Pierwsze kolokwium z GAL I, potok II 20 XI 2009r.

Na każdej oddanej kartce należy wpisać numer rozwiązywanego zadania (tylko jeden), oznaczenie tematu (A lub B), swe imię, nazwisko i numer indeksu, a także numer grupy ćwiczeniowej, do której podpisana osoba uczęszcza.

TEMAT A

Proszę o podawanie wyczerpujących wyjaśnień, umożliwiających zrozumienie toku rozumowania

1. a) (12p.) Przeciwległymi wierzchołkami kwadratu są punkty $z_1 = 1 + 2i$ i $z_2 = 3 + 8i$. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki i środek kwadratu.

b) (13p.) Wyznaczyć i naszkicować zbiory $f(D)$ i $g^{-1}(D)$, gdy funkcje $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ i zbiór $D \subset \mathbb{C}$ są zadane wzorami

$f(z) = -(1+i)z^3 + 2,\ g(z) = (z+2)^4, \quad D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0 \text{ i } \mathrm{Re}(z) \geq 0\}.$

2. Rozpatrzmy przekształcenie $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$, zadane wzorem

$$L(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y + z, 3x + 2y + 2z, 3x + 4y + 3z, -x - z)$$

i) (6p.) Zbadać, czy któryś z wektorów $(1, 2, 3, 4, 0)$ i $(1, 1, 3, 4, 0)$ (a jeśli tak, to który) leży w obrazie $\mathrm{im}(L)$ przekształcenia L.

ii) (7p.) Znaleźć układ jednorodnych równań liniowych, opisujący ten obraz (tzn. taki układ, którego zbiór rozwiązań jest równy obrazowi $\mathrm{im}(L)$ przekształcenia L).

iii) (6p.) Zbadać, czy wektory $L(\mathbf{e}_1), L(\mathbf{e}_2), L(\mathbf{e}_3)$ są liniowo niezależne.

iv) (6p.) Zbadać, czy $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ dla pewnego niezerowego wektora $\mathbf{v}$, i czy przekształcenie L jest różnowartościowe.

3. Dla $a, b \in \mathbb{R}$ niech przekształcenie $L_{a,b} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie zadane wzorem

$$L_{a,b}(x, y, z, t) = (ax + ay, (a + b)x + (a - b)y, (a + b)x + (a - b)y + z + t, z - t)$$

a) (8p.) Zbadać, dla jakich par (a, b) istnieje przekształcenie $L_{a,b}^{-1}$, odwrotne do $L_{a,b}$, a dla jakich obrazem przekształcenia $L_{a,b}$ jest cała przestrzeń $\mathbb{R}^4$.

b) (9p.) Jeśli przekształcenie odwrotne do $L_{1,2}$ istnieje, opisać je wzorem.

c) (8p.) Znaleźć fundamentalny układ rozwiązań układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, gdzie $\mathbf{A} = [L_{0,1}]$ jest macierzą przekształcenia $L_{0,1}$.

4. (25p.) Rozważamy ciąg operacji na macierzach $\mathbf{A} = \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2 \to \ldots \to \mathbf{X}_s = \mathbf{U}$. i–ta operacja polega na dodaniu do jakiegoś wiersza macierzy $\mathbf{X}_i$ któregoś z poprzedzających go wierszy tej macierzy, pomnożonego przez skalar. Dowieść, że $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, gdzie $\mathbf{L}$ jest macierzą dolnie trójkątną, mającą jedynki na przekątnej.

Pierwsze kolokwium z GAL I, potok II 20 XI 2009r.

Na każdej oddanej kartce należy wpisać numer rozwiązywanego zadania (tylko jeden), oznaczenie tematu (A lub B), swe imię, nazwisko i numer indeksu, a także numer grupy ćwiczeniowej, do której podpisana osoba uczęszcza.

TEMAT B

Proszę o podawanie wyczerpujących wyjaśnień, umożliwiających zrozumienie toku rozumowania

1. a) (12p.) Przeciwległymi wierzchołkami kwadratu są punkty $z_1 = 2 + i$ i $z_2 = 8 + 3i$. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki i środek kwadratu.

b) (13p.) Wyznaczyć i naszkicować zbiory $f(D)$ i $g^{-1}(D)$, gdy funkcje $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ i zbiór $D \subset \mathbb{C}$ są zadane wzorami

$f(z) = (1+i)z^3 - 2,\ g(z) = (z-2)^4, \quad D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0 \text{ i } \mathrm{Re}(z) \geq 0\}.$

2. Rozpatrzmy przekształcenie $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$, zadane wzorem

$$L(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + z, 2x + 3y + 2z, 3x + 3y + 4z, -x - y)$$

i) (6p.) Zbadać, czy któryś z wektorów $(1, 2, 3, 2, -2)$ i $(1, 1, 3, 2, -2)$ (a jeśli tak, to który) leży w obrazie $\mathrm{im}(L)$ przekształcenia L.

ii) (7p.) Znaleźć układ jednorodnych równań liniowych, opisujący ten obraz (tzn. taki układ, którego zbiór rozwiązań jest równy obrazowi $\mathrm{im}(L)$ przekształcenia L).

iii) (6p.) Zbadać, czy wektory $L(\mathbf{e}_1), L(\mathbf{e}_2), L(\mathbf{e}_3)$ są liniowo niezależne.

iv) (6p.) Zbadać, czy $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ dla pewnego niezerowego wektora $\mathbf{v}$, i czy przekształcenie L jest różnowartościowe.

3. Dla $a, b \in \mathbb{R}$ niech przekształcenie $L_{a,b} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie zadane wzorem

$$L_{a,b}(x, y, z, t) = (ax + ay, (a - b)x + (a + b)y, (a - b)x + (a + b)y + z + t, z - t)$$

a) (8p.) Zbadać, dla jakich par (a, b) istnieje przekształcenie $L_{a,b}^{-1}$, odwrotne do $L_{a,b}$, a dla jakich obrazem przekształcenia $L_{a,b}$ jest cała przestrzeń $\mathbb{R}^4$.

b) (9p.) Jeśli przekształcenie odwrotne do $L_{2,1}$ istnieje, opisać je wzorem.

c) (8p.) Znaleźć fundamentalny układ rozwiązań układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, gdzie $\mathbf{A} = [L_{1,0}]$ jest macierzą przekształcenia $L_{1,0}$.

4. (25p.) Rozważamy ciąg operacji na macierzach $\mathbf{A} = \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2 \to \ldots \to \mathbf{X}_s = \mathbf{U}$. i–ta operacja polega na dodaniu do jakiegoś wiersza macierzy $\mathbf{X}_i$ któregoś z poprzedzających go wierszy tej macierzy, pomnożonego przez skalar. Dowieść, że $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, gdzie $\mathbf{L}$ jest macierzą dolnie trójkątną, mającą jedynki na przekątnej.