Drugie kolokwium z GAL I, potok II 22 I 2010r.

Na każdej oddanej kartce należy wpisać numer rozwiązywanego zadania (tylko jeden), oznaczenie tematu (A lub B) oraz swe imię, nazwisko i numer indeksu.

TEMAT A

Proszę o staranne uzasadnianie odpowiedzi, w tym o podawanie wyczerpujących wyjaśnień, umożliwiających zrozumienie toku rozumowania.

1. Niech $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ i $\mathcal{W} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$, gdzie

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,0), \mathbf{v}_2 = (1,1,1), \mathbf{v}_3 = (1,2,3) \text{ oraz } \mathbf{w}_1 = (1,1), \mathbf{w}_2 = (1,2)$$

a) (6p.) Dowieść, że $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ są bazami przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$, odpowiednio.

b) (7p.) Niech, w tych bazach, macierz przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie równa $[L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Znaleźć współrzędne wektora $L(\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)$ w bazie $\mathcal{W}$ oraz wzór, określający przekształcenie L we współrzędnych kartezjańskich.

c) (7p.) Niech z kolei macierz przekształcenia liniowego $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, w bazach $\mathcal{W}$ i $\mathcal{V}$, będzie równa $[K]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Znaleźć bazę obrazu przekształcenia $K \circ L$ i wymiar jego jądra.

2. Niech V_t $(t \in \mathbb{R})$ i V będą podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $\mathbb{R}^4$, takimi, że

$$V_t = \text{lin}((1,1,2,-1),(1,1,t,-1)), \quad V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \text{ i } x_1 + 4x_2 + x_4 = 0\}.$$

a) (10p.)Znaleźć te wartości parametru t, dla których $\mathbb{R}^4 = V \oplus V_t$.

b) (10p.) W zależności od t znaleźć bazę przestrzeni $V + V_t$.

3. Niech $\mathcal{W}$ będzie bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$ opisaną w zadaniu 1. Niech

$$Z = \{L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) : \text{ macierz } \mathbf{A} = [L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}} \text{ spełnia warunki } a_{11} = a_{21} \text{ i } a_{12} = 0\}$$

a) (10p.) Wyznaczyć $\dim(Z)$, gdy Z traktować jako podprzestrzeń liniową przestrzeni $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

b) (10p.) Znaleźć wszystkie przekształcenia $P \in Z$, będące rzutami liniowymi. Każdy z tych rzutów opisać wzorem we współrzędnych kartezjańskich.

4. a) (10p.) Do macierzy rzeczywistej $2\mathbf{I}_k$ dopisano pierwszy wiersz i pierwszą kolumnę, równe $(0,1,...,1) \in \mathbb{R}^{k+1}$. Obliczyć wyznacznik otrzymanej macierzy.

b) (10p.) Niech $\mathbf{A}_t$ będzie macierzą o wierszach $(1,0,1,0), (3,t,3,t), (2,1,t+3,t), (1,0,1,t)$. W zależności od wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ obliczyć jej wyznacznik i rząd.

5. a) (8p.) Niech $L \in \mathcal{L}(V, W)$, gdzie przestrzenie V i W są skończonego wymiaru. Wskazać (uzasadnienie nie jest tu konieczne), jak znaleźć można bazę przestrzeni V, gdy znane są bazy jądra $\ker(L)$ i obrazu $\text{im}(L)$ przekształcenia L.

Punkt b) jest do wyboru:

b1) (12p.) Udowodnić prawdziwość swej odpowiedzi z punktu a), lub

b2) (12p.) Sformułować równość Grassmana, dotyczącą wymiarów przecięcia i sumy dwóch podprzestrzeni skończonego wymiaru, i udowodnić ją.

Można też rozwiązywać zarówno b1), jak i b2), uzyskując do 8 dodatkowych punktów.

Drugie kolokwium z GAL I, potok II 22 I 2010r.

Na każdej oddanej kartce należy wpisać numer rozwiązywanego zadania (tylko jeden), oznaczenie tematu (A lub B) oraz swe imię, nazwisko i numer indeksu.

TEMAT B

Proszę o staranne uzasadnianie odpowiedzi, w tym o podawanie wyczerpujących wyjaśnień, umożliwiających zrozumienie toku rozumowania.

1. Niech $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ i $\mathcal{W} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$, gdzie

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,0), \mathbf{v}_2 = (1,1,1), \mathbf{v}_3 = (1,2,3) \text{ oraz } \mathbf{w}_1 = (1,1), \mathbf{w}_2 = (2,3)$$

a) (6p.) Dowieść, że $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ są bazami przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$, odpowiednio.

b) (7p.) Niech, w tych bazach, macierz przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie równa $[L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Znaleźć współrzędne wektora $L(2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3)$ w bazie $\mathcal{W}$ oraz wzór, określający przekształcenie L we współrzędnych kartezjańskich.

c) (7p.) Niech z kolei macierz przekształcenia liniowego $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, w bazach $\mathcal{W}$ i $\mathcal{V}$, będzie równa $[K]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Znaleźć bazę obrazu przekształcenia $K \circ L$ i wymiar jego jądra.

2. Niech V_t $(t \in \mathbb{R})$ i V będą podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $\mathbb{R}^4$, takimi, że

$$V_t = \text{lin}((1,1,2,-1),(1,1,t,-1)), \quad V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \text{ i } x_1 + 3x_2 + x_4 = 0\}.$$

a) (10p.)Znaleźć te wartości parametru t, dla których $\mathbb{R}^4 = V \oplus V_t$.

b) (10p.) W zależności od t znaleźć bazę przestrzeni $V + V_t$.

3. Niech $\mathcal{W}$ będzie bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$ opisaną w zadaniu 1. Niech

$$Z = \{L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) : \text{ macierz } \mathbf{A} = [L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}} \text{ spełnia warunki } a_{11} = a_{21} \text{ i } a_{12} = 0\}$$

a) (10p.) Wyznaczyć $\dim(Z)$, gdy Z traktować jako podprzestrzeń liniową przestrzeni $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

b) (10p.) Znaleźć wszystkie przekształcenia $P \in Z$, będące rzutami liniowymi. Każdy z tych rzutów opisać wzorem we współrzędnych kartezjańskich.

4. a) (10p.) Do macierzy rzeczywistej $3\mathbf{I}_k$ dopisano pierwszy wiersz i pierwszą kolumnę, równe $(0,1,...,1) \in \mathbb{R}^{k+1}$. Obliczyć wyznacznik otrzymanej macierzy.

b) (10p.) Niech $\mathbf{A}_t$ będzie macierzą o wierszach $(1,0,1,0), (3,t,3,t), (2,1,t-1,t), (1,0,1,t)$. W zależności od wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ obliczyć jej wyznacznik i rząd.

5. a) (8p.) Niech $L \in \mathcal{L}(V, W)$, gdzie przestrzenie V i W są skończonego wymiaru. Wskazać (uzasadnienie nie jest tu konieczne), jak znaleźć można bazę przestrzeni V, gdy znane są bazy jądra $\ker(L)$ i obrazu $\text{im}(L)$ przekształcenia L.

Punkt b) jest do wyboru:

b1) (12p.) Udowodnić prawdziwość swej odpowiedzi z punktu a), lub

b2) (12p.) Sformułować równość Grassmana, dotyczącą wymiarów przecięcia i sumy dwóch podprzestrzeni skończonego wymiaru, i udowodnić ją.

Można też rozwiązywać zarówno b1), jak i b2), uzyskując do 8 dodatkowych punktów.