściej do czynienia z przypadkiem, gdy $L \in \mathcal{L}(V, W)$, i wtedy mówimy o <u>liniowym</u> zanurzeniu izometrycznym i <u>liniowej</u> izometrii.

Uwaga 1. Zanurzenie izometryczne jest różnowartościowe (bo $\|L(\mathbf{v}_1) - L(\mathbf{v}_2)\| = \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| > 0$ dla $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$). Gdy więc jest ono liniowe i $\dim V = \dim W$, to jest ono „na", a więc jest izomorfizmem liniowym i izometrią.

<u>Przykład 1.</u> Niech $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni V. Wówczas:

a) Gdy $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^k c_i\mathbf{v}_i, \mathbf{w} = \sum_{i=1}^k d_i\mathbf{v}_i$, to $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \sum_i c_i\overline{d_i}$, i w szczególności $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_i |c_i|^2}$. (Wynika to wprost z zadania 2 w §1.1.) Wyznaczona przez $\mathcal{V}$ mapa $\mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_\mathcal{V}$ jest więc izometrią liniową przestrzeni V na przestrzeń $\mathbb{F}^k$, rozpatrywaną ze standardowym iloczynem skalarnym.

b)* Biorąc pod uwagę wniosek 1 w §1.2, można też zapisać a) jako **tożsamość Parsevala**:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \textstyle\sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i\rangle\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}\rangle \quad \text{dla} \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$$

Lemat 1. *Gdy $L \in \mathcal{L}(V, W)$, to warunek (13) jest równoważny każdemu z poniższych:*
a) L nie zmienia normy wektorów jednostkowych, tzn. $\|\mathbf{v}\|_V = 1 \Rightarrow \|L(\mathbf{v})\|_W = 1$.
b) L nie zmienia normy wektorów, tzn. $\|L(\mathbf{v})\|_W = \|\mathbf{v}\|_V$ dla $\mathbf{v} \in V$.
c) L nie zmienia iloczynu skalarnego wektorów: $\langle L(\mathbf{u}), L(\mathbf{v})\rangle_W = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_V$ $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Dowód. a)⇒b). Wystarczy unormować wektor $\mathbf{v}$: gdy $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, to $\mathbf{v} = c\mathbf{v}'$, gdzie $c = \|\mathbf{v}\|_V$ i $\|\mathbf{v}'\|_V = 1$, skąd $L(\mathbf{v}) = cL(\mathbf{v}')$ i $\|L(\mathbf{v})\|_W = |c| \cdot 1 = \|\mathbf{v}\|_V$; gdy zaś $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, to $\|L(\mathbf{v})\|_W = 0 = \|\mathbf{v}\|_V$.

b)⇒c). Stosujemy tożsamości polaryzacyjne (patrz zad. 3 w §1.1):

$$4\mathrm{Re}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_V = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|_V^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_V^2 = \|L(\mathbf{u}+\mathbf{v})\|_W^2 - \|L(\mathbf{u}-\mathbf{v})\|_W^2 = 4\mathrm{Re}\langle L(\mathbf{u}), L(\mathbf{v})\rangle_W$$

i podobnie $\mathrm{Im}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_V = \mathrm{Im}\langle L(\mathbf{u}), L(\mathbf{v})\rangle_W$.

Wreszcie, stosując c) przy $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ otrzymujemy a); jest też oczywiste, że dla liniowego przekształcenia L warunki b) i (13) są równoważne. □

Twierdzenie 1. *Niech $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni V. Przekształcenie $L \in \mathcal{L}(V, W)$ wtedy i tylko wtedy jest zanurzeniem izometrycznym, gdy układ $(L(\mathbf{v}_i))_{i=1}^k$ jest ortonormalny.*

Dowód. Jedna z rozważanych implikacji wynika z lematu 1 (wykorzystujemy własność c) zanurzenia L). Dla dowodu implikacji odwrotnej niech $\mathbf{v} \in V$ i $\mathbf{v} = \sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i$. Z równości Pitagorasa i ortonormalności układu $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ wynika, że $\|\mathbf{v}\| = \sum_i |\lambda_i|^2$. Jeśli układ $(L(\mathbf{v}_i))_{i=1}^k$ też jest ortonormalny, to tak samo $\|L(\mathbf{v})\|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2$ (bo $L(\mathbf{v}) = \sum_i \lambda_i L(\mathbf{v}_i)$). Stąd $\|L(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$. □

Wniosek 1. *Jeśli* $\dim V \leq \dim W$, *to istnieje liniowe zanurzenie izometryczne przestrzeni V w przestrzeń W. Gdy* $\dim V = \dim W$, *to jest ono izometrią.*

Dowód. Obierzmy ortonormalne bazy $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ i $(\mathbf{w}_i)_{i=1}^l$ przestrzeni V i W, odpowiednio. Ponieważ $k \leq l$, więc warunek $L(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ $(i = 1, ..., k)$ wyznacza pewne przekształcenie $L \in \mathcal{L}(V, W)$. Jest to szukane zanurzenie, które dla $k = l$ jest zarazem „na"; patrz uwaga 1. □

Definicja. a) Izometrie liniowe przestrzeni z iloczynem skalarnym nazywane są często **przekształceniami unitarnymi**, a w przypadku gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ – również **euklidesowymi**.

b) Niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$. Powiemy, że $\mathbf{A}$ jest **macierzą zanurzenia izometrycznego**, gdy wyznaczone przez nią przekształcenie $L_{\mathbf{A}} \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^k, \mathbb{F}^l)$, zadane wzorem

$L_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$, jest zanurzeniem izometrycznym. Gdy ponadto $k = l$, to powiemy, że $\mathbf{A}$ jest **macierzą izometrii** lub **macierzą unitarną**, przy czym przy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ częściej używana jest okropna nazwa **macierz ortogonalna**.

Zadania. (Rozważamy przestrzenie z iloczynem skalarnym.) Dowieść, że:

1. Złożenie liniowych zanurzeń izometrycznych też jest takim zanurzeniem, i tak samo dla izometrii; zaś iloczyn macierzy unitarnych jest macierzą unitarną (gdy złożenie czy iloczyn są określone).

2. Odwrotność izometrii liniowej też jest izometrią liniową. Podobnie, macierz unitarna jest odwracalna i jej odwrotność jest macierzą unitarną.

3. Gdy $V = V_1 \bigoplus V_2$, $W = W_1 \bigoplus W_2$ i przekształcenia liniowe $L_i : V_i \to W_i$ $(i = 1, 2)$ są zanurzeniami izometrycznymi, to jest nim i przekształcenie $L_1 \oplus L_2 : V \to W$, zadane wzorem $L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = L_1(\mathbf{v}_1) + L_2(\mathbf{v}_2)$ dla $\mathbf{v}_1 \in V_1, \mathbf{v}_2 \in V_2$. (Patrz §III.6.4.)

4. Każda wartość własna izometrii liniowej (odp. macierzy unitarnej) ma moduł 1.

5. * Niech V_0 będzie podprzestrzenią przestrzeni V. Gdy $\dim V \leq \dim W < \infty$, to każde zanurzenie izometryczne $Q_0 \in \mathcal{L}(V_0, W)$ można przedłużyć do zanurzenia izometrycznego $Q \in \mathcal{L}(V, W)$.

Wniosek 2. *Niech $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ będą skończonymi, ortonormalnymi bazami przestrzeni V i W, odpowiednio. Przekształcenie $L \in \mathcal{L}(V, W)$ wtedy i tylko wtedy jest zanurzeniem izometrycznym, gdy jego macierz $\mathbf{A} := [L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$ jest macierzą zanurzenia izometrycznego. Tak samo jest dla izometrii i macierzy izometrii.*

Dowód. Mapy $S : V \to \mathbb{F}^k$ i $T : W \to \mathbb{F}^l$, wyznaczone odpowiednio przez $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$, są izometriami; patrz przykład 1. Z zadań 1 i 2 wynika więc, że L wtedy i tylko wtedy jest zanurzeniem izometrycznym, gdy jest nim $L' := TLS^{-1}$, i tak samo dla izometrii. Kończy to dowód, bo $L' = L_{\mathbf{A}}$, z definicji macierzy $\mathbf{A}$. (Patrz str. 1.) □

Wniosek 3. *a) Gdy $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ są skończonymi bazami ortonormalnymi przestrzeni V, to macierz zmiany baz $[I]^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}$ jest unitarna (tzn., jest macierzą izometrii).*

b) Odwrotnie, gdy $[I]^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}$ jest macierzą izometrii i jedna z baz $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ jest ortonormalna, to i druga jest taka.

Dowód. Teza a) wynika z wniosku 2, zastosowanego do izometrii $L := I$.

Ad b). Macierz $[I]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$ jest też macierzą, w bazie $\mathcal{W}$, operatora L takiego, że $L(\mathbf{w}_i) = \mathbf{v}_i$ $\forall i$. (Czy na pewno?) Gdy więc $[I]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$ jest macierzą izometrii, a baza $\mathcal{W}$ jest ortonormalna, to L jest izometrią – a tym samym baza $\mathcal{V}$ jest ortonormalna, jako obraz takiej bazy przy izometrii. (Patrz twierdzenie 1.) W oparciu o zadanie 2, możemy też zamienić role $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$. ⊟

Zadania uzupełniające.

1. a) Niech $L \in \mathcal{L}(V, W)$. Udowodnić, że jeśli $L \neq 0$ i L zachowuje ortogonalność wektorów (tzn. $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle_V = 0 \Rightarrow \langle L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2) \rangle_W = 0$), to istnieje skalar c taki, że cL jest zanurzeniem izometrycznym.

2. * Udowodnić, że przekształcenie zachowujące iloczyn skalarny jest liniowe. (Patrz też dalej twierdzenie 2 w §5.1.)

3. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ (którą utożsamiamy z $\mathbb{R}^{k+1}$) ustalmy wektor jednostkowy $(\mathbf{u}_0, c_0) \neq (\mathbf{0}_k, 1)$ oraz przyjmijmy $V := (\mathbf{u}_0, c_0)^\perp$. Dowieść, że przekształcenie $F : V \to \mathbb{R}^k$, zadane wzorem $F(\mathbf{u}, c) = \mathbf{u} + \frac{c}{1-c_0}\mathbf{u}_0$, jest izometrią.

2. Hermitowskie sprzężenie macierzy i charakteryzacja macierzy unitarnych.

Macierze zanurzeń izometrycznych można wygodnie charakteryzować używając poniższego pojęcia, ważnego i z innych względów.

Definicja. Dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{C})$ przyjmijmy

$$\overline{\mathbf{A}} := (\overline{a_{ij}}) \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{C}) \quad \text{i} \quad \mathbf{A}^h := \overline{\mathbf{A}^t} \in \mathcal{M}_{k,l}(\mathbb{C}).$$

Macierz $\mathbf{A}^h$ nazywa się **hermitowskim sprzężeniem** (lub krótko: **sprzężeniem**) macierzy $\mathbf{A}$; inne jej częste oznaczenia to $\mathbf{A}^*$ lub $\mathbf{A}^H$ lub $\mathbf{A}^+$. Jest widoczne, że $(\mathbf{A}^h)^h = \mathbf{A}$. Gdy $\mathbf{A}$ ma wyrazy rzeczywiste, to $\mathbf{A}^h = \mathbf{A}^t$; nie popełnimy więc błędu pisząc $\mathbf{A}^h$ zamiast $\mathbf{A}^t$ dla rzeczywistych macierzy $\mathbf{A}$.

Uwaga 1. Gdy $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_l, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k \in \mathbb{C}^p$, to $l \times k$–macierz $(\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j \rangle)$ jest równa iloczynowi $\mathbf{B}\mathbf{C}^h$, gdzie $\mathbf{B}$ jest macierzą o wierszach $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_l$, a $\mathbf{C}$ – o wierszach $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$.

A oto zapowiedziana charakteryzacja macierzy zanurzeń izometrycznych:

Twierdzenie 1. *Poniższe trzy warunki są równoważne dla macierzy* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$:
a) $\mathbf{A}$ *jest macierzą zanurzenia izometrycznego, tzn. przekształcenie* $L_\mathbf{A} : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ *jest zanurzeniem izometrycznym;*
b) kolumny macierzy $\mathbf{A}$ *tworzą układ ortonormalny (w przestrzeni* $\mathbb{F}^l$*);*
c) $\mathbf{A}^h\mathbf{A} = \mathbf{I}_k$.
Jeśli ponadto $l = k$*, to warunki te są też równoważne każdemu z poniższych:*
d) $\mathbf{A}\mathbf{A}^h = \mathbf{I}_k$.
e) wiersze macierzy $\mathbf{A}$ *tworzą układ ortonormalny.*

Dowód. Ponieważ $L_\mathbf{A}(\mathbf{e}_i)$ jest i-tą kolumną macierzy $\mathbf{A}$, więc równoważność a)$\Leftrightarrow$b) wynika z twierdzenia 1 w p.1. Zaś z uwagi 1 (przy $\mathbf{C} = \mathbf{D} = \mathbf{A}^h$) wynika, że b)$\Leftrightarrow$ c).

Gdy $k = l$, to c)$\Leftrightarrow$d) na podstawie twierdzenia 2 w §II.4.2. To, że d)$\Leftrightarrow$e), wynika znów z uwagi 1, tym razem przy $\mathbf{C} = \mathbf{D} = \mathbf{A}$. $\square$

Zadanie 1. i) Każdy z warunków a), b), c) jest też równoważny temu, by $\mathbf{A}^t\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{I}_k$.

ii) Gdy macierz $\mathbf{A}$ jest unitarna, to każda z macierzy $\mathbf{A}^h$, $\mathbf{A}^t$ i $\overline{\mathbf{A}}$ też.

Ćwiczenie. a) Dowieść, że gdy liczby $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ spełniają warunki $a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1$ i $ac + bd = 0$, to $a^2 + c^2 = 1$. Sformułować analogiczną implikację dla $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

b) Dowieść, że jeśli $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ jest macierzą unitarną i $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = k$, to $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

c) Dowieść, że gdy macierz unitarna jest trójkątna, to jest diagonalna.

Wniosek 1. *Gdy* $\mathbf{A}$ *jest macierzą unitarną, to* $|\det(\mathbf{A})| = 1$*. Podobnie, gdy* $L \in \mathcal{L}(V)$ *jest izometrią, to* $|\det(L)| = 1$.

Dowód. Ponieważ $\mathbf{I} = \mathbf{A}^h\mathbf{A}$, więc $1 = \det(\mathbf{A}^h)\det(\mathbf{A}) = \overline{\det(\mathbf{A})}\det(\mathbf{A}) = |\det(\mathbf{A})|^2$. Stąd i wniosku 2 w p.1 wynika też dalsza część tezy (bo $\det(L) := \det([L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}})$, dla dowolnej bazy $\mathcal{V}$ przestrzeni V). $\square$

Sprzężenie macierzy ma znaczenie nie tylko dla charakteryzacji unitarności. Zasadnicze jest

Twierdzenie 2. *Niech* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{C})$*. Wówczas dla standardowych iloczynów skalarnych na* $\mathbb{C}^k$ *i* $\mathbb{C}^l$ *ma miejsce tożsamość*

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{\mathbb{C}^l} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}^h\mathbf{y}\rangle_{\mathbb{C}^k} \quad \textit{dla wszystkich} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^k \ \textit{i}\ \mathbf{y} \in \mathbb{C}^l.$$

Ponadto, jeśli macierz $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{k,l}(\mathbb{C})$ *ma tę własność, że* $\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{\mathbb{C}^l} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{B}\mathbf{y}\rangle_{\mathbb{C}^k}$ *dla wszystkich* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ *i* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$*, to* $\mathbf{B} = \mathbf{A}^h$.

Dowód. Traktujmy wektory jako macierze jednokolumnowe. Ponieważ $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}^n} = \mathbf{v}^h\mathbf{u}$ dla $n = k, l$ i $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, więc

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{\mathbb{C}^l} = \mathbf{y}^h\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}^h\mathbf{y})^h\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}^h\mathbf{y}\rangle_{\mathbb{C}^k}.$$

Ponadto, jeśli dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ i $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$ zachodzi $\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{\mathbb{C}^l} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{B}\mathbf{y}\rangle_{\mathbb{C}^k}$, to zachodzi więc też $\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}^h\mathbf{y} - \mathbf{B}\mathbf{y}\rangle_{\mathbb{C}^k} = 0$. Przyjmując $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i, \mathbf{y} = \mathbf{e}_j$ stwierdzamy, że ij–ty wyraz macierzy $\mathbf{A}^h - \mathbf{B}$ jest równy 0, dla dowolnych $i = 1, ..., k$ i $j = 1, ..., l$. $\square$

Zadania uzupełniające.

1. Niech wiersze macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{C})$ tworzą układ ortonormalny. Dowieść, że $\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_{\mathbb{C}^l} \leq \|\mathbf{v}\|_{\mathbb{C}^k}$ dla wszystkich $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^k$.

2. Dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{C})$ i $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^k$ dowieść, że $\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_{\mathbb{C}^l} \leq \sqrt{\|\mathbf{A}^h\mathbf{A}\mathbf{v}\|_{\mathbb{C}^k}\|\mathbf{v}\|_{\mathbb{C}^k}}$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{A}^h\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ dla pewnego skalara λ.

3. Niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ i $\mathrm{rk}(\mathbf{A}) = k$, gdzie $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dowieść, że $\mathbf{A}$ ma tzw. QR-rozkład: $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}$, gdzie macierz $\mathbf{S} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ jest górnie trójkątna, o dodatnich

wyrazach na przekątnej, zaś $\mathbf{U} \in \mathcal{M}_l(\mathbb{F})$ jest macierzą zanurzenia izometrycznego. Dowieść, że rozkład ten jest jedyny. (Wskazówka: ortogonalizacja Grama–Schmidta, zastosowana do kolumn.)

3. Hermitowskie sprzężenie przekształcenia.

W tym punkcie rozważamy wyłącznie przestrzenie z iloczynem skalarnym, skończonego wymiaru. Sprzężenie macierzy umożliwia sprzęganie przekształceń między takimi przestrzeniami.

Twierdzenie 1. *Niech $L \in \mathcal{L}(V, W)$. Wówczas istnieje jedyne przekształcenie $L^h \in \mathcal{L}(W, V)$ takie, że*

$$\langle L(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_W = \langle \mathbf{v}, L^h(\mathbf{w}) \rangle_V \quad \text{dla wszystkich} \ \ \mathbf{v} \in V \ \text{i} \ \ \mathbf{w} \in W. \tag{14}$$

Określone tym twierdzeniem zagadkowe przekształcenie $L^h \in \mathcal{L}(W, V)$ nazywamy **hermitowskim sprzężeniem** przekształcenia $L \in L(V, W)$. (Inne stosowane oznaczenia to L^* czy L^H czy L^+ w miejsce L^h.)

Uwaga 1. * Można też L^h wprowadzić w oparciu o tw. 3 w §1.3 (co gra rolę), oraz powiązać z przekształceniem $L^* : W^* \to V^*$ z §III. .... ; patrz. zad. uz. 10 i 11.

Dowód twierdzenia. Zbadajmy, kiedy przekształcenie $K \in \mathcal{L}(W, V)$ jest takie, że

$$\langle L(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_W = \langle \mathbf{v}, K(\mathbf{w}) \rangle_V \text{ dla wszystkich } \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W \tag{15}$$

W tym celu ustalmy w V i w W bazy ortonormalne $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$, odpowiednio, i przyjmijmy $l = \dim W$. Przy $\mathbf{A} := [L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$ zachodzi

$$\langle L(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_W = \langle [L(\mathbf{v})]_{\mathcal{W}}, [\mathbf{w}]_{\mathcal{W}} \rangle_{\mathbb{C}^l} = \langle \mathbf{A}[\mathbf{v}]_{\mathcal{V}}, [\mathbf{w}]_{\mathcal{W}} \rangle_{\mathbb{C}^l}$$

(Pierwsza równość wynika z ortonormalności bazy $\mathcal{W}$, por. uwagę 1b) w p.1, a druga z własności macierzy przekształcenia.) Tak samo, przy $\mathbf{B} := [K]^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}$ i $k = \dim V$,

$$\langle \mathbf{v}, K(\mathbf{w}) \rangle_V = \langle [\mathbf{v}]_{\mathcal{V}}, \mathbf{B}[\mathbf{w}]_{\mathcal{W}} \rangle_{\mathbb{C}^k}$$

Tożsamość (15) jest więc równoważna temu, by $\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{C}^l} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{B}\mathbf{y} \rangle_{\mathbb{C}^k}$ dla $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^k, \mathbf{y} \in \mathbb{F}^k$ – czyli temu, by $\mathbf{B} = \mathbf{A}^h$, patrz tw. 2 w p.2. Istnieje zatem jedyne przekształcenie K o żądanej własności i można je zdefiniować warunkiem, by $[K]^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}} = \mathbf{A}^h$. $\square$

Uwaga 2. Ostatnie zdanie dowodu wskazuje też sposób konstrukcji przekształcenia $K = L^h$, przy czym wynik jest niezależny od baz ortonormalnych $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ przestrzeni V i W, odpowiednio (wobec jedyności L^h). Ponadto, dla dowolnych takich baz ma miejsce równość $[L^h]^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}} = ([L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}})^h$. $\square$

Zadanie 1. Gdy $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ i $\langle \mathbf{u}, L_1(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, L_2(\mathbf{v}) \rangle \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, to $L_1 = L_2$.

Możemy teraz twierdzenie 1 z p.2 przenieść z macierzy na przekształcenia:

Twierdzenie 2. *Przekształcenie $L \in \mathcal{L}(V,W)$ jest zanurzeniem izometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy $L^h L = I_V$. (Jeśli ponadto $\dim(V) = \dim(W)$, to ostatni warunek oznacza, że $L^h = L^{-1}$.)*

Dowód. Jak wiemy z lematu z p.1, L jest zanurzeniem izometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle L(\mathbf{u}), L(\mathbf{v})\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. A że $\langle L(\mathbf{u}), L(\mathbf{v})\rangle = \langle \mathbf{u}, L^h L(\mathbf{v})\rangle$, to badany warunek jest na podstawie zadania równoważny temu, by $L^h L = I_V$. ⊟

Wskażmy na inne jeszcze zastosowania i własności sprzężenia hermitowskiego.

Zadanie 2. Wykorzystując tylko definicję i jedyność sprzężenia hermitowskiego wykazać, że gdy $K, L \in \mathcal{L}(V,W)$ i $T \in \mathcal{L}(W,U)$, to

a) $(L^h)^h = L$, $(K+L)^h = K^h + L^h$, $(TL)^h = L^h T^h$ oraz $(\lambda L)^h = \overline{\lambda} L^h$ dla $\lambda \in \mathbb{F}$.

b) Dla $A \subseteq V$ i $B \subseteq W$ mamy $L(A) \perp B \Leftrightarrow A \perp L^h(B)$.

Twierdzenie 3. *a)* $\det(L^h) = \overline{\det(L)}$ *dla $L \in \mathcal{L}(V)$.*

b) $|\det(L)| = 1$ *dla izometrii $L \in \mathcal{L}(V)$.*

Dowód. a). Ustalmy ortonormalną bazę $\mathcal{V}$ przestrzeni V i niech $\mathbf{A} := [L]_{\mathcal{V}}$. Wtedy $[L^h]_{\mathcal{V}} = \mathbf{A}^h$ i teza wynika z równości $\det(\mathbf{A}^h) = \det(\overline{\mathbf{A}}^t) = \det(\overline{\mathbf{A}}) = \overline{\det(\mathbf{A})}$ i definicji wyznacznika operatora.

b). Z a) i równości $L^h L = I$ wynika, że $1 = \det(I) = \det(L^h)\det(L) = |\det(L)|^2$. □

Pomiędzy obrazem każdego z przekształceń L, L^h a jądrem drugiego zachodzi ważny związek:

Twierdzenie 4. *Gdy $L \in \mathcal{L}(V,W)$, to*

$$\ker(L^h) = (\mathrm{im}(L))^\perp \quad \text{oraz} \quad \mathrm{im}(L^h) = (\ker(L))^\perp.$$

Dowód. Wobec części b) zadania 2,

$$\mathbf{w} \perp L(V) \Leftrightarrow L^h(\mathbf{w}) \perp V \Leftrightarrow L^h(\mathbf{w}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{w} \in \ker(L^h),$$

a więc $(\mathrm{im}(L))^\perp = \ker(L^h)$. Gdy zmienić L z L^h, wyniknie stąd i pozostała część. □

Ćwiczenie. Jeśli przekształcenie $L \in \mathcal{L}(V,W)$ jest „na”, to L^h jest 1-1.

Twierdzenie 5. *Niech $P : V \to V$ będzie rzutem liniowym. Wówczas:*

a) P^h jest rzutem na $\ker(P)^\perp$ *wzdłuż* $\mathrm{im}(P)^\perp$.

b) Rzut P wtedy i tylko wtedy jest ortogonalny, gdy jest **samosprzężony**, *tzn. gdy $P = P^h$.*

Dowód. a) Z równości $P^2 = P$ otrzymujemy $(P^h)^2 = P^h$. (Patrz część a) zadania 1.) Zatem P^h jest rzutem liniowym, a jego obraz i jądro określa twierdzenie 2.

b) Wobec a), $P = P^h \Leftrightarrow \ker(P) = \mathrm{im}(P)^\perp \Leftrightarrow$ rzut P jest ortogonalny. □

Niech przestrzeń liniowa V będzie sumą prostą swych podprzestrzeni U i W. (Tym razem nie dbamy o iloczyn skalarny.) Wzór $\mathbf{u} + \mathbf{w} \mapsto \mathbf{u} - \mathbf{w}$ ($\mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W$) zadaje wówczas przekształcenie liniowe S, które nazywamy **symetrią względem U, wzdłuż W**. Jest ono związane z rzutem P na U wzdłuż W zależnością $P = \frac{1}{2}(I + S)$; a że $P^2 = P$, to łatwo otrzymujemy $S^2 = I$. Odwrotnie, gdy $S \in \mathcal{L}(V)$ i $S^2 = I$, to S jest opisanej uprzednio postaci, przy $U := \{\mathbf{v} \in V : S(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\}$ i $W := \{\mathbf{v} \in V : S(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}\}$; mówimy więc, że S jest **symetrią liniową** przestrzeni V.

Gdy V jest przestrzenią z iloczynem skalarnym i $U \perp W$, to S nazywamy **symetrią ortogonalną względem podprzestrzeni U**.

Twierdzenie 6. *Gdy $S : V \to V$ jest symetrią liniową, to równoważne są warunki: a) S jest izometrią, b) $S = S^h$, c) symetria S jest ortogonalna.*

<u>Dowód.</u> a)⇔b). (S jest izometrią)⇔ ($S^hS = I$). A że $S^2 = I$, to ($S^hS = I$) ⇔ ($S^h = S$).

b)⇔c). $S = S^h \Leftrightarrow P = P^h$ dla $P := \frac{1}{2}(S + I)$, patrz zadanie 2a). Ale samosprzężoność rzutu P oznacza jego ortogonalność, a więc i ortogonalność symetrii S. □

<u>Zadania uzupełniające.</u>

1. Dla $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{C})$ przyjmijmy $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle := \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^h) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}^h\mathbf{A})$.

a) Dowieść, że $(\mathcal{M}_{l,k}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ jest przestrzenią unitarną, $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ i $\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$ dla $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{p,k}$ i $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,p}$. Ile wynosi norma macierzy unitarnej? Przy $k = l = 2$ wyznaczyć $(\mathrm{lin}\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\})^\perp$, gdzie $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Niech $K(\mathbf{X}) = \mathbf{S}\mathbf{X}$ i $L(\mathbf{X}) = \mathbf{X}\mathbf{T}$ dla $\mathbf{X} \in \mathcal{M}$, gdzie $\mathbf{S} \in \mathcal{M}_l$ i $\mathbf{T} \in \mathcal{M}_k$ są ustalone. Określić wzorem przekształcenia $K^h, L^h : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$.

c) Dowieść, że gdy macierz $\mathbf{S}$ (odp. $\mathbf{T}$) jest unitarna, to K (odp. L) jest izometrią.

2. Niech $\mathcal{V}$ będzie taką bazą przestrzeni euklidesowej/unitarnej V, że $[L^h]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}} = ([L]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}})^h$ dla każdego operatora $L \in \mathcal{L}(V)$. Dowieść, że baza ta jest proporcjonalna do ortonormalnej.

3. Przyjmijmy wyżej $l = k$. Dowieść, że gdy macierz $\mathbf{D}$ jest diagonalna i ma nieujemne wyrazy na przekątnej, to $\|\mathbf{D} - \mathbf{U}\| \ge \|\mathbf{D} - \mathbf{I}_k\|$ dla unitarnych macierzy $\mathbf{U} \in \mathcal{M}_k$. Gdy ponadto $\det(\mathbf{D}) \ne 0$, to nierówność jest ostra dla unitarnych macierzy $\mathbf{U} \ne \mathbf{I}_k$. (Uwaga: zbiór unitarnych $k \times k$–macierzy nie jest podprzestrzenią liniowa!)

4. Niech $K, L \in \mathcal{L}(V)$ i $[K, L] := KL - LK$. Udowodnić, że jeśli operatory K i L są samosprzężone, to $|\langle [K, L]\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle| \le 2\|K\mathbf{v}\| \cdot \|L\mathbf{v}\|$ dla $\mathbf{v} \in V$. (Jest to abstrakcyjna wersja zasady nieoznaczoności Heisenberga, por. [Ko–Ma], str. 155-157.)

5. Dowieść, że ortogonalność rzutu $P \in \mathcal{L}(V)$ jest równoważna każdemu z warunków a) $\|P(\mathbf{v})\| \leq \|\mathbf{v}\| \ \forall \mathbf{v} \in V$, b) $\langle P(\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle \geq 0 \ \forall \mathbf{v} \in V$.

6. Niech $L \in \mathcal{L}(V, W)$, $\mathbf{x}_0 \in V$ i $\mathbf{b} \in W$. Dowieść, że $L(\mathbf{x}_0)$ wtedy i tylko wtedy jest rzutem ortogonalnym wektora $\mathbf{b}$ na podprzestrzeń $\mathrm{im}(L)$, gdy $L^h L(\mathbf{x}_0) = L^h(\mathbf{b})$.

7. Niech $W \subset V$ będzie **podprzestrzenią niezmienniczą** danego operatora $L \in \mathcal{L}(V)$, tzn. niech $L(W) \subset W$. Dowieść, że a) $L^h(W^\perp) \subset W^\perp$, i b) dla indukowanego przez L operatora $K \in \mathcal{L}(W)$ ma miejsce równość $K^h = PL^h$, gdzie P to rzut ortogonalny na W. Wywnioskować, że $\|K^h(\mathbf{w})\| \leq \|L^h(\mathbf{w})\|$ dla $\mathbf{w} \in W$.

8. Dowieść, że gdy $L = T - I$ dla pewnej izometrii $T \in \mathcal{L}(V)$, to $\mathrm{im}(L) = (\ker(L))^\perp$.

9. Niech $P \in \mathcal{L}(V)$ będzie rzutem ortogonalnym i $L \in \mathcal{L}(V)$. Przy $V_0 := P(V)$ dowieść, że

a) Podprzestrzeń V_0 jest L–niezmiennicza wtedy i tylko wtedy, gdy $LP = PLP$.
b) Podprzestrzeń $V_0^\perp$ jest L–niezmiennicza wtedy i tylko wtedy, gdy $PL = PLP$.
c) Gdy $L = L^h$, to każdy z tych warunków jest równoważny temu, by $PL = LP$.

10. Niech $L \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie zanurzeniem izometrycznym, a P operatorem rzutu ortogonalnego przestrzeni V na jej podprzestrzeń V_0. Dowieść, że LPL^h jest operatorem rzutu ortogonalnego przestrzeni W na podprzestrzeń $W_0 := L(V_0)$.

11. Dowieść, że gdy przekształcenie $L \in \mathcal{L}(V, W)$ jest różnowartościowe, to

a) $L^h L : V \to V$ jest izomorfizmem, oraz
b) $L(L^h L)^{-1} L^h : W \to W$ jest rzutowaniem ortogonalnym na podprzestrzeń $L(V)$.

12. a) Wywnioskować z poprzedzającego zadania, że gdy $(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k)$ jest bazą danej podprzestrzeni $W_0 \subset \mathbb{F}^l$, to macierzą (w standardowych bazach) rzutu ortogonalnego przestrzeni $\mathbb{F}^l$ na W_0 jest $\mathbf{B} := \mathbf{A}(\mathbf{A}^h\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^h$, gdzie $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ to macierz o kolumnach $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$. (Macierz $\mathbf{B}$ zależy więc tylko od podprzestrzeni W_0.)

b) Gdy układ $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ jest ortonormalny, to macierz tego rzutu jest równa $\mathbf{A}\mathbf{A}^h$.
c) Jaki jest związek części b) z zadaniem uz. 4 z §1.4?

13. Przy oznaczeniach zadania 3 z p. 2 niech $\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{U}^h$. Dowieść, że zarówno $\mathbf{AB}$, jaki $\mathbf{BA}$ są macierzami rzutów ortogonalnych; ponadto, $\mathbf{ABA} = \mathbf{A}$ oraz $\mathbf{BAB} = \mathbf{B}$.

Definicja. Dla $\mathbf{v} \in V$ zdefiniujmy $\varphi_\mathbf{v} \in V^*$ wzorem $\varphi_\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle$ $(\mathbf{x} \in V)$ i oznaczmy przez $F_V : V \to V^*$ przekształcenie, przyporządkowujące każdemu wektorowi $\mathbf{v} \in V$ funkcjonał $\varphi_\mathbf{v}$. Na podstawie tw. 3 w §1.3, F_V jest bijekcją.

14. a) Nadać sens następującemu stwierdzeniu i uzasadnić je: bijekcja ta jest liniowa gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, zaś „antyliniowa" (czy „półliniowa", jak kto woli) gdy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

b) Dla dowolnego $L \in \mathcal{L}(V, W)$, operatory $L^h \in \mathcal{L}(W, V)$ i $L^* \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$ spełniają warunek $L^* \circ F_W = F_V \circ L^h$, gdzie $L^*(\varphi) := \varphi \circ L$ $(\varphi \in W^*)$.

15. Wprowadzić przekształcenie hermitowsko sprzężone w oparciu o tw. 3 w §1.3.

Zadania ze zbioru Kostrykina: 3, 4, 9, 11 w §II.4.2 i 1, 2, 8, 17 w §II.4.3.

4. Samosprzężoność i dodatnia określoność (informacje wstępne).

Niech V będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym, skończonego wymiaru. Wśród operatorów liniowych $V \to V$ wyróżnić można operatory równe swemu sprzężeniu; nazywamy je **samosprzężonymi** lub **hermitowskimi**. Podobnie, zespoloną macierz kwadratową $\mathbf{A}$ nazywamy samosprzężoną (lub: hermitowską) gdy $\mathbf{A} = \mathbf{A}^h$. Jeśli macierz $\mathbf{A}$ jest rzeczywista, warunek ten sprowadza się do symetrii: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$.

Jedną z przyczyn znaczenia operatorów i macierzy samosprzężonych jest to, że rzuty ortogonalne są samosprzężone; pokażemy też w następnych rozdziałach, że każdy operator samosprzężony jest kombinacją liniową rzutów ortogonalnych, z rzeczywistymi współczynnikami. Inną istotną przyczyną jest opisany niżej i w rozdziale VII związek macierzy samosprzężonych z iloczynami skalarnymi.

Niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ i niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza standardowy iloczyn skalarny na $\mathbb{F}^k$. Wzór

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{A}} := \langle \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij} v_j \overline{w_i} \quad \text{dla} \ \ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{F}^k \tag{16}$$

określa funkcję $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^k \times \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}$, która oczywiście dla każdego $\mathbf{w} \in \mathbb{F}^k$ jest liniowa jako funkcja zmiennej $\mathbf{v}$. Warunek i) definicji iloczynu skalarnego (tzn. warunek $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{A}} = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{A}}}$ dla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{F}^k$) jest natomiast spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $\mathbf{A}$ jest samosprzężona. (Wynika to łatwo z twierdzenia 1 w p.2).

Definicja. Samosprzężoną macierz zespoloną $\mathbf{A}$ nazywamy **dodatnio określoną**, jeśli $\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij} \overline{v_i} v_j > 0$ dla $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k \setminus \{\mathbf{0}\}$, tzn. gdy funkcja $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{A}}$ jest dodatnio określona (w sensie definicji z §1.1) i wobec tego jest iloczynem skalarnym.

Uwaga 1. Dodatnią określoność samosprzężonej macierzy $\mathbf{A}$ umiemy rozpoznać, wykonując ortogonalizację Grama–Schmidta przy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zastąpionym przez $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{A}}$, patrz zadanie uzupełniające w §1.2. (Inne sposoby poznamy w rozdzale VII.)

Uwaga 2. * Gdy $\mathbf{A}$ ma wyrazy w ciele $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{A}}$ jest iloczynem skalarnym na $\mathbb{F}^k$, to istnieje izometria liniowa $(\mathbb{F}^k, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{A}}) \to (\mathbb{F}^k, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Macierz $\mathbf{B}$ tej izometrii spełnia warunek $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{A}} = \langle \mathbf{B}\mathbf{v}, \mathbf{B}\mathbf{w} \rangle$ (równoważnie: $\langle \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{B}^h\mathbf{B}\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$) dla wszystkich $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{F}^k$. Stąd już wynika, że $\mathbf{A} = \mathbf{B}^h\mathbf{B}$.

Dowiedliśmy, że każda dodatnio określona macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ jest postaci $\mathbf{B}^h\mathbf{B}$, dla pewnej nieosobliwej macierzy $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$. Poniżej i w zadaniu z §VII.2.1 ten ważny wynik jeszcze wzmocnimy. □

Zadanie uzupełniające 1. Korzystając z zadania uzupełniającego 3 w p.2 uzyskać, by macierz $\mathbf{B}$ była górnie trójkątna i miała tylko dodatnie wyrazy na przekątnej. Otrzymamy **rozkład Cholesky'ego** dodatnio określonej macierzy $\mathbf{A}$, istotny dla metod numerycznych; dowieść jego jedyności.

Zadanie uzupełniające 2. Dowieść, że jeśli symetryczna macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ spełnia warunek $\sum_{i,j} a_{ij}v_iv_j > 0$ dla $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\mathbf{0}\}$, to jest ona dodatnio określona, tzn. $\sum_{i,j} a_{ij}v_i\overline{v_j} > 0$ dla $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^k \setminus \{\mathbf{0}\}$.

b) Gdy macierz $\mathbf{A}$ jest samosprzężona i dodatnio określona, czy $\mathbf{A}^t$ też jest taka?

Zadania ze zbioru Kostrykina: 14 w w §II.4.3.

3. Gdy operator L jest samosprzężony, to $V = \ker(L) \bigoplus \mathrm{im}(L)$.

Zadania ze zbioru Kostrykina: 1, 2, 14, 17 w §II.4.3.

§ 4. Objętość i iloczyn wektorowy w przestrzeniach euklidesowych.

1. Wyznacznik Grama a odległość od podprzestrzeni.

Niżej, V i W oznaczają przestrzenie z iloczynem skalarnym, nad ciałem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Ustalmy $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k, \mathbf{v} \in V$.

Definicja. Macierz $\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k) := (\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle)_{1 \le i,j \le k}$ nazywamy **macierzą Grama**, a jej wyznacznik –**wyznacznikiem Grama** układu wektorów $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$.

Macierz Grama wystąpiła już w przykładzie 3 z §2.2 przy okazji badania rzutu ortogonalnego. Teraz wykorzystamy własności jej wyznacznika.

Twierdzenie 1. *a) Wyznacznik Grama $|\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)|$ nie zmienia się przy zmianie kolejności wektorów $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ czy zmianie zwrotu niektorych z nich, a także przy dodaniu do któregoś wektora $\mathbf{v}_i$ kombinacji liniowej pozostałych wektorów.*

b) Wyznacznik ten nie zmieni się też po zastąpieniu wszystkich wektorów $\mathbf{v}_i$ ich obrazami $S(\mathbf{v}_i)$ przy liniowym zanurzeniu izometrycznym przestrzeni V.

c) Jeśli $V = \mathbb{F}^n$, to macierz Grama wektorów $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k \in \mathbb{F}^n$ jest równa $\mathbf{A}\mathbf{A}^h$, gdzie $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{F})$ ma wiersze $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$. Jeśli ponadto $n = k$, to wyznacznik Grama tych wektorów jest równy $|\det(\mathbf{A})|^2$.

Dowód. Część b) wynika stąd, że zanurzenie izometryczne nie zmienia iloczynów skalarnych, a c) – z przyjętych definicji i równości $|\mathbf{A}\mathbf{A}^h| = |\mathbf{A}||\overline{\mathbf{A}}|$ dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$.

Gdy $V = \mathbb{F}^k$, to a) wynika z c), bo opisane operacje nie zmienią $|\det(\mathbf{A})|$. By dowieść a) w pełnej ogólności, weźmy liniowe zanurzenie izometryczne $S : \mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k) \to \mathbb{F}^k$. (Patrz zadanie 4 w §3.1.) Poddajmy układ $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ jednej z opisanych w a) operacji, otrzymując $(\mathbf{v}'_i)_{i=1}^k$. Z b) wynika, że $|\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)| = |\mathbf{G}(S(\mathbf{v}_1), ..., S(\mathbf{v}_k))|$ i podobnie po zastąpieniu $\mathbf{v}_i$ przez $\mathbf{v}'_i$, zaś z rozpatrzonego przypadku szczególnego – że $|\mathbf{G}(S(\mathbf{v}_1), ..., S(\mathbf{v}_k))| = |\mathbf{G}(S(\mathbf{v}'_1), ..., S(\mathbf{v}'_k))|$. Stąd $|\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)| = |\mathbf{G}(\mathbf{v}'_1, ..., \mathbf{v}'_k)|$. □

Twierdzenie 2. $|\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, .., \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k)| = |\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, .., \mathbf{v}_{k-1})| \cdot (\mathrm{dist}(\mathbf{v}_k, \mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}))^2$.

Dowód. Niech $\mathbf{v}'_k$ oznacza rzut ortogonalny wektora $\mathbf{v}_k$ na $\mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1})$; wówczas $|\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k)| = |\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k - \mathbf{v}'_k)|$ (patrz a) powyżej). A że $\mathbf{v}_k - \mathbf{v}'_k \perp \mathbf{v}_i$ dla $i < k$, to ostatnia kolumna i ostatni wiersz macierzy $\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k - \mathbf{v}'_k)$ są równe $(0, ..., 0, \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}'_k\|^2)$. Ponadto, $\|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}'_k\| = \mathrm{dist}(\mathbf{v}_k, \mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}))$, więc tezę otrzymujemy rozwijając $|\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, .., \mathbf{v}_k - \mathbf{v}'_k)|$ wzdłuż ostatniego wiersza. □

Wniosek 1. *a)* $0 \leq |\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)| \leq \prod_{i=1}^k \|\mathbf{v}_i\|^2$;
b) $|\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ *są liniowo zależne;*
c) Gdy $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ *są liniowo niezależne, to*

$$\mathrm{dist}(\mathbf{v}, \mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)) = \sqrt{|\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k, \mathbf{v})|/|\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)|}$$

Dowód. Ponieważ $0 \leq \mathrm{dist}(\mathbf{v}_k, \ \mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1})) \leq \|\mathbf{v}_k\|$, więc a) wynika natychmiast z twierdzenia 2 przez indukcję względem k. Teza b) była już odnotowana we wniosku 1 z §1.5. (Wynika też ona przez indukcję z twierdzenia 2 – jak?) Teza c) wynika z poprzednich i twierdzenia 2. □

Część c) wniosku daje szukany wzór na odległość od podprzestrzeni, zaś część a) pozwala oszacować wyznacznik macierzy niekoniecznie zadanej jako macierz Grama:

Twierdzenie 3. *Niech* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$.
a) $|\det(\mathbf{A})| \leq \prod_{i=1}^k \|\mathbf{a}_i\|$, *gdzie* $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ *są wierszami* $\mathbf{A}$. *(Jest to tzw.* **nierówność Hadamarda**.*)*
*b)** Jeśli macierz* $\mathbf{A}$ *jest samosprzężona i dodatnio półokreślona, to* $0 \leq |\mathbf{A}| \leq a_{11}a_{22}...a_{kk}$.

Dowód. Ponieważ $|\mathbf{A}| = \sqrt{|\mathbf{G}(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k)|}$, patrz twierdzenie 1c), więc a) wynika z wniosku 1a).

Do dowodu b) załóżmy wpierw, że macierz $\mathbf{A}$ jest dodatnio określona. Wobec uwagi 1 z §3.4 istnieje wówczas macierz kwadratowa $\mathbf{B}$ taka, że $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{B}^h$. (Odpowiada ona macierzy $\mathbf{B}^h$ ze stwierdzenia.) Dla wierszy $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k$ macierzy $\mathbf{B}$ zachodzi więc $\mathbf{A} = \mathbf{G}(\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k)$. W szczególności, $\|\mathbf{b}_i\|^2 = a_{ii}$ dla $i = 1, ..., k$ i ponownie teza wynika z części a) wniosku 1.

Gdy macierz $\mathbf{A}$ jest tylko **dodatnio półokreślona**, tzn. $\sum_{i,j} a_{ij} z_i \overline{z_j} \geq 0$ dla $z_1, ..., z_k \in \mathbb{C}$, to rozważamy macierz $\mathbf{A}_\varepsilon := \mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{I}$, otrzymując $0 \leq |\mathbf{A}_\varepsilon| \leq (a_{11} + \varepsilon)...(a_{kk} + \varepsilon)$ dla każdego $\varepsilon > 0$; następnie, przechodzimy do granicy przy $\varepsilon \to 0$. □

Zadania uzupełniające.

1. Dowieść, że nierówność Hadamarda jest ostra, poza przypadkiem, gdy układ $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ jest ortogonalny lub $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ dla pewnego i.

2. Na płaszczyźnie, z pewnego punktu wychodzą półproste L_1, L_2, L_3. Oznaczmy przez α_{ij} miarę kąta utworzonego przez L_i i L_j. Dowieść, że macierz $(\cos(\alpha_{ij}))_{i,j}$ jest osobliwa. Uogólnić.

3. Niech wektory $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k$ spełniają warunki $\mathbf{w}_j = \sum_{i=1}^{k} c_{ij}\mathbf{v}_i$ dla $j = 1, ..., k$ i danych skalarów c_{ij}. Dowieść, że $|\mathbf{G}(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k)| = |\mathbf{C}|^2|\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)|$ i ustalić zależność między $\mathbf{G}(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k)$ a $\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$. (Wskazówka: dowód części b) i c) twierdzenia 1.)

Problem 3. W przestrzeni $\mathbb{R}[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx$ obliczyć odległość x^k od $\mathrm{lin}(1, x, ..., x^{k-1})$.

2. Objętość w przestrzeni euklidesowej.

W tym punkcie rozważane przestrzenie są euklidesowe, tzn. rzeczywiste, skończonego wymiaru i wyposażone w iloczyn skalarny; oznaczać je będziemy E, E' i.t.p.

Równoległościanem rozpiętym na wektorach $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k \in E$ nazwiemy zbiór

$$R(\mathbf{v}_1, .., \mathbf{v}_k) := \{t_1\mathbf{v}_1 + ... + t_k\mathbf{v}_k : \ t_1, ..., t_k \in [0, 1]\}. \tag{17}$$

Jest on **zdegenerowany**, gdy wektory $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ są liniowo zależne. (By uczynić te pojęcia bliższymi zauważmy, że zdegenerowane równoległościany rozpięte na 3 wektorach są na ogół sześciobokami o bokach parami równoległych; odrobina wyobraźni pozwala jednak spostrzec je jako „spłaszczone” równoległościany.)

k-**wymiarową miarę** $\mu_k(R)$ omawianego równoległościanu R definujemy tak:

$$\mu_k(R(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)) := \sqrt{|\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)|}.$$

Własności k-wymiarowej miary (wynikające bezpośrednio z twierdzeń 1 i 2 w p.1):

i) 1-wymiarowa miara odcinka $\{t\mathbf{v} : t \in [0, 1]\}$ jest równa $\|\mathbf{v}\|$.

ii) $\mu_k(R(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)) = \mu_k(R(\varepsilon_1\mathbf{v}_{\sigma(1)}, ..., \varepsilon_k\mathbf{v}_{\sigma(k)}))$, dla każdej permutacji $\sigma \in \mathbf{S}_k$ i liczb $\varepsilon_i = \pm 1$. (Inaczej mówiąc, miara równoległościanu nie zależy od kolejności, w której wymieniono rozpinające go wektory, i od zwrotu tych wektorów.)

iii) $\mu_k(R(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k) = \mu_{k-1}(R(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1})) \cdot \mathrm{dist}(\mathbf{v}_k, \mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}))$, tzn. miara równoległościanu jest równa mierze podstawy pomnożonej przez wysokość. (Ze względu na ii), podstawa może być wyznaczona przez każdych $k-1$ z k wektorów rozpinających rozpatrywany równoległościan.)

iv) $\mu_k(S(R)) = \mu_k(R)$ dla zanurzenia izometrycznego $S \in \mathcal{L}(E, E')$ i równoległościanu $R \subset E$.

Z i) oraz iii) wynika, że gdy $E = \mathbb{R}^3$ i iloczyn skalarny jest standardowy, to $\mu_2(R(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2))$ jest polem powierzchni równoległoboku $R(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, a $\mu_3(R(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3))$ –objętością równoległościanu $R(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, rozważanymi w szkole. Z tego powodu zamiast „k–wymiarowa miara" mówi się też „k-**wymiarowa objętość**".

Ćwiczenie. Obliczyć pole powierzchni równoległoboku rozpiętego na wektorach $(0, 0, -1, 1)$ i $(1, 0, -1, 2)$ w przestrzeni $(\mathbb{R}^4, \langle\ ,\ \rangle)$, gdzie $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := u_1v_1 + 2u_2v_2 - u_1v_2 - u_2v_1 + 3u_3v_3 + u_4v_4$.

Dla przestrzeni $\mathbb{R}^k$ wyposażonej w standardowy iloczyn skalarny otrzymujemy ważną interpretację części b) twierdzenia 1 w p.1:

Wniosek 1 (wyjaśniający znaczenie modułu wyznacznika macierzy rzeczywistej)**.** *Moduł wyznacznika rzeczywistej $k \times k$–macierzy jest równy objętości równoległościanu rozpiętego w $\mathbb{R}^k$ na jej kolumnach.* □

Wniosek 2. * *Gdy $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_l \in \mathbb{R}^k$ i $l \leq k$, to*

$$\mu_l(R(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_l)) = \sqrt{\sum_{\mathbf{B}} |\mathbf{B}|^2},$$

gdzie $\mathbf{B}$ przebiega wszystkie $l \times l$-podmacierze macierzy, której wierszami są $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_l$.

Dowód. * Oznaczmy ostatnią $l \times k$ –macierz przez $\mathbf{A}$. Na mocy twierdzeń 1b) z p.1 i Bineta–Cauchy'ego z §IV.3.3 mamy $(\mu_l(R))^2 = |\mathbf{A}\mathbf{A}^h| = \sum_{\mathbf{B}} |\mathbf{B}|^2$. (W przypadku $l = k - 1$ patrz też uwagę 1 w p.3, niezależną od twierdzenia Bineta–Cauchy'ego.) □

Uwaga 1. * j-tym wierszem klatki $\mathbf{B}$ wyznaczonej przez kolumny o numerach $i_1, ..., i_l$ jest rzut ortogonalny wektora $\mathbf{v}_j$ na $\mathrm{lin}(\mathbf{e}_{i_1}, ..., \mathbf{e}_{i_l})$. Tym samym $|\mathbf{B}|$ jest, wobec wniosku 1, l-wymiarową miarą obrazu równoległościanu R przy ortogonalnym rzutowaniu na $\mathrm{lin}(\mathbf{e}_{i_1}, ..., \mathbf{e}_{i_l})$. Wniosek 2 można więc interpretować jako rozszerzenie (na miary) twierdzenia Pitagorasa; to ostatnie odpowiada przypadkowi $k = 2, s = 1$.

Ćwiczenie. Przy $k = 3$ i $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 3, 2)$ naszkicować równoległobok $R(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ i jego powyższe (trzy) rzuty, a także sprawdzić omawianą równość.

Wniosek 3. *Niech E będzie k–wymiarową przestrzenią euklidesową, niech $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in E$ i niech $R = R(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$. Wówczas $\mu_k(R) = |\det([\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\mathbf{v}_k]_{\mathcal{B}})|$, dla każdej ortonormalnej bazy $\mathcal{B}$ przestrzeni E.*

Dowód. Niech $S(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ dla $\mathbf{v} \in E$. Z własności *iv)* miary μ_k i przykładu 1 w §3.1 wynika, że $\mu_k(R) = \mu_k(S(R))$. Pozostaje do $S(R)$ zastosować wniosek 1. □

Uwaga 2. * Można udowodnić, że gdy R, R' są równoległościanami w E i $p + R = p' + R'$ dla pewnych $p, p' \in E$, to R i R' rozpięte są przez tyle samo niezerowych wektorów (powiedzmy, l) i $\mu_l(R) = \mu_l(R')$. Pozwala to określić miarę zbiorów postaci $p + R$ (bez wskazania punktu p i wektorów rozpinających równoległościan R).

Zadania uzupełniające.

1. Niech R będzie równoległościanem w przestrzeni euklidesowej E, rozpiętym na l wektorach, i niech R' będzie jego obrazem przy rzutowaniu ortogonalnym przestrzeni E na jej podprzestrzeń. Dowieść, że $\mu_l(R') \le \mu_l(R)$.

2. Niech E będzie przestrzenią euklidesową i niech $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l \in E$.
   a) Dowieść, że $\mu_{k+l}(R(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l)) = \mu_k(R(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)) \cdot \mu_l(R(\mathbf{w}'_1, ..., \mathbf{w}'_l))$, gdzie $\mathbf{w}'_i$ to rzut ortogonalny wektora $\mathbf{w}_i$ na $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}^\perp$.
   b) Dowieść, że $\mu_{k+l}(R(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l)) \le \mu_k(R(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)) \cdot \mu_l(R(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l))$.
   c) Jak z b) wynika nierówność Hadamarda ?

3. Objętość zorientowana i iloczyn wektorowy.

W tym punkcie, E i E' oznaczają zorientowane przestrzenie euklidesowe i $k := \dim(E)$.

Definicja. **Zorientowaną miarą** lub **zorientowaną objętością** (zorientowanego) równoległościanu $\vec{R}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ nazywamy liczbę $\varepsilon \cdot \mu_k(R(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k))$, gdzie $\varepsilon = 1$ jeśli $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ jest dodatnio zorientowaną bazą przestrzeni E, i $\varepsilon = -1$ w przeciwnym razie. Miarę zorientowaną oznaczamy $\vec{\mu}_k(\vec{R}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k))$. Podkreślmy, że jest ona zdefiniowana tylko wtedy, gdy liczba wektorów $\mathbf{v}_i$ jest równa $\dim E$.

Jak widać, miara ta zależy nie tylko od badanego równoległościanu, ale i od kolejności rozpinających go wektorów, i tego tyczy się żądanie, by równoległościan był *zorientowany* – czyli podany wraz z klasą orientacji tego układu wektorów. Żądanie to nie jest jest na ogół wypowiadane i jest traktowane jako domyślne, gdy mowa o mierze zorientowanej; tym niemniej, strzałeczka nad R ma o nim przypominać, a strzałeczka nad μ – że rozpatrywana miara zależy od tej orientacji.

Twierdzenie 1. *Dla każdej dodatnio zorientowanej bazy ortonormalnej $\mathcal{B}$ przestrzeni E, zorientowana miara równoległościanu $\vec{R}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ jest równa* $\det([\mathbf{v}_1]_\mathcal{B}, ..., [\mathbf{v}_k]_\mathcal{B})$. *Miara ta jest wieloliniową i antysymetryczną funkcją wektorów $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$.*

Dowód. Ze względu na wniosek 3 w p.2, dla dowodu pierwszej części tezy należy tylko zbadać znak. Jednak macierz o kolumnach $[\mathbf{v}_1]_\mathcal{B}, ..., [\mathbf{v}_k]_\mathcal{B}$ jest równa $[I]_\mathcal{B}^\mathcal{V}$, więc jej wyznacznik $\det([\mathbf{v}_1]_\mathcal{B}, ..., [\mathbf{v}_k]_\mathcal{B})$ jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy baza $\mathcal{V}$ jest zorientowana zgodnie z $\mathcal{B}$.

Druga część tezy wynika z własności wyznacznika jako funkcji kolumn i liniowości przekształcenia $E \ni \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_\mathcal{B} \in \mathbb{R}^k$, dla ustalonej bazy $\mathcal{B}$. $\square$

Wniosek 1. *Przekształcenie liniowe $L : E \to E$ zmienia zorientowaną objętość k–wymiarowych równoległościanów w proporcji $\det(L) : 1$, zaś niezorientowaną – w proporcji $|\det(L)| : 1$. Proporcje te są więc niezależne od rozpatrywanego na E iloczynu skalarnego.*

Dowód. Wystarczy rozpatrzeć przypadek miary zorientowanej, tzn. dowieść, że dla $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k \in E$ zachodzi równość $\vec{\mu}_k(\vec{R}(L(\mathbf{v}_1), ..., L(\mathbf{v}_k))) = \det(L) \cdot \vec{\mu}_k(\vec{R}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k))$. Jak już wiemy, jest to równoważne temu, by $\det(\mathbf{Y}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{X})$, gdzie dla pewnej dodatnio zorientowanej ortonormalnej bazy $\mathcal{B}$ przyjęto $\mathbf{A} := [L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, a za $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ – macierze o kolumnach $[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\mathbf{v}_k]_{\mathcal{B}}$ i $[L(\mathbf{v}_1)]_{\mathcal{B}}, \ldots, [L(\mathbf{v}_k)]_{\mathcal{B}}$, odpowiednio. A że j–te kolumny macierzy $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ związane są zależnością $[L(\mathbf{v}_j)]_{\mathcal{B}} = \mathbf{A}[\mathbf{v}_j]_{\mathcal{B}}$, to $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$ i pozostaje skorzystać z twierdzenia Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy. □

Twierdzenie 1 mówi, że z k–wymiarową miarą równoległościanów w k–wymiarowej zorientowanej przestrzeni euklidesowej E związać można funkcję wieloliniową i antysymetryczną, kosztem uwzględnienia orientacji równoległościanu. Powstaje pytanie, czy podobnie można postąpić z $k-1$–wymiarową miarą. Okazuje się, że można, lecz wartości funkcji będą wektorowe. Opiszemy tę konstrukcję niżej.

Definicja. Niech $\mathbf{v}_1, ...\mathbf{v}_{k-1} \in E$. Z twierdzenia 1 wynika, że funkcjonał $E \ni \mathbf{v} \mapsto \vec{\mu}_k(\vec{R}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}))$ jest linowy. Na podstawie twierdzenia 3 z §1.3 wyznacza on jedyny wektor $\mathbf{w}$ taki, że

$$\vec{\mu}_k(\vec{R}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v})) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \quad \text{dla } \mathbf{v} \in V. \tag{18}$$

Nazywamy go **iloczynem wektorowym** wektorów $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}$ i oznaczamy przez $\mathbf{v}_1 \times ... \times \mathbf{v}_{k-1}$. (Kolejność wektorów jest istotna!)

Twierdzenie 2. *Niech $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1} \in E$. Iloczyn wektorowy $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \times ... \times \mathbf{v}_{k-1}$ ma następujące własności, które go jednoznacznie wyznaczają:*
i) $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}_i$ *dla* $i = 1, ..., k-1$;
ii) $\|\mathbf{w}\| = \lambda$, *gdzie* $\lambda = \mu_{k-1}(R(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}))$ *jest (niezorientowaną) miarą równoległościanu rozpiętego przez* $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}$;
iii) $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ *lub* $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{w})$ *jest dodatnio zorientowaną bazą przestrzeni* E.

Dowód. Jeśli w (18) przyjmiemy $\mathbf{v} := \mathbf{v}_i$, to uzyskamy $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle = 0$, dla $i = 1, ..., k-1$. To dowodzi i).

Dalej, porównajmy wartości bezwględne obu stron w (18), obierając $\mathbf{v}$ tak, by $\mathbf{v} \in \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}\}^{\perp} \setminus \{\mathbf{0}\}$; stwierdzimy, że $|\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle| = \mu_{k-1}(R(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1})) \cdot \|\mathbf{v}\|$, patrz własność iii) z p.2. Gdy więc $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, to $\mu_{k-1}(R(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1})) = 0$, a w przeciwnym razie biorąc $\mathbf{v} := \mathbf{w}$ otrzymamy $\|\mathbf{w}\| = \mu_{k-1}(R(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}))$. To dowodzi warunku (ii).

Jest też spełniony warunek iii), bo gdy $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ i w (18) nadal weźmiemy $\mathbf{v} := \mathbf{w}$, to uzyskamy $\vec{\mu}_k(\vec{R}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{w})) > 0$ – co z definicji miary zorientowanej oznacza (iii).

Pozostaje dowieść jednoznaczności wektora $\mathbf{w}$, spełniającego warunki od i) do iii). (Nie zakładamy już, że $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \times ... \times \mathbf{v}_{k-1}$.) Gdy $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}$ są liniowo zależne, to ii) zachodzi tylko dla $\mathbf{w} = \mathbf{0}$; patrz wniosek 1b) w p.1. A w przeciwnym razie $\dim(\mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1})) = k - 1$, skąd $(\mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}))^\perp = \mathbb{R}\mathbf{e}$ dla pewnego $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$. Warunki i) i ii) są więc wtedy spełnione przez dokładnie dwa wektory $\mathbf{w} = \pm\lambda\mathbf{e}/\|\mathbf{e}\|$, a trzeci warunek iii) – przez dokładnie jeden z tych dwóch. □

Jak wyznaczyć współrzędne iloczynu wektorowego w danej ortonormalnej i dodatnio zorientowanej bazie $\mathcal{B}$ przestrzeni E?

Definicja. Dla $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{k-1} \in \mathbb{R}^k$ i układu wektorów $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k)$ przestrzeni E oznaczmy przez $\det(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{k-1}, \mathcal{B})$ wyznacznik macierzy o pierwszej kolumnie $\mathbf{w}_1$, drugiej $\mathbf{w}_2$ itd. aż do kolumny $k-1$, zaś kolumnie k będącej ciągiem wektorów $(\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k)$. Wyznacznik ten definiujemy poprzez formalne rozwinięcie wzdłuż k-tej kolumny: $\det(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{k-1}, \mathcal{B}) := \sum_{i=1}^k (-1)^{k+i} c_i \mathbf{b}_i$, gdzie $c_i = \det(\mathbf{A}_i)$ i $\mathbf{A}_i$ otrzymano z macierzy o kolumnach $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{k-1}$ przez wykreślenie i–tego wiersza. (Wyrazami macierzy $\mathbf{A}_i$ są już tylko skalary, więc wyznacznik ma sens.)

Twierdzenie 3. *Niech $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{k-1}$ i niech baza $\mathcal{B}$ przestrzeni E będzie dodatnio zorientowana i ortonormalna. Wówczas $\mathbf{w} = \det([\mathbf{v}_1]_\mathcal{B}, \ldots, [\mathbf{v}_{k-1}]_\mathcal{B}, \mathcal{B})$.*

Dowód. Przy $\mathbf{w}_i := [\mathbf{v}_i]_\mathcal{B}$ i oznaczeniach definicji, niech $\mathbf{w}' := \sum_{i=1}^k (-1)^{k+i} c_i \mathbf{b}_i$. Dla każdego wektora $\mathbf{v} = \sum_i d_i \mathbf{b}_i$ otrzymujemy $\langle \mathbf{w}', \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^k (-1)^{k+i} c_i d_i$. Prawa strona tej równości to rozwinięcie, wzdłuż ostatniej kolumny, wyznacznika macierzy o kolejnych kolumnach $[\mathbf{v}_1]_\mathcal{B}, ..., [\mathbf{v}_{k-1}]_\mathcal{B}, [\mathbf{v}]_\mathcal{B}$ (bo ciąg $(d_1, ..., d_k)$ jest równy $[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$). Z twierdzenia 1 wynika więc, że $\langle \mathbf{w}', \mathbf{v} \rangle = \vec{\mu}_k(\vec{R}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}))$. Tym samym, $\mathbf{w}'$ spełnia warunek definiujący wektor $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \times ... \times \mathbf{v}_{k-1}$. □

Wniosek 2. *Przyporządkowanie $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^{k-1} \mapsto \mathbf{v}_1 \times ... \times \mathbf{v}_{k-1}$ jest wieloliniową i antysymetryczną funkcją zmiennych $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1} \in E$,*

Dowód. Przy poprzednich oznaczeniach, współczynniki c_i w przedstawieniu $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^k (-1)^{k+i} c_i \mathbf{b}_i$ okazują się być wieloliniowymi i antysymetrycznymi funkcjami zmiennych $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}$. (Uzasadnienie jak w tw. 1.)

Uwaga 1. Z twierdzenia 3 i własności ii) iloczynu wektorowego wynika uzasadnienie wniosku 2 w p.2, gdy $l = k - 1$. ⊟

Zadanie 1. Jeśli $T : E \to E'$ jest izometrią zachowującą orientację, to $T(\mathbf{v}_1 \times ... \times \mathbf{v}_{k-1}) = T(\mathbf{v}_1) \times ... \times T(\mathbf{v}_{k-1})$ dla każdych $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1} \in E$.

Problem 4. Udowodnić, że iloczyn wektorowy jest, z dokładnością do proporcjonalności, jedyną antysymetryczną i wieloliniową funkcją z $E \times ... \times E$ ($k-1$ czynników) do E, której wartość na dowolnym ciągu $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}$ leży w $\mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1})^\perp$.

Zadania.

2. Dla $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathbb{R}^3$ dowieść, że (orientacja i iloczyn skalarny są standardowe):

$$a) \qquad \text{Jeli } \mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{0}, \text{ to } \mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\mathbf{w}\times\mathbf{u}$$

$$b) \qquad \langle \mathbf{u}\times\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\times\mathbf{w}\rangle$$

$c)$ $\quad \langle \mathbf{u}\times\mathbf{v}, \mathbf{w}\times\mathbf{w}'\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}'\rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}'\rangle\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \det(\mathbf{AB})$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą o wierszach $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, zaś $\mathbf{B}$ macierzą o kolumnach $\mathbf{w}, \mathbf{w}'$.

Uwaga: jest to wersja tożsamości Lagrange'a z zad. uz. 1 w §IV.3.3, dla $k = 3$ i $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

$$d) \qquad (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle\mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle\mathbf{u} \quad \text{(wskazówka: b)+c));}$$

$$e) \qquad (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} + (\mathbf{v}\times\mathbf{w})\times\mathbf{u} + (\mathbf{w}\times\mathbf{u})\times\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

3. Niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ będzie macierzą antysymetryczną (tzn. $\mathbf{A}^t = -\mathbf{A}$). Dowieść istnienia wektora $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ takiego, że $\mathbf{Av} = \mathbf{a}\times\mathbf{v}$ dla $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

§ 5. Więcej o izometriach liniowych. Przestrzenie E^2 i E^3.

W tym paragrafie podamy dalsze informacje o izometriach przestrzeni euklidesowych; uzupełnimy je jeszcze w §3.4 i 3.5 rozdziału VI. Poza pierwszymi dwoma punktami, dyskutowane rezultaty mają charakter uzupełniający i dotyczą przestrzeni wymiaru 3. Jest charakterystyczne, że opis izometrii liniowych przestrzeni, z którą każdy ma do czynienia, wymaga rozważań najbardziej w tym rozdziale zaawansowanych. Trudności biorą się stąd, macierze tych izometrii są wyrażone przez 9 wyrazów, które jednak nie są niezależne, lecz spełniają 6 nieliniowych równań, wyrażających ortonormalność wierszy.

1. Rola symetrii lustrzanej i przedłużanie zanurzeń izometrycznych ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$).

W tym punkcie zakładamy, że rozważane przestrzenie są euklidesowe, tzn. rzeczywiste, skończenie–wymiarowe i z wyróżnionym iloczynem skalarnym. Oznaczamy je E, E' itp.

Definicja. Ortogonalną symetrię liniową przestrzeni E, względem jej podprzestrzeni E_0, nazwiemy **lustrzaną**, gdy $\dim(E_0) = \dim(E) - 1$, **osiową** gdy $\dim(E_0) = 1$, zaś **środkową**, gdy $E_0 = \{\mathbf{0}\}$. Gdy $E_0 = E$, symetria jest identycznością.

Zadanie 1. a) Gdy $\|\mathbf{u}\| = 1$, to symetria lustrzana względem $\mathbf{u}^\perp$ jest zadana wzorem $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} - 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle\mathbf{u}$ dla $\mathbf{v} \in E$.

b) Jeśli $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{w}\|$, to symetria ortogonalna względem $(\mathbf{w} - \mathbf{u})^\perp$ zamienia $\mathbf{u}$ z $\mathbf{w}$. Symetria ta jest lustrzana gdy $\mathbf{u} \neq \mathbf{w}$, zaś jest identycznością gdy $\mathbf{u} = \mathbf{w}$.

Twierdzenie 1. *Izometria liniowa k–wymiarowej przestrzeni euklidesowej jest złożeniem pewnej liczby $j \leq k$ liniowych symetrii lustrzanych. (Identyczność traktujemy jako złożenie 0 symetrii.)*

Dowód. Przez „wsteczną" indukcję względem liczby n udowodnimy więcej: jeśli dla izometrii $L \in \mathcal{L}(E)$ zachodzi $\dim(E_0) = n$, gdzie $E_0 = \{\mathbf{x} \in E : L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}$, to L jest złożeniem nie więcej, niż $k - n$ liniowych symetrii lustrzanych. Gdy $n = k$, to nie ma czego dowodzić; niech więc $0 \leq n < k$ i teza będzie słuszna przy n zastąpionym przez $n + 1$. Obierzmy wektor $\mathbf{v} \in E_0^\perp \setminus \{\mathbf{0}\}$. Ponieważ L zachowuje ortogonalność i $L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ dla $\mathbf{x} \in E_0$, to $L(\mathbf{v}) \perp E_0$. Stąd $L(\mathbf{v}) - \mathbf{v} \in E_0^\perp$ i symetria ortogonalna S względem $(L(\mathbf{v}) - \mathbf{v})^\perp$ spełnia warunki $S(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ dla $\mathbf{x} \in E_0$ oraz $S(L(\mathbf{v})) = \mathbf{v}$ (korzystamy z zadania). Dla $E'_0 := \{\mathbf{y} \in E : SL(\mathbf{y}) = \mathbf{y}\}$ jest więc $\dim(E'_0) > n$ (bo $E'_0 \supset E_0 \cup \{\mathbf{v}\}$, gdzie $\mathbf{v} \notin E_0$), wobec czego SL jest złożeniem $j \leq k - n - 1$ symetrii lustrzanych na podstawie założenia indukcyjnego. A że $L = S(SL)$, to L jest złożeniem $j + 1$ takich symetrii: jedną z nich jest S, a pozostałymi te, których złożeniem jest SL. $\square$

Uwaga 1. * Oprócz poznawczego, twierdzenie 1 ma też istotne znaczenie praktyczne. Gdy S jest symetrią ortogonalną przestrzeni $\mathbb{R}^k$ względem przestrzeni $\mathbf{u}^\perp$, gdzie $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$ jest (kolumnowym) wektorem o długości 1, to $S = I - 2P$, gdzie P jest rzutem ortogonalnym na $\mathbb{R}\mathbf{u}$. Stąd $[S] = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^t$ na podstawie zadania uzupełniającego 4 z §1.4. Ta ortogonalna i symetryczna macierz nazywana bywa (rzeczywistą) **macierzą Householdera** odpowiadającą wektorowi $\mathbf{u}$. Z twierdzenia wynika, że każda macierz ortogonalna rozmiaru $k \times k$ jest iloczynem nie więcej niż k macierzy Householdera. Własność ta jest wykorzystywana w algorytmach numerycznych.

Zajmiemy się teraz pytaniem, kiedy zanurzenie izometryczne podzbioru przestrzeni euklidesowej przedłuża się do liniowego zanurzenia izometrycznego całej przestrzeni.

Twierdzenie 2 (o silnej jednorodności przestrzeni euklidesowych)**.** *Niech E i E' będą przestrzeniami euklidesowymi, niech $A \subset E$ i niech $L_0 : A \to E'$ będzie zanurzeniem izometrycznym (tzn. $\|L_0(\mathbf{v}_1) - L_0(\mathbf{v}_2)\|_{E'} = \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_E$ dla $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in A$). Niech dalej $\mathbf{0}_E \in A$ i $L_0(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_{E'}$. Wówczas L_0 można przedłużyć do liniowego zanurzenia izometrycznego $\mathrm{lin}(A) \to E'$; a gdy $\dim(E) \leq \dim(E')$, to L_0 można przedłużyć i do liniowego zanurzenia izometrycznego $E \to E'$.*

Dowód. Dla $\mathbf{v} \in A$ oznaczajmy dla krótkości $L_0(\mathbf{v})$ przez $\mathbf{v}'$. Dowód podzielimy tak:

a) Dla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in A$ jest $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2)$ i tak samo przy $\mathbf{u}$ zastąpionym przez $\mathbf{u}'$, a $\mathbf{v}$ przez $\mathbf{v}'$. A że $\mathbf{0}'_E = \mathbf{0}_{E'}$ i $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'\|$ dla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{\mathbf{0}_E, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, to $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}', \mathbf{v}' \rangle$.

b) Obierzmy $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k \in A$ dowolnie. Z a) wynika, że układy $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ i $(\mathbf{v}'_i)_{i=1}^k$ mają tę samą macierz Grama. Jeśli więc jeden z nich jest liniowo niezależny, to drugi też.

(Patrz wniosek 1 w §1.5.)

c) Niech teraz $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ będzie najliczniejszym liniowo niezależnym układem w A; z powyższego wnosimy, że $(\mathbf{v}'_1, ..., \mathbf{v}'_k)$ jest najliczniejszym liniowo niezależnym układem w $L_0(A)$. Układy te są więc bazami przestrzeni $\text{lin}(A)$ i $\text{lin}(L_0(A))$, odpowiednio, a dla $\mathbf{v} \in A$ zachodzi $\mathbf{v}' \in L_0(A) \subset \text{lin}(\mathbf{v}'_1, ..., \mathbf{v}'_k)$.

d) Określmy $L : \text{lin}(A) \to E'$ jako (jedyne) liniowe przekształcenie takie, że $L(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}'_i$ dla $i = 1, ..., k$. Gdy wektor $\mathbf{v} \in \text{lin}(A)$ zapisać w bazie $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ jako $\mathbf{v} = \sum_j \lambda_j \mathbf{v}_j$, to uzyskamy $L(\mathbf{v}) = \sum_j \lambda_j \mathbf{v}'_j$ i $\|\mathbf{v}\|^2 = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \langle \mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j \rangle = \|L(\mathbf{v})\|^2$. Zatem $L : \text{lin}(A) \to E'$ jest liniowym zanurzeniem izometrycznym.

e) Niech $\mathbf{v} \in A$. Z d) wynikają równości $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle = \langle L(\mathbf{v}), \mathbf{v}'_i \rangle$ $\forall i$ (korzystamy z tego, że $L(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}'_i$). Jest tak i gdy zamienić w nich $L(\mathbf{v})$ na $\mathbf{v}'$; patrz a). Stąd $\langle L(\mathbf{v}) - \mathbf{v}', \mathbf{v}'_i \rangle = 0$ $\forall i$; a że $L(\mathbf{v}), \mathbf{v}' \in \text{lin}(\mathbf{v}'_1, ..., \mathbf{v}'_k)$, to $L(\mathbf{v}) - \mathbf{v}' = 0$.

f) $L : \text{lin}(A) \to E'$ jest więc szukanym przedłużeniem. Gdy $\dim(E) \leq \dim(E')$, to można dalej L przedłużyć na E, patrz zadanie 4c) w §3.1. $\square$

Wniosek 1. *Gdy $L : E \to E'$ jest zanurzeniem izometrycznym, to przekształcenie $L - L(\mathbf{0}_E)$ jest liniowe.*

Dowód. Przekształcenie to, oznaczmy je L_0, spełnia warunek $L_0(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_{E'}$, a jego przedłużenie, dane twierdzeniem 2, jest mu równe (bo L_0 jest określone wszędzie).

Ćwiczenie. „Zespolone” wersje twierdzenia 2 i wniosku 1 zawodzą już dla $E = E' = \mathbb{C}$.

Ćwiczenie. Niech wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}', \mathbf{v}'$ przestrzeni eukldesowej E będą jednostkowe. Dowieść, że jeśli $\angle\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \angle\{\mathbf{u}', \mathbf{v}'\}$, to istnieje izometria $L \in \mathcal{L}(E)$ taka, że $L(\mathbf{u}) = \mathbf{u}'$ i $L(\mathbf{v}) = \mathbf{v}'$, i że odwrotna implikacja też zachodzi.

Zadanie uzupełniające 1. Minimalna liczba symetrii lustrzanych, których złożenie jest zadaną izometrią liniową $L : E \to E$, jest równa wymiarowi obrazu operatora $I_E - L$.

2. Izometrie liniowe płaszczyzny euklidesowej.

Do izometrii przestrzeni euklidesowych dowolnego wymiaru wrócimy w §3.4 i 3.5 rozdziału VI. Obecnie ograniczymy się do wymiarów w i 3.

Korzystać będziemy z tego, że funkcje cos i sin są okresowe i ciągłe, i dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniających równość $x^2 + y^2 = 1$ istnieje dokładnie jedna liczba $\alpha \in [0, 2\pi)$ taka, że $\cos(\alpha) = x$, $\sin(\alpha) = y$. Wynika stąd, że gdy $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, to $\mathbf{w} = \|\mathbf{w}\|(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ dla dokładnie jednej liczby $\alpha \in [0, 2\pi)$, którą oznaczymy $\text{Arg}_{[0,2\pi)}(\mathbf{w})$. Jeśli $\beta = 2k\pi + \text{Arg}_{[0,2\pi)}(\mathbf{w})$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, to mówimy, że β jest **argumentem** dla $\mathbf{w}$ i piszemy $\beta = \arg(\mathbf{w})$.Wykorzystywać też będziemy znane tożsamości trygonometryczne. (Patrz zadanie 1b) w §II.1.3.)

W tym punkcie, przez E^2 oznaczamy **płaszczyznę euklidesową**, tzn. przestrzeń euklidesową wymiaru 2. (Dwójka w E^2 oznacza więc wymiar, nie potęgowanie.)

Stwierdzenie 1. *Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą ortonormalną w E^2, zaś $L : E^2 \to E^2$ – izometrią liniową. Wówczas dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$ jest $[L]_{\mathcal{B}} = \mathbf{K}_\alpha$ lub $[L]_{\mathcal{B}} = \mathbf{S}_\alpha$, gdzie*

$$\mathbf{K}_\alpha := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{S}_\alpha := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Dowód. Wiemy, że macierz $[L]_{\mathcal{B}}$ jest ortogonalna; patrz wn. 2 w §3.1. Oznaczmy przez $\mathbf{v} = (c, s)$ i $\mathbf{w} = (x, y)$ jej kolumny. Ponieważ $\|\mathbf{v}\| = 1$, więc $\mathbf{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ dla pewnego α. Z równości $cx + sy = 0$ wynika zaś, że $(x, y) = t(-c, s)$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$; przy tym $t = \pm 1$, bo $\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$. To kończy dowód. □

Uwaga 1. Operator $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o macierzy $\mathbf{K}_\alpha$ (czyli zadany wzorem $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{K}_\alpha\mathbf{w}$ dla $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$) jest jednoznacznie wyznaczony następującymi swymi własnościami:

$$\arg(\mathbf{K}_\alpha\mathbf{w}) = \alpha + \arg(\mathbf{w}) \ \text{ oraz } \ \|\mathbf{K}_\alpha\mathbf{w}\| = \|\mathbf{w}\| \ \text{ dla każdego } \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2. \tag{19}$$

(By dowieść (19) wystarcza napisać $\mathbf{w} = \|\mathbf{w}\|(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$, gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$; wówczas $\mathbf{K}_\alpha\mathbf{w} = \|\mathbf{w}\|(\cos(\alpha + \varphi), \sin(\alpha + \varphi))$ na mocy znanych tożsamości trygonometrycznych.) Ze względu na to, $\mathbf{K}_\alpha$ nazywamy **macierzą obrotu o α radianów**.

Uwaga 2. Natomiast operator o macierzy $\mathbf{S}_\alpha$ jest symetrią osiową płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ względem prostej $\mathbb{R}\mathbf{u}$, gdzie $\mathbf{u} := (\cos(\alpha/2), \sin(\alpha/2))$. (Wynika to stąd, że $\mathbf{S}_\alpha\mathbf{u} = \mathbf{u}$ oraz $\mathbf{S}_\alpha\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ dla $\mathbf{v} \in \mathbf{u}^\perp$; sprawdzenie jest sprawą rachunku.) Ze względu na to, $\mathbf{S}_\alpha$ nazywamy **macierzą symetrii osiowej**.

Zadanie 1. $\det(\mathbf{K}_\alpha) = 1$, $\det \mathbf{S}_\alpha = -1$ i dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mają miejsce równości

$$\mathbf{K}_\alpha\mathbf{K}_\beta = \mathbf{K}_{\alpha+\beta}, \quad \mathbf{S}_\alpha\mathbf{S}_\beta = \mathbf{K}_{\alpha-\beta} \quad \text{i (stąd)} \quad \mathbf{K}_\alpha\mathbf{S}_\beta = \mathbf{S}_{\alpha+\beta}, \quad \mathbf{S}_\alpha\mathbf{K}_\beta = \mathbf{S}_{\alpha-\beta}$$

Definicja. Izometrię liniową $L : E^2 \to E^2$ nazwiemy **obrotem wokół 0** lub **obrotem liniowym**, gdy $\det(L) > 0$ (tzn. gdy L zachowuje orientację, patrz zadanie 2 w §4.3).

Wniosek 1. *Dla wektorów jednostkowych $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in E^2$ istnieje jedyny obrót $L \in \mathcal{L}(E^2)$ taki, że $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.*

Dowód. Rozszerzmy $\{\mathbf{v}\}$ do bazy ortonormalnej $\mathcal{B} = (\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ płaszczyzny E^2 i przedstawmy $\mathbf{w}$ w tej bazie: $\mathbf{w} = c\mathbf{v} + s\mathbf{v}'$. Wtedy $c^2 + s^2 = \|\mathbf{w}\|^2 = 1$, więc istnieje jedyna macierz obrotu $\mathbf{K}$, której (c, s) jest pierwszą kolumną. (Drugą jest $(-s, c)$.) Na podstawie stwierdzenia 1, żądany obrót jest jednoznacznie wyznaczony tym, by $[L]_{\mathcal{B}} = \mathbf{K}$. □

Definicja. Dla przekształcenia $L : X \to X$ (niżej będzie $X = E^2$) przyjmujemy

$$Fix(L) = \{x \in X : L(x) = x\}. \tag{20}$$

Zadanie 2. Gdy $L \in \mathcal{L}(E^2)$ jest obrotem, to $Fix(L) = \{\mathbf{0}\}$ lub $L = I$.

Stwierdzenie 2. *Izometria liniowa L płaszczyzny E^2 jest symetrią osiową wtedy i tylko wtedy, gdy $Fix(L)$ jest prostą, a także wtedy i tylko wtedy, gdy* $\det(L) < 0$.

Dowód. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą ortonormalną płaszczyzny E^2 i $\mathbf{A} := [L]_{\mathcal{B}}$; wówczas $\det(L) = \det(\mathbf{A})$. Jeśli więc $\mathbf{A}$ jest macierzą symetrii osiowej, to $\det(L) = -1$ i L też jest symetrią osiową, skąd $Fix(L)$ jest prostą. W przeciwnym przypadku $\mathbf{A}$ jest macierzą obrotu, więc $\det(L) = 1$ –czyli L jest obrotem i $Fix(L)$ nie jest prostą. $\square$

Stwierdzenie 3. *Niech L będzie obrotem liniowym płaszczyzny E^2. Wówczas dla każdych dwóch zgodnie zorientowanych i ortonormalnych baz $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ w E^2, macierze $[L]_{\mathcal{B}}$ i $[L]_{\mathcal{B}'}$ są równe; są one zarazem macierzą obrotu.*

Dowód. Jak zauważono, $[L]_{\mathcal{B}} = \mathbf{K}_\alpha$ dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$. Macierz $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ zmiany baz też jest postaci $\mathbf{K}_\beta$, dla pewnego $\beta \in \mathbb{R}$. (Jej wyznacznik jest dodatni, bo bazy $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ są zgodnie zorientowane; jest też ona ortogonalna, patrz wniosek 3 w §3.1.) Wobec tego $[L]_{\mathcal{B}'} = [I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}[L]_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = (\mathbf{K}_\beta)^{-1}\mathbf{K}_\alpha\mathbf{K}_\beta = \mathbf{K}_\alpha$, na podstawie zadania 1. $\square$

Uwaga 3. a) Odnotujmy, że jeśli bazy ortonormalne $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ byłyby zorientowane przeciwnie, to dla pewnej liczby α mielibyśmy $[L]_{\mathcal{B}} = \mathbf{K}_\alpha$ i $[L]_{\mathcal{B}'} = \mathbf{K}_{-\alpha}$. Wynika to z powyższego dowodu, bo macierz $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, mając wyznacznik ujemny, byłaby wtedy postaci $\mathbf{S}_\beta$ dla pewnego β –skąd $[L]_{\mathcal{B}'} = (\mathbf{S}_\beta)^{-1}\mathbf{K}_\alpha\mathbf{S}_\beta = \mathbf{K}_{-\alpha}$.

b) Uzyskana liczba $\cos\alpha$ nie zależy jednak od orientacji bazy $\mathcal{B}$, co widać stąd, że $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ –ale i stąd, że jest ona równa $\frac{1}{2}\mathrm{tr}([L]_{\mathcal{B}})$. (Patrz ....) $\square$

Poniżej zakładamy, że płaszczyzna euklidesowa E^2 jest zorientowana. Orientacja umożliwi wprowadzenie miary kątów zorientowanych i obrotów.

Definicja. Niech L będzie obrotem liniowym zorientowanej płaszczyzny euklidesowej E^2. Gdy liczba $\alpha \in \mathbb{R}$ jest taka, że $[L]_{\mathcal{B}} = \mathbf{K}_\alpha$ dla pewnej dodatnio zorientowanej bazy ortonormalnej $\mathcal{B}$ tej płaszczyzny, to mówimy, że L jest **obrotem o α radianów**, zaś α jest **miarą obrotu** L (w radianach).

Uwaga 4. a) Ze stwierdzenia 2 wynika, że wyżej wybór bazy $\mathcal{B}$ nieistotny: gdy α jest miarą obrotu L przy pewnym takim wyborze, to jest nią i przy każdym innym.

b) Gdy α jest miarą danego obrotu, to są nią i liczby $\alpha+2\pi n$, dla $n \in \mathbb{Z}$ (i tylko te).

Definicja. Mówimy, że α jest **miarą zorientowanego kąta** między niezerowymi wektorami $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in E^2$, jeśli jest miarą jedynego obrotu liniowego, przeprowadzającego $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ na $\mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|$. (Kolejność jest istotna, a na E^2 wybrana ma być orentacja!) Znów, miar tych jest nieskończenie wiele; dla każdej z nich piszemy $\alpha = \angle(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Stwierdzenie 4. *a) Jeśli L_1 i L_2 są obrotami o α_1 i α_2 radianów, odpowiednio, to $L_2 \circ L_1$ jest obrotem o $\alpha_1 + \alpha_2$ radianów. (W szczególności, $L_2 \circ L_1 = L_1 \circ L_2$.)*

b) Gdy $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in E^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ i $\alpha_1 = \angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, $\alpha_2 = \angle(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, to $\alpha_1 + \alpha_2 = \angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$ (co zapisujemy: $\angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + \angle(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$).

c) $\angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \angle(L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2))$ *dla* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in E^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ *i obrotu* $L \in \mathcal{L}(E^2)$.

Dowód. Ad a). Obierzmy dodatnio zorientowaną bazę ortonormalną $\mathcal{B}$. Dla $i = 1, 2$ ma miejsce równość $[L]_{\mathcal{B}} = \mathbf{K}_{\alpha_i}$, skąd $[L_2L_1]_{\mathcal{B}} = \mathbf{K}_{\alpha_2}\mathbf{K}_{\alpha_1} = \mathbf{K}_{\alpha_2+\alpha_1}$; patrz zadanie 1. Zatem $\alpha_1 + \alpha_2$ jest miarą obrotu L_2L_1 (jedną z wielu).

Ad b), c). Dowody są pozostawione jako ćwiczenie. ⊟

Uwaga 5. * Powyżej i w §2.1 wprowadzono miarę kątów, zorientowanych lub nie, lecz nie same kąty. Można tę lukę uzupełnić tak, by za kąt zorientowany między niezerowymi wektorami $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^2$ przyjąć parę uporządkowaną $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, a za niezorientowany – parę nieuporządkowaną $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.

b) Dzięki wnioskowi 1, kąt zorientowany $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ wyznacza jedyny obrót liniowy $L_{(\mathbf{u},\mathbf{v})}$, przeprowadzający $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ na $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$. Kąty zorientowane uznamy za równe, jeśli odpowiadające im obroty są równe; możemy też takie kąty w E^2 dodawać, przyjmując za sumę kątów $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ i $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ taki kąt $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, by $L_{(\mathbf{x},\mathbf{y})} = L_{(\mathbf{v},\mathbf{w})}L_{(\mathbf{u},\mathbf{v})}$. (Orientacja płaszczyzny nie gra tu roli, a suma nie zależy od kolejności i jest jedyna z dokładnością do wprowadzonej równości). Nie umiemy jednak dodawać kątów niezorientowanych.

Zadania uzupełniające.

1. Dowieść, że każda 2×2 zespolona macierz unitarna jest postaci $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -\varepsilon\overline{b} \\ b & \varepsilon\overline{a} \end{pmatrix}$ dla pewnych $a, b, \varepsilon \in \mathbb{C}$ takich, że $|a|^2 + |b|^2 = 1$ oraz $|\varepsilon| = 1$. Ponadto, $\varepsilon = \det(\mathbf{A})$.

2. Przy utożsamieniu $\mathbb{R}^2$ z $\mathbb{C}$, jak w §I.1, obrót o macierzy $\mathbf{K}_\alpha$ jest zadany wzorem $z \mapsto za$, a symetria o macierzy $\mathbf{S}_\alpha$ –wzorem $z \mapsto \overline{z}a^2$, gdzie $a = \cos\alpha + i\sin\alpha$.

3. Udowodnić, że $\sin(\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ dla jednostkowych wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. (Orientacja i iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^2$ są standardowe.)

4. Kąty zorientowane $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ i $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy pewien obrót L przeprowadza $\mathbb{R}_+\mathbf{u}$ na $\mathbb{R}_+\mathbf{x}$, a $\mathbb{R}_+\mathbf{v}$ na $\mathbb{R}_+\mathbf{y}$. (Tu, $\mathbb{R}_+\mathbf{z} := \{t\mathbf{z} : t \geq 0\}$ dla $\mathbf{z} \in E^2$.)

5. Dla wektorów $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ zorientowanej płaszczyzny E^2 przyjmijmy $\varepsilon = -1$ gdy $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ jest ujemnie zorientowaną bazą w E^2 i $\varepsilon = 1$ w przeciwnym razie. (Kolejność wektorów jest istotna!) Udowodnić, że $\angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \varepsilon \cdot \angle\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$; patrz §2.1.

6. Operator nieosobliwy $L \in \mathcal{L}(E^2, E^2)$, dla którego kąt $(L(\mathbf{v}), \mathbf{v})$ nie zależy (z dokładnością do równości kątów) od wektora $\mathbf{v} \in E^2$, jest proporcjonalny do obrotu.

3. Obroty przestrzeni E^3.

Definicja. Izometrię liniową $L : E^3 \to E^3$ nazywamy **obrotem**, jeśli $L = I_{E^3}$ lub pdoprzestrzeń $Fix(L) := \{\mathbf{v} \in E^3 : L(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\}$ jest wymiaru 1. Podprzestrzeń tę nazywamy **osią** obrotu $L \neq I_{E^3}$.

Uwaga 1. Niech obrót L będzie różny od identyczności i niech $\mathbf{w} \in Fix(L) \setminus \{\mathbf{0}\}$.

a) Ponieważ L zachowuje ortogonalność, więc dla $E_0 := \mathbf{w}^\perp$ zachodzi $L(E_0) \subset E_0$. Przekształcenie $L_{|E_0} : E_0 \to E_0$ jest (liniowym) obrotem płaszczyzny E_0, bo $\mathbf{0}$ jest jego jedynym punktem stałym.

b) Jeśli w E_0 wybierzemy orientację, to dla każdej dodatnio zorientowanej bazy ortonormalnej $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ tej płaszczyzny, $\mathcal{B} := (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{w})$ jest bazą przestrzeni E^3, dla której $[L]_{\mathcal{B}}$ ma ostatnią kolumnę i ostatni wiersz równe $(0, 0, 1)$, a dopełniającą klatką jest macierz $\mathbf{K}_\alpha$ obrótu płaszczyzny. Liczby α o tej własności są wyznaczone jednoznacznie mod(2π); każdą z nich nazywamy **miarą** obrotu L (w radianach), względem ustalonej orientacji płaszczyzny E_0.

c) Ostatnia definicja jest uzasadniona tym, że zbiór M tych miar jest niezależny od wyboru bazy $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, spełniającej opisane warunki, a także nie zmieni się po zastąpieniu $\mathbf{w}$ przez $t\mathbf{w}$, dla $t \neq 0$; zmiana zaś orientacji płaszczyzny powoduje zastąpienie M przez $-M := \{-\alpha : \alpha \in M\}$. (Patrz w p.3 stwierdzenie 3 i uwaga 3.) Warto jednak zaznaczyć, że zmiana orientacji nie wpływa na liczbę $\cos\alpha$, i że $\mathrm{tr}(L) = 1 + 2\cos\alpha$.

d) Gdy przestrzeń E^3 jest zorientowana, to możemy zdefiniować **obrót o** α **radianów wokół wektora** $\mathbf{v} \in E^3 \setminus \mathbf{0}$, żądając, by jego osią była prosta $\mathbb{R}\mathbf{v}$, zaś miara była wyznaczona względem orientacji zadanej taką bazą $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ płaszczyzny $E_0 = Fix(L)^\perp$, dla której baza $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v})$ przestrzeni E^3 jest dodatnio zorientowana. $\boxminus$

Od L. Eulera pochodzą następujące ważne dwa twierdzenia, dotyczące obrotów 3–wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^3:

Twierdzenie 1. *Izometria liniowa przestrzeni E^3 jest obrotem wtedy i tylko wtedy, gdy ma dodatni wyznacznik.*

Zadanie 1. Udowodnić to twierdzenie w oparciu o twierdzenie 1 w p.1.

Lemat 1. *Niech $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ i $(\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}')$ będą ortonormalnymi bazami przestrzeni E^3. Jeśli bazy te są zgodnie zorientowane, to istnieją obroty $L_{\mathbf{w}1}, L_{\mathbf{w}2}$ wokół prostej $\mathbb{R}\mathbf{w}$ i obrót $L_{\mathbf{u}}$ wokół prostej $\mathbb{R}\mathbf{u}$, takie, że złożenie $L_{\mathbf{w}2}L_{\mathbf{u}}L_{\mathbf{w}1}$ przeprowadza $\mathbf{u}'$ na $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}'$ na $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}'$ na $\mathbf{w}$.*

Twierdzenie 2. *Dla zadanych ortogonalnych wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in E^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, każdy obrót liniowy przestrzeni E^3 można przedstawić jako złożenie $L_{\mathbf{w}2}L_{\mathbf{u}}L_{\mathbf{w}1}$ obrotów wokół prostych $\mathbb{R}\mathbf{w}$, $\mathbb{R}\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}\mathbf{w}$, odpowiednio.*

Dowód lematu 1 i twierdzenia 2 relegujemy do zadań uzupełniających i problemu.

Zadania uzupełniające. W zadaniach 1 i 2, przestrzeń jest zorientowana.

1. Niech L będzie obrotem przestrzeni E^3 wokół wektora $\mathbf{u}$ o α radianów, a $S : E^3 \to E^3$ izometrią liniową. Dowieść, że SLS^{-1} jest obrotem E^3 wokół $S(\mathbf{u})$ – o α radianów, gdy S zachowuje orientację, zaś o $-\alpha$, gdy ją zmienia.

2. Dla wektora jednostkowego $\mathbf{v} \in E^3$ dowieść, że przekształcenie $\mathbb{R}^3 \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{v} \times \mathbf{x} \in E^3$ jest złożeniem rzutowania ortogonalnego na $\mathbf{v}^\perp$ z obrotem wokół $\mathbf{v}$, i wyznaczyć miarę tego obrotu.

3. Wyprowadzić twierdzenie 2 z lematu 1.

4. Dowieść, że każdą 3×3 macierz ortogonalną można przedstawić w postaci iloczynu
$$\pm \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
dla pewnych $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

5. Każda zmieniająca orientację liniowa izometria przestrzeni E^3 jest złożeniem obrotu wokół pewnej prostej $\mathbb{R}\mathbf{u}$ z odbiciem względem płaszczyzny $\mathbf{u}^\perp$. (Wskazówka: gdy $L : E^3 \to E^3$ zmienia orientację, to $-L$ ją zachowuje.)

6. Niech E będzie przestrzenią euklidesową wymiaru ≥ 2 i niech wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ będą równej długości. Dowieść istnienia izometrii $L \in \mathcal{L}(E)$ takiej, że $L(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ i $\det(L) = 1$.

7. **Obrotem o** π przestrzeni euklidesowej E nazwiemy kanoniczne przedłużenie obrotu $-I_U$ dowolnej dwuwymiarowej podprzestrzeni U tej przestrzeni. Dowieść, że:
   a) Gdy L jest symetrią lustrzaną i $\dim E = 3$, to $-L$ jest obrotem o π.
   b) Gdy $\dim E \geq 3$, to złożenie dwóch symetrii lustrzanych jest też złożeniem dwóch obrotów o π.
   c) Gdy $k := \dim E \geq 3$, to każdy obrót przestrzeni E jest złożeniem dwóch obrotów o π, a każda zachowująca orientację izometria przestrzeni E jest złożeniem k lub mniejszej liczby obrotów o π.

Problem 5. Udowodnić lemat 1.

8. Zbadać, czy lemat 1 i twierdzenie 2 pozostają prawdziwe jeśli żądać, by zamiast prostej $\mathbb{R}\mathbf{w}$, osią obrotu $L_{\mathbf{w}1}$ była: a) prosta $\mathbb{R}\mathbf{u}$, b) prosta $\mathbb{R}\mathbf{v}$.

Zadania ze zbioru Kostrykina: II.4.4.12 (w c) założyć zachowywanie orientacji).

4. * Obroty przestrzeni $\mathbb{R}^3$ a kwaterniony.

Najłatwiej jest izometrie przestrzeni $\mathbb{R}^3$ opisać wykorzystując kwaterniony.

Przypomnijmy, że kwaternionem nazywamy wyrażenie postaci $u = u_0 + u_1 i + u_2 j + u_3 k$, gdzie $u_0, u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$, i że w zbiorze $\mathbb{H}$ wszystkich kwaternionów określone są działania dodawania i mnożenia spełniające wszystkie aksjomaty ciała, prócz przemienności mnożenia. Dodajemy i mnożymy kwaterniony jak wyrażenia algebraiczne, przyjmując jednak

$$ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik \text{ oraz } i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Mamy $uu^* = |u|^2$, gdzie $|u| := \sqrt{u_0^2 + u_1^2 + u_3^2 + u_4^2}$ i $u^* := u_0 - u_1 i - u_2 j - u_3 k$ oznaczają **moduł** i **sprzężenie** kwaternionu u, odpowiednio. (Ze względu na związek między nimi, sprzężenie kwaternionu i sprzężenie hermitowskie macierzy oznaczamy w punktach 5 i 6 gwiazdeczką.) Mnożenie w $\mathbb{H}$ jest łączne i ma miejsce tożsamość $(uv)^* = v^* u^*$ dla $u, v \in \mathbb{H}$, co najłatwiej uzasadnić korzystając z macierzowej interpretacji kwaternionów, podanej w §II.3.4. Z własności tych wynika, że $|uv| = |u||v|$, oraz że $u^*/|u|^2$ jest odwrotnością (względem mnożenia) kwaternionu $u \neq 0$. W szczególności, gdy kwaternion u jest **jednostkowy**, tzn. gdy $|u| = 1$, to $u^{-1} = u^*$.

Liczbę u_0 nazywamy **częścią rzeczywistą** kwaternionu $u = u_0 + u_1 i + u_2 j + u_3 k$, zaś $u_1 i + u_2 j + u_3 k$ nazywamy jego **częścią kwaternionową** i oznaczamy przez u_q. Jeśli $u_0 = 0$ (tzn. $u = -u^*$), to kwaternion u nazywamy **czystym** i utożsamiamy z wektorem (u_1, u_2, u_3) przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Z tego względu, część kwaternionowa nazywana też bywa **przestrzenną** lub **wektorową**. Zbiór kwaternionów czystych oznaczmy przez E.

$\mathbb{H}$ traktujemy jako rzeczywistą przestrzeń wektorową, a E jako jej zorientowaną podprzestrzeń –jako dodatnio zorientowaną przyjmujemy bazę (i, j, k). W $\mathbb{H}$ wprowadzamy iloczyn skalarny wzorem

$$\langle u_0 + u_1 i + u_2 j + u_3 k, v_0 + v_1 i + v_2 j + v_3 k \rangle := \sum u_n v_n.$$

Wówczas $1^\perp = E$ i $\langle u, u \rangle = |u|^2$ dla $u \in \mathbb{H}$.

Twierdzenie 1. *Dla każdego kwaternionu $u \neq 0$, wzór $F_u(x) := uxu^{-1}$ $(x \in E)$ poprawnie określa izometrię liniową E na E. Ponadto, $F_1 = I_E$ i dla $u, v \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ zachodzi:*

$$F_u \circ F_v = F_{uv} \text{ oraz } (F_v)^{-1} = F_{v^{-1}} \tag{21}$$

$$F_u = F_v \Leftrightarrow v \in \mathbb{R}u. \tag{22}$$

Dowód. Ustalmy u i zdefiniujmy przekształcenie $\widetilde{F_u} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ wzorem $x \mapsto uxu^{-1}$. Jest ono izometrią, bo $|uxu^{-1}| = |u||x||u^{-1}| = |x|$. (Liniowość wynika z rozdzielności mnożenia względem dodawania). Ponadto, $\widetilde{F_u}(1) = u1u^{-1} = 1$, wobec czego $\widetilde{F_u}(1^\perp) = 1^\perp$; a że $1^\perp = E$, więc $\widetilde{F_u}(E) = E$ i $\widetilde{F_u}$ zawęża się do izometrii liniowej $F_u : E \to E$. Pierwsza równość w (20) wynika z definicji, a druga stąd, że $F_u \circ F_{u^{-1}} = F_1 = F_{u^{-1}} \circ F_u$. Zaś (21) wynika stąd, że gdy $F_u = F_v$, to przy $w := uv^{-1}$ zachodzi $F_w = I_E$ – co daje $w \in \mathbb{R}$ na podstawie następujacego zadania, zastosowanego przy $w_1 = w = w_2^{-1}$:

Zadanie 1. Jeśli $w_1, w_2 \in \mathbb{H}$ i $w_1 x w_2 = x$ dla każdego kwaternionu czystego x, to $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$.

Oczywiście, $-F_u$ również jest izometrią przestrzeni E. Zbadajmy własności izometrii $\pm F_u$. Potrzebny będzie lemat i zadanie.

Lemat 1. *a) Dla $u, v \in \mathbb{H}$ zachodzi $uv^* + vu^* = 2\langle u, v\rangle$.*
b) Gdy kwaterniony u, v są czyste, to $uv + vu = -2\langle u, v\rangle$, skąd $u^2 = -|u|^2$ i $u \perp v \Leftrightarrow uv = -vu$.

Dowód. Jak w każdej przestrzeni euklidesowej, $|u+v|^2 - |u|^2 - |v|^2 = 2\langle u, v\rangle$. Z tożsamości $|w|^2 = ww^*$ otrzymujemy jednak $|u+v|^2 - |u|^2 - |v|^2 = uv^* + vu^*$, co dowodzi tezy a). Natomiast b) wynika z a), bo $u^* = -u$ i $v^* = -v$ dla $u, v \in E$. □

Zadanie 2. Gdy $u = \cos\alpha + k\sin\alpha$, to F_u jest obrotem przestrzeni E wokół wektora k o 2α radianów. (Wskazówka: wyznaczyć $F_u(i), F_u(j)$ oraz $F_u(k)$.)

Twierdzenie 2. *a) Gdy kwaternion $u \neq 0$ jest czysty, to $-F_u$ jest symetrią ortogonalną przestrzeni E względem podprzestrzeni $u^\perp$. (Dopełnienie $u^\perp$ brane jest w E.)*

b) Każdy obrót przestrzeni E jest postaci F_u dla pewnego kwaternionu u, $|u| = 1$.

c) Odwrotnie, każda izometria F_u ($u \neq 0$) jest obrotem przestrzeni euklidesowej E. Ściślej, jeśli $u = u_0 + u_q$ i $u_q \neq 0$, to F_u jest obrotem wokół u_q o 2α radianów, gdzie $\alpha := \cos^{-1}(u_0/|u|) \in [0, \pi]$. (Jeśli $u_q = 0$, to oczywiście $F_u = I$.)

Dowód. Ad a). Gdy $u, v \in E$ i $u \perp v$, to $uv = -vu$ (patrz lemat), skąd dla $c \in \mathbb{R}$ jest $-F_u(cu + v) = -u(cu + v)u^{-1} = -cuuu^{-1} - uvu^{-1} = -cu + v$. To dowodzi tezy a).

Ad b). Zadany obrót F przestrzeni E jest na podstawie zadania uzupełniającego 1 w p.3 złożeniem dwóch symetrii zwierciadlanych. Jak już wiemy, są one postaci $-F_{u_1}$ i $-F_{u_2}$, odpowiednio, gdzie $u_1, u_2 \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$. Stąd $F = (-F_{u_1}) \circ (-F_{u_2}) = F_u$, gdzie za u obrać można $u_1 u_2$ lub kwaternion jednostkowy $u_1 u_2/|u_1 u_2|$; patrz (21) i (22).

Ad c). (Inny dowód, pomijający a), b) i zad. 2, da zad. uz. 2 w p.5.) Możemy założyć, że $|u| = 1$, patrz wyżej, i napisać $u = \cos\alpha + w\sin\alpha$, gdzie α zdefiniowano w c) i $w := u_q/\sin\alpha$ Wtedy $|w|^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, tzn. wektor w jest jednostkowy, podobnie jak k. Pewien obrót F przestrzeni E przeprowadza więc k na w; przy tym $F = F_v$ dla pewnego kwaternionu $v \neq 0$, na podstawie b). Stąd $w = vkv^{-1}$ i przy $b = \cos\alpha + k\sin\alpha$ otrzymujemy łatwo $u = vbv^{-1}$, wobec czego $F_u = F_v \circ F_b \circ (F_v)^{-1} = F \circ F_b \circ F^{-1}$; por. (20),(21). A że obrót F zachowuje orientację, a F_b jest obrotem wokół k o 2α radianów, to F_u jest takimże obrotem wokół wektora $F(k) = w$. (Patrz zad. uz. 1 w p.3.) To kończy dowód, bo wektory w i u_q są dodatnio proporcjonalne. □

Uwaga 1. Czytelnik, zaznajomiony z podstawowymi definicjami dotyczącymi grup, może tw.1 i część b) tw. 2 wypowiedzieć tak: sfera jednostkowa $\{u \in \mathbb{H} : |u| = 1\}$ jest grupą względem mnożenia kwaternionowego (jako podgrupa grupy $(\mathbb{H} \setminus \{0\}, \cdot)$), a przekształcenie $u \mapsto F_u$ jest jej homomorfizmem na grupę obrotów przestrzeni E, z jądrem $\{1, -1\}$.

Wniosek 1. ** *Niech L będzie zachowującą orientację izometrią liniową przestrzeni $(\mathbb{R}^4, \| \, \|)$, reprezentowanej przez $(\mathbb{H}, | \, |)$. Wówczas istnieją kwaterniony jednostkowe u, v takie, że $L(x) = uxv$ dla $x \in \mathbb{H}$. Taka para (u, v) jest jedyna, z dokładnością do pomnożenia jej przez -1.*

Dowód. Przekształcenie $\mathbb{H} \ni x \mapsto L(x)(L(1))^{-1}$ przeprowadza $1 \in \mathbb{H}$ na 1 i jest izometrią zachowujacą orientację. (Dlaczego?) Jego zawężenie do $E = 1^{\perp}$ jest więc równe F_u, dla pewnego kwaternionu jednostkowego u. Stąd przy $v := u^{-1} \cdot L(1)$ równość $L(x) = uxv$ zachodzi dla $x \in \mathbb{H}$ – bo zachodzi dla $x \in E \cup \{1\}$, a jej obie strony są liniowe. Oczywiście $|v| = |u|^{-1} \cdot |L(1)| = 1$. Jedyność pary (u, v), z dokładnością do czynnika -1, wynika łatwo z zadania 1. ⊟

Przykład 1. Wyobraźnia geometryczna niewiele pomaga opisać złożenie KL dwóch obrotów w E, np. obrotu K wokół $i + 2j$ o $\pi/3$ radianów i obrotu L wokół k o $\pi/2$ radianów. Możemy to jednak osiągnąć używając kwaternionów. Wystarcza w tym celu wykorzystać twierdzenie 2 by napisać $K = F_u$ i $L = F_v$, dla $u = \cos(\pi/6) + \frac{i+2j}{\sqrt{5}} \sin(\pi/6)$ oraz $v = \cos(\pi/4) + k \sin(\pi/4)$, a następnie w oparciu o zależności (1) uzyskać równość $KL = F_w$ dla $w = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{i+2j}{\sqrt{5}})(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}k) = \frac{1}{2\sqrt{10}}(\sqrt{15} + 3i + j + \sqrt{15}k)$. Ponownie korzystając z twierdzenia wnosimy więc, że KL jest obrotem wokół $3i + j + \sqrt{15}k$ o $2\cos^{-1}(\sqrt{3/8})$ radianów. □

Zadania uzupełniające.

1. Każdy kwaternion można przedstawić w postaci iloczynu uvw, gdzie części kwaternionowe kwaternionów u, v i w są proporcjonalne, odpowiednio, do i, j oraz i (lub też, gdy tak chcieć: do i, j oraz k).

2. Utożsamijmy każdą liczbę $z \in \mathbb{C}$ z kwaternionem $\mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$. Pozwala to traktować $\mathbb{H}$ jako zespoloną przestrzeń wektorową (mnożenie przez skalary jest wyznaczone przez mnożenie w $\mathbb{H}$, przy czym skalar stoi z lewej strony); za jej bazę można obrać np. $\mathcal{B} = (1, j)$. Dla $u, v \in \mathbb{H}$ przyjmijmy $\langle u, v \rangle = \varphi(uv^*)$, gdzie $\varphi(z_1 + z_2 j) := z_1$ dla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Udowodnić, że

a) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni zespolonej $\mathbb{H}$ i $\langle u, u \rangle = |u|^2$ dla $u \in \mathbb{H}$, a przekształcenie $\mathbb{H} \ni u \mapsto [u]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{C}^2$ (lub, równoważnie, jego odwrotność $\mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \mapsto z_1 + z_2 j \in \mathbb{H}$) jest $\mathbb{C}$–liniową izometrią, gdy w $\mathbb{C}^2$ rozważać standardowy iloczyn skalarny.

b) $\Phi(u)[v]_{\mathcal{B}} = [uv]_{\mathcal{B}}$ dla $u, v \in \mathbb{H}$. (Tu $[v]_{\mathcal{B}}$ i $[uv]_{\mathcal{B}}$ traktujemy jako kolumny.)

c) Wywnioskować z b) i zadania uz. 1 w p.2, że każda $\mathbb{C}$–liniowa izometria przestrzeni $\mathbb{H}$, mająca wyznacznik 1, jest mnożeniem prawostronnym przez jednoznacznie przez nią wyznaczony kwaternion jednostkowy.

d) Gdy daną izometrię przedstawić w postaci takiego mnożenia, jak wyrażona będzie izometria sprzężona względem iloczynu skalarnego $\langle\cdot,\cdot\rangle$?

5. * Mnożenie kwaternionów a operacje na wektorach (zadania)

Poniższe zadania uzupełniające dotyczą interesujących związków pomiędzy mnożeniem w ciele kwaternionów a operacjami iloczynu wektorowego i skalarnego w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, utożsamionej ze zbiorem kwaternionów czystych.

1. a) Dla kwaternionów $x = x_0 + x_q$ i $y = y_0 + y_q$ zachodzi $xy = z_0 + z_q$, gdzie $z_0 = x_0y_0 - \langle x_q, y_q\rangle$ oraz $z_q = x_0y_q + y_0x_q + x_q \times y_q$.

   b) Przy $[x, y] := xy - yx$ dowieść, że $[x, y] = 2x_q \times y_q$

2. Dla kwaternionów czystych u, v, w dowieść, że:

   a) $(u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v = 0$. (Wskazówka: b) powyżej i §I.2.1.)

   b) $(uv)w = (u \times v) \times w - \langle u \times v, w\rangle - \langle u, v\rangle w$ i podobnie $u(vw) = u \times (v \times w) - \langle u, v \times w\rangle - \langle v, w\rangle u$.

   c) $\langle u \times v, w\rangle = \langle u, v \times w\rangle$ oraz $(u \times v) \times w - \langle u, v\rangle w = u \times (v \times w) - \langle v, w\rangle u$.

3. (M. Jończyk i M. Pacholska.) Zapiszmy kwaternion jednostkowy u jako $\cos\alpha + w\sin\alpha$, gdzie kwaternion w jest czysty. Dowieść, że $F_u(w) = w$ i dla każdego kwaternionu czystego x, ortogonalnego do w, zachodzi $F_u(x) = x\cos(2\alpha) + w \times x\sin(2\alpha)$. Uzyskać stąd twierdzenie 2c) w p.4. (Wskazówka: lemat 1 w p.4 i zadanie 1b) wyżej.)

   d) $(u \times v) \times w = \langle u, w\rangle v - \langle v, w\rangle u$.

   e) $|u \times v|^2 + \langle u, v\rangle^2 = |u|^2|v|^2$.

6. ** Reprezentacja obrotów a macierzowe modele ciała kwaternionów i przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Przypomnijmy, że w §II.3.4 przyjęliśmy

$$\mathbb{H}' := \left\{\begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a}\end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}\right\} \text{ oraz } \mathbf{i} := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i\end{pmatrix},\ \mathbf{j} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{k} := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0\end{pmatrix}.$$

Naturalna bijekcja $\Phi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}'$, zadana przez $p + qi + rj + sk \mapsto p\mathbf{I} + q\mathbf{i} + r\mathbf{j} + s\mathbf{k}$, zachowuje działania dodawania i mnożenia, a także operację sprzężenia (patrz §II.3.4). Obrazem zbioru E kwaternionów czystych jest zbiór E' macierzy postaci $\begin{pmatrix} qi & r + si \\ -r + si & -qi\end{pmatrix}$, czyli dokładnie zbiór 2×2 macierzy antyhermitowskich o śladzie 0. (Zespoloną macierz nazywa się **antyhermitowską**, gdy $\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$, a **hermitowską**, gdy $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$.) Stąd wynika, że E' jest zbiorem antysamosprzężonych elementów zbioru $\mathbb{H}'$, tak jak E jest zbiorem takich elementów ciała $\mathbb{H}$ (w obu przypadkach tych elementów, które są przeciwne swemu sprzężeniu). $\mathbb{H}'$ i E' są „macierzowymi modelami”, odpowiednio, ciała $\mathbb{H}$ kwaternionów i przestrzeni E kwaternionów czystych. Są one podzbiorami $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ zamkniętymi ze względu na sprzężenie macierzy, a także są rzeczywistymi podprzestrzeniami w $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ (tzn. są podprzestrzeniami, gdy $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ traktować jako przestrzeń nad $\mathbb{R}$). Ani E', ani $\mathbb{H}'$ nie są jednak zamknięte względem mnożenia przez skalary zespolone.

Ponadto, zbiór $\mathbb{H}'$ jest zamknięty ze względu na mnożenie w $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ (patrz §II.2.3). Stąd i z definicji $\mathbb{H}'$ wynika, że dla $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{H}'$ mamy $\mathbf{AB}^* \in \mathbb{H}'$ i wobec tego $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}^*) \in \mathbb{R}$. Iloczyn skalarny $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathbf{AB}^*)$ (por. zadanie uzupełniające 1 w §3.3) przyjmuje więc na $\mathbb{H}'$ wartości rzeczywiste i czyni $\mathbb{H}'$ i E' przestrzeniami euklidesowymi wymiarów 4 i 3, odpowiednio. Z przyjętych definicji,

$$\|\mathbf{A}\|^2 = \det(\mathbf{A}) \text{ dla } \mathbf{A} \in \mathbb{H}' \quad \text{oraz} \quad \|\Phi(u)\| = |u| \text{ dla } u \in \mathbb{H} \tag{23}$$

Stąd rozważana bijekcja $\Phi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}'$ jest izometrią liniową, a ponadto $\Phi(E) = E'$ i $\Phi(u^*) = \Phi(u)^*$ dla $u \in \mathbb{H}$. Ponieważ obroty przestrzeni E są postaci $E \ni x \mapsto F_u(x) = uxu^*$, gdzie $u \in \mathbb{H}$ spełnia warunek $|u| = 1$, więc podobnie obroty przestrzeni E' są postaci $E' \ni \mathbf{X} \mapsto F'_{\mathbf{U}}(\mathbf{X}) := \mathbf{UXU}^*$, gdzie $\mathbf{U} \in \mathbb{H}'$ jest macierzą o wyznaczniku 1.

Oznaczmy przez SU_2 zbiór wszystkich 2×2 zespolonych macierzy unitarnych o wyznaczniku 1. Stwierdziliśmy więc, por. zad. uz. 1 w p.2, że w macierzowym modelu E' przestrzeni $\mathbb{R}^3$, każdy obrót jest wznaczony wzorem $F'_{\mathbf{U}}(\mathbf{A}) = \mathbf{UAU}^*$ $(\mathbf{A} \in E')$, dla pewnej macierzy $\mathbf{U} \in \mathrm{SU}_2$. Odpowiedniki równości (20) i (21) pozostają oczywiście prawdziwe: $F'_{\mathbf{I}} = I$, zaś dla $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathrm{SU}_2$ jest $F'_{\mathbf{U}} \circ F'_{\mathbf{V}} = F'_{\mathbf{UV}}$ i $F'_{\mathbf{U}} = F'_{\mathbf{V}} \Leftrightarrow \mathbf{U} = \pm\mathbf{V}$.

Rozważany model E' przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w którym wektorami są bezśladowe (tzn. o śladzie 0) macierze antyhermitowskie, można przez pomnożenie każdej macierzy przez εi, gdzie $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, zamienić w model, w którym wektorami są bezśladowe macierze hermitowskie. Przy zmiennych przebiegających teraz zbiór tych macierzy, wzory na iloczyn skalarny i postać izometrii $F'_{\mathbf{U}}$ pozostaną niezmienione, lecz tożsamość $\|\ \|^2 = \det$ zmieni się na $\|\ \|^2 = -\det$. (Jest to niezależne od ε; odnotujmy jednak, że przy $\varepsilon = -1$ macierzom $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ odpowiadają tzw. **macierze Pauliego**: $\sigma_3 := -i\mathbf{i}, \sigma_2 := -i\mathbf{j}, \sigma_1 := -i\mathbf{k}$, a przyjmuje się też $\sigma_0 := \mathbf{I}_2$.)

Zadania uzupełniające. Dowieść, że:

1. Zbiór E' nie jest zamknięty ze względu na mnożenie macierzy, lecz jest zamknięty ze względu na operację komutowania $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \mapsto \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$.

2. $2\mathbf{I}\mathrm{tr}(\mathbf{AB}^*) = \mathbf{AB}^* + \mathbf{BA}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{B} + \mathbf{B}^*\mathbf{A}$ dla $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{H}'$

3. a) Dla dowolnej ortonormalnej bazy (a, b, c) przestrzeni E kwaternionów czystych istnieje kwaternion jednostkowy u taki, że $u^*au = i, u^*bu = j$ oraz $u^*cu \in \{k, -k\}$.

b) Gdy $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ są antyhermitowskimi macierzami o śladzie 0, takimi, że $\mathbf{A}^2 = \mathbf{B}^2 = \mathbf{C},^2 = -\mathbf{I}$ i $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}, \mathbf{AC} = -\mathbf{CA}$ oraz $\mathbf{BC} = -\mathbf{CB}$, to istnieje macierz $\mathbf{U} \in \mathrm{SU}_2$ taka, że $\mathbf{U}^*\mathbf{AU} = \mathbf{i}, \mathbf{U}^*\mathbf{BU} = \mathbf{j}$ oraz $\mathbf{U}^*\mathbf{CU} \in \{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$.

§6. Wybrane możliwe tematy kolokwialne. (Skopiowane z wywieszki dla potoku ogólnego z ubiegłych lat.)

Nie staram się dać pełnej listy tematów, zwłaszcza „teoretycznych" – zakładam, że każdy stara się opanować całość materiału tak, by móc się tym wykazać w takich zadaniach. Wymienię tylko tematy szczególnie nadające się na zadania „praktyczne", sprawdzające umiejętność wykorzystania procedur znanych z ćwiczeń czy wykładu:

• Ortogonalizacja Grama–Schmidta, w tym wykorzystanie do badania dodatniej określoności.

• Wyznaczanie rzutu ortogonalnego na podprzestrzeń U: poprzez wykorzystanie bazy ortogonalnej (ew. stworzenie takiej), poprzez wykorzystanie układu równań, którego macierz jest macierzą Grama, poprzez wykorzystanie (w przypadku $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$) układu równań opisującego podprzestrzeń U i wyznaczenie $U^\perp$ (patrz §1.5).

• Miara kąta, odległość, odległość między warstwami (w tym wektora od warstwy).

• Wyznaczanie i własności hermitowskiego sprzężenia przekształcenia.

• Sprawdzenie, czy dane przekształcenie jest zanurzeniem izometrycznym/rzutem ortogonalnymśymetrią ortogonalnąóbrotem płaszczyzny lub przestrzeni 3-wymiarowej.

• Własności i zastosowania wyznacznika Grama. Miara równoległościanów, „zwykła" i zorientowana.

• Iloczyn wektorowy (wyznaczanie, sprawdzanie tożsamości wyrażonych przy pomocy iloczynów wektorowych i skalarnych).

• Opis obrotów 2- i 3-wymiarowej przestrzeni euklidesowej.