Kolokwium z GAL I w terminie poprawkowym, potok II. 27 II 2010r.

Na każdej oddanej kartce należy wpisać numer rozwiązywanego zadania (tylko jeden) oraz swe imię, nazwisko i numer indeksu.

Proszę o staranne uzasadnianie odpowiedzi, w tym o podawanie wyczerpujących wyjaśnień, umożliwiających zrozumienie toku rozumowania.

Za każde zadanie można dostać do 14p.

1. Niech $U = \operatorname{lin}((1,2,1,3),(2,3,2,4),(2,5,2,8),(5,9,5,13))$ i niech W będzie zbiorem rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni U.
b) Opisać U układem liniowych równań jednorodnych.
c) Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni $U + W$.

2. Przekształcenia $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadane są wzorem $K(x,y,z) = (x+2y+z, 2x+z)$ i równością $[L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$, gdzie $\mathcal{V} = ((1,2),(1,3))$, $\mathcal{W} = ((1,1,1),(1,1,0),(0,1,0))$.

a) Znaleźć $[K]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}$ i $[L \circ K]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}$.
b) Znaleźć bazę i wymiar każdej z przestrzeni $\ker(L)$ i $\operatorname{im}(L)$.
c) Zbadać, dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$ poniższe przekształcenie $S_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest różnowartościowe:

$$S_t(x,y,z) = (x+y+z, 2x+5y+4z, x+2y+tz)$$

3. Niech

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Obliczyć $\det(\mathbf{A})$.
b) Znaleźć $\mathbf{B}^{-1}$.
c) Zbadać, dla jakich $t \in \mathbb{R}$ macierz $\mathbf{AC}_t$ jest odwracalna.

4. a) (4p.) Przekształcenie $L : \mathbb{R}_{10}[x] \to \mathbb{R}[x]$ przyporządkowuje każdemu wielomianowi jego resztę z dzielenia przez $x^7 + x - 2$. Udowodnić, że przekształcenie to jest liniowe i zbadać, jaki jest wymiar jego jądra $\ker(L)$ i wymiar obrazu $\operatorname{im}(L)$.

b) (10p.) Udowodnić istnienie niezerowego wielomianu stopnia 10 lub niższego, który jest podzielny przez $x^6 - x + 3$ i którego reszta z dzielenia przez $x^7 + x - 2$ jest podzielna przez $x^4 + 11$.

5. a) (3p.) Sformułować twierdzenie, wiążące wymiary obrazu i jądra przekształcenia liniowego.

Punkt b) (za 11p.) jest do wyboru:

b1) Udowodnić to twierdzenie, lub

b2) Udowodnić, że maksymalna liczba liniowo niezależnych wierszy macierzy $\mathbf{A}$ jest równa maksymalnej liczbie jej liniowo niezależnych kolumn.