GAL I, jesień 2014.

Zadania domowe, grupa 6 (prowadzący H. Toruńczyk).

Seria 25 (na wtorek, 20 I).

Uwaga. Wszyskie zadania tej serii, podobnie jak ostatniej serii zadań pisemnych, są „teoretyczne", więc typu przez Państwa nielubianego. Zadania 1–3 są jednak nietrudne, jeśli przytoczyć odpowiednie wyniki z wykładu; pomagają też przyswoić sobie te wyniki. Będzimy te i podobne zadania omawiać na najbliższych 2 ćwiczeniach, lecz jest ważne, by Państwo starali się je wcześniej przemyśleć i zmierzyć z nimi.

1. Niech V będzie przestrzenią liniową skończonego wymiaru, a V_0 będzie jej podprzestrzenią.

a) Dowieść istnienia podprzestrzeni V_1 takiej, że $V = V_0 \oplus V_1$.

b) Dowieść, że gdy $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p)$ jest bazą podprzestrzeni V_0, a $(\mathbf{v}_{p+1}, ..., \mathbf{v}_k)$ bazą podprzestrzeni V_1, to $\mathcal{V} := (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ jest bazą podprzestrzeni V.

c) Gdy przez P oznaczyć macierz rzutu przestrzeni V na V_0 wzdłuż V_1, to jaka jest macierz $M(P)^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}}$?

2. Niech $L \in \mathcal{L}(V, W)$, gdzie V i W są przestrzeniami liniowymi skończonego wymiaru. Obierzmy podprzestrzeń V_1 przestrzeni V taką, że $\ker(L) \oplus V_1 = V$; patrz wyżej. Dowieść, że $L(V_1) = L(V)$ i odwzorowanie L jest na podprzestrzeni V_1 różnowartościowe (tak więc odwzorowanie obcięte $L_{|V_1}$ jest izomorfizmem między V_1 a $L(V)$).

3. Przy oznaczeniach poprzedniego zadania, obierzmy bazę $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r)$ podprzestrzeni V_1 i bazę $(\mathbf{v}_{r+1}, ..., \mathbf{v}_k)$ podprzestrzeni $\ker(L)$. Z zadania 1 wiemy, że $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ jest bazą przestrzeni V.

a) Dowieść, że układ $(L(\mathbf{v}_1), ..., L(\mathbf{v}_r))$ jest bazą przestrzeni $L(V)$ i można go rozszerzyć do bazy $\mathcal{W}$ przestrzeni W.

b) Jaka jest macierz $M(L)^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}$?

c) Jaki jest związek między r a rzędem przekształcenia L?

4. (Zadanie związane z zadaniem ze str. 61 w [TK], o które Państwo pytali.) Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad $\mathbb{K}$, skończonego wymiaru, i niech V będzie sumą prostą swych podprzestzreni V_0 i V_1. Rozpatrzmy przekształcenie Ψ, które każdemu $L \in \mathcal{L}(V, W)$ przyporządkowuje parę $(L_{|V_0}, L_{|V_1})$. (Tak więc obraz Ψ leży w $\mathcal{L}(V_0, W) \times \mathcal{L}(V_1, W)$.)

a) Czy obrazem przekształcenia Ψ jest cała przestrzeń $\mathcal{L}(V_0, W) \times \mathcal{L}(V_0, W)$? Czy przekształcenie Ψ jest różnowartościowe?

b) Dla zadanej podprzestrzeni W_0 przestrzeni W, czym jest obraz, przy Ψ, zbioru $\{L \in \mathcal{L}(V, W) : L(V_0) \subset W_0\}$?

Seria 24 (na piątek, 16 I).
W rozwiązaniach proszę wykorzystywać nieudowodnione jeszcze rezultaty z §5.2 w [TK].

1. Wyznaczniki macierzy $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_4$ z zadania 1 na str. 68 w [TK] obliczyć korzystając z (kilkukrotnego) rozwinięcia względem odpowiednich wierszy czy kolumn.

2. Jak zmieni się wartość wyznacznika macierzy, jeśli

a) do każdej kolumny, zaczynając od drugiej, dodać wszystkie kolumny poprzedzające;

b)* do pierwszej kolumny dodać ostatnią, a do każdej innej dodać kolumnę poprzedzającą (początkowej macierzy).

3. Obliczyć wyznacznik macierzy, której kolejnymi wierszami są $(1001, 1002, 1003, 1004)$, $(1002, 1003, 1001, 1002)$, $(1001, 1001, 1001, 999)$, $(1001, 1000, 998, 999)$.

4. Obliczyć wyznacznik macierzy $\mathbf{A}_2$ z zadania 1 na str. 73 w [TK].

5. Obliczyć wyznacznik macierzy $\mathbf{C}_3$ z zadania 4 na str. 73 w [TK] (stosować dowolną metodę).

6. Proszę przygotować pytania dotyczące wywieszonych kolokwiów, zaległych zadań lub przerobionego materiału.

Zadania pisemne, seria dziewiąta (na wtorek 20 I). Wolno korzystać z tez pozostałych zadań, nawet nierozwiązanych.

P29. Zadanie 5 na str. 74 w [TK]. (Proszę starannie opisywać zmiany macierzy i wyznaczników.)

P30. Niech $L : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Przekształcenie **dualne** (lub: **sprzężone**) $L^* : W^* \to V^*$ jest określone wzorem $L^*(\varphi) := \varphi \circ L$ dla każdego funkcjonału $\varphi \in W^*$. Udowodnić, że jeśli L jest monomorfizmem, to L^* jest epimorfizmem.

P31. Niech U i W będą podprzestrzeniami przestrzeni V, gdzie $\dim V < \infty$. Dowieść, że:

a) Każdą bazę $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_s$ podprzestrzeni $U \cap W$ można rozszerzyć do układu $(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_s, \mathbf{u}_{s+1}, ..., \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{l-s})$ takiego, że $(\mathbf{u}_i)_{i=1}^k$ jest bazą podprzestrzeni U, zaś $(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_s, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{l-s})$ jest bazą podprzestrzeni W. (Wskazówka: lemat o wymianie.)

b) Otrzymany układ $(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{l-s})$ jest bazą podprzestrzeni $U + W$. (Wskazówka: czy układ ten rozpina $U + W$? Czy jego liczebność jest równa $\dim(U + W)$?)

P32. Niech V będzie przestrzenią skończonego wymiaru, a U, U', W, W' będą jej podprzestrzeniami. Konstruując przekształcenie na odpowiedniej bazie dowieść, że:

a) Każde różnowartościowe przekształcenie liniowe $L : U \to V$ można przedłużyć do różnowartościowego przekształcenia liniowego $\widetilde{L} : V \to V$.

b) Jeśli $W \cap U = W' \cap U$ i $\dim(W) = \dim(W')$, to istnieje izomorfizm $L : V \to V$ taki, że $L(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ dla $\mathbf{u} \in U$ i $L(W) = W'$.

Seria 23 (na wtorek, 13 I).

Przypomnienie i sprostowanie. Jeśli na macierzy $\mathbf{A}$ o k wierszach wykonamy operację elementarną na wierszach, otrzymując macierz $\mathbf{B}$, to ma miejsce równość $\mathbf{B} = \mathbf{EA}$, gdzie to macierz otrzymana z macierzy jednostkowej $\mathbf{I}_k$ w wyniku wykonania tejże operacji. (Dowód pomijam.)

Kwadratową macierz nieosobliwą $\mathbf{A}$ można przez kolejne wykonanie pewnych elementarnych operacji na wierszach (oznaczmy te operacje przez $O_1, ..., O_n$) przeprowadzić w macierz jednostkową $\mathbf{I}_k$. Oznacza to, że $\mathbf{A}$ otrzymamy z $\mathbf{I}_k$ przez wykonanie kolejno wpierw operacji O_n^{-1}, następnie O_{n-1} itd. Zatem, na podstawie powyższego stwierdzenia, $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2...\mathbf{E}_{n-1}\mathbf{E}_n\mathbf{I}_k$, gdzie $\mathbf{E}_i$ otrzymano z $\mathbf{I}_k$ przez wykonanie operacji O_i^{-1}, odwrotnej do O_i. (Tu, $i = 1, ..., n$.)

By to jednak zastosować, trzeba upewnić się, czym jest operacja O^{-1}, odwrotna do wierszowej operacji elementarnej O. Ma to być taka operacja, że wykonanie O, a następnie O^{-1}, nie zmienia macierzy $\mathbf{I}_k$. Latwo zauważyć, że

* Gdy O jest zamianą wierszy, to za operację odwrotną O^{-1} należy obrać O;

* Gdy O jest pomnożeniem wiersza przez skalar $c \neq 0$, to za operację odwrotną O^{-1} należy obrać podzielenie tego wiersza przez c;

* Gdy O jest dodaniem c–krotności wiersza i do wiersza j, to za operację odwrotną O^{-1} należy obrać odjęcie c–krotności wiersza i od wiersza j.

Uwaga. Na ćwiczeniach, po (zbyt krótkiej) chwili namysłu, źle określiłem O^{-1} w ostatnim przypadku. Dlatego wykonane wtedy rachunki wymagają korekty.

1. =zadanie 2 na str. 66 w [TK]. Sprawdzić też, czy dla znalezionych macierzy $\mathbf{E}_n, ..., \mathbf{E}_1$ rzeczywiście zachodzi równość $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2...\mathbf{E}_n$.

2. a) Niech $V = U \oplus W$, zaś $(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k)$ i $(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l)$ będą bazami w U i W, odpowiednio. Dowieść, że $(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l)$ jest bazą przestrzeni V.

b) Jaka w tej bazie jest macierz P rzutu przestrzeni V na podprzestrzeń U wzdłuż W? A macierz symetrii S przestrzeni V względem podprzestrzeni U wzdłuż W?

3. Niech $V = \mathbb{R}[x]_n$ i $U := \{f \in \mathbb{R}[x]_n : f(t) = f(-t)\ \forall t \in \mathbb{R}\},\ W := \{f \in \mathbb{R}[x]_n : f(t) = f(t)\ \forall t \in \mathbb{R}\}$.

a) Jaki jest wymiar każdej z przestrzeni U, V, W? Czy $V = U \oplus W$?

b) Jeśli $V = U \oplus W$, to jaka jest macierz rzutu przestrzeni V na U wzdłuż W w bazie $1, t, ..., t^n$?

Seria 22 (na piątek, 9 I).

1. Zadanie 4 str. 60 w [TK].

2. a) Dowieść, że rząd macierzy $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$, powstałej przez dopisanie do $\mathbf{A}$ macierzy $\mathbf{B}$ o tej samej liczbie wierszy, jest niewiększy od sumy ich rzędów.

b) Dowieść, że rząd sumy dwóch macierzy tych samych rozmiarów jest niewiększy od sumy ich rzędów.

3. Proszę przejrzeć zadania zaległe i z wywieszonych kolokwiów, oraz przygotować pytania, a jeszcze lepiej–przygotować rozwiązania i zgłaszać je!

Zadania pisemne, seria ósma (na wtorek 13 I).

P 24. Zadanie 3 na str. 58 w [TK].

P 25. Zadanie 3 str. 60 w [TK].

P 26. Zadanie 1 str. 66 w [TK].

P 27. Niech podprzestrzeń U przestrzeni $\mathbb{R}^n$ będzie opisana równaniem $x_1+...+x_n = 0$, a W – układem równań $x_1 = x_2 = ... = x_n$. Udowodnić, że $\mathbb{R}^n = U \oplus W$ i wyznaczyć rzuty wektorów $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ na U równolegle do W, oraz rzut wektora $\mathbf{e}_1$ na W równolegle do U.

P 28. Niech $U = \mathrm{lin}\{(1,1,1,1),(-1,-2,0,1)\}$ i $W = \mathrm{lin}\{(-1,-1,1,-1),(2,2,0,1)\}$. Dowieść, że $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ i znaleźć rzut wektora $(4,2,4,4)$ na U równolegle do W.

Seria 21 (na piątek, 19 XII).

1. Zadanie 2, str. 55 w [TK].

2. Zadanie 3, str. 55 w [TK].

3. Zadanie 4, str. 55 w [TK].

Proszę pamiętać o nieomawianych zadaniach wcześniejszych!

Seria 20 (na wtorek, 16 XII).

1. Przypomnę, że gdy $L : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to $\mathrm{rk}(L) := \dim(\mathrm{im}(L))$, gdzie $\mathrm{im}(L) := L(V)$ to obraz przekształcenia L. (W [TK] używa się oznaczenia r, a nie rk.) Dowieść, że

a) $\mathrm{rk}(L) \leq \min(\dim(V), \dim(W))$.

b) Gdy $K \in \mathcal{L}(U,V), L \in \mathcal{L}(V,W)$, to $\mathrm{rk}(L \circ K) \leq \min(\mathrm{rk}(K), \mathrm{rk}(L))$.

c) Wywnioskować, że dla macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B}$, których iloczyn $\mathbf{AB}$ istnieje, ma miejsce nierówność $\mathrm{rk}(\mathbf{AB}) \leq \min(\mathrm{rk}(\mathbf{A}), \mathrm{rk}(\mathbf{B}))$. (Wskazówka: uwaga 4.25 na str.63 w [TK].)

d) Wywnioskować z c), że jeśli iloczyn macierzy kwadratowych jest macierzą nieosobliwą, to każda z nich jest nieosobliwa. (Przypomnienie: jak ustalono na ćwiczeniach, $k \times k$ macierz $\mathbf{A}$ jest *nieosobliwa*, gdy $\mathrm{rk}(\mathbf{A}) = k$.)

2. Zadanie 4 str. 60 w [TK].

3. Proszę przemyśleć rozwiązania zadań z kolokwium.

Zadania pisemne, seria siódma (na czwartek, 18 XII).

P 22. Zadanie 2 str. 63 w [TK].

P 23 Zadanie 3 str. 63 w [TK].

Seria 19 (na piątek, 12 XII).

1. W zadaniu 1 na str. 53 w [TK] znaleźć wzór na każde z przekształceń φ, ψ i $\varphi + \psi$.

2. Zadanie 2 str. 55 w [TK].

3. Zadanie 1 str. 60 w [TK].

4. Niech podprzestrzenie V_0 przestrzeni V i W_0 przestrzeni W spełniają warunek $\dim(U_0) + \dim(W_0) = \dim(V) < \infty$. Dowieść istnienia takiego przekształcenia liniowego $L : V \to W$, że $\ker(L) = V_0$ i $\mathrm{im}(L) = W_0$.

Seria 18 (na wtorek, 9 XII).

Przypomnę dyskusję z ćwiczeń.

a) Gdy mamy rozwiązać kilka układów równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1, \mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{Ax} = \mathbf{b}_n$, różniących się tylko prawymi stronami, to warto rozwiązywać je równocześnie, „schodkując" klatkę $\mathbf{A}$ macierzy $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ operacjami wierszowymi. Jeśli w wyniku otrzymamy macierz$(\mathbf{A}'|\mathbf{B}')$, gdzie $\mathbf{B}'$ ma kolejne kolumny $\mathbf{b}'_1, ..., \mathbf{b}'_n$, to wyjściowe układy równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_i$ będą równoważne układom $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'_i$, dla $i = 1, ..., k$ –a te ostatnie będzie łatwiej rozwiązać, bo macierz $\mathbf{A}'$ lewych stron będzie schodkowa.

b) Szczególny jest przypadek, gdy macierz $\mathbf{A}$ jest kwadratowa i można ją operacjami wierszowymi przeprowadzić w macierz jednostkową $\mathbf{I}_k$. (O macierzy $\mathbf{A}$ mówimy wówczas, że jest **nieosobliwa**.) Możemy bowiem wtedy uzyskać $\mathbf{A}' = \mathbf{I}_k$; a że każdy z układów $\mathbf{I}_k\mathbf{x} = \mathbf{b}'_i$ ma jedyne rozwiązanie, równe $\mathbf{b}'_i$, to i każdy z wyjściowych układów $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_i$ ma jedyne rozwiązanie, którym jest $\mathbf{b}'_i$.

c) Sytację taką spotykamy, gdy rowiazujemy równanie macierzowe $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, gdzie macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są dane. Równość $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ma bowiem miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy i–ta kolumna $\mathbf{x}_i$ macierzy $\mathbf{X}$ jest rozwiazaniem układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_i$, dla $i = 1, ..., n$ (gdzie $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n$ to kolejne kolumny macierzy $\mathbf{B}$). Jeśli więc macierz $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa i postępować będziemy jak w a), to równanie $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ okaże się mieć jedyne rozwiązanie, którym będzie macierz $\mathbf{B}'$.

d) Równanie $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ spotykamy natomiast, gdy znana jest macierz $\mathbf{A} = M(I_V)^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$ (tu $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ są bazami przestrzeni V), a chcemy wyznaczyć macierz $M(I_V)^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}$. Ma bowiem miejsce równość $M(I_V)^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} \cdot M(I_V)^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}} = M(I_V \circ I_V)^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}}$, więc biorąc pod uwagę to, że $I_V \circ I_V = I_V$ i $M(I_V)_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}} = \mathbf{I}_k$ stwierdzmy, że szukana macierz jest rowziązaniem równania $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_k$.

1. Przemyśleć poniższe stwierdzenia. Gdy macierz kwadratowa $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ jest nieisobliwa, to jak stwierdzono w c), istnieje jedyna macierz $\mathbf{S}$, będąca rozwiązaniem równania $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_k$. Wówczas $\mathbf{SA}$ jest rozwiązaniem równania $\mathbf{AX} = \mathbf{A}$ (dlaczego?); a że to rozwiązanie jest jedyne (nadal patrz c)) i jest nim $\mathbf{I}_k$, to $\mathbf{SA} = \mathbf{I}_k$. Tak więc dla niesobliwej macierzy $\mathbf{A}$ istnieje jej **odwrotność**, tzn. taka macierz $\mathbf{S}$, że $\mathbf{AS} = \mathbf{SA} = \mathbf{I}_k$; odwrotność ta jest jedyna. Piszemy też $\mathbf{S} = \mathbf{A}^{-1}$

Zadania pisemne, seria szósta (na czwartek, 11 XII).

P 19. Sprawdzić, czy macierz $\mathbf{A}_3$ ze str. 78 w [TK] jest nieosobliwa i jeśli jest, to wyznaczyć jej odwrotność.

P 20. Sprawdzić, dla jakich wartości parametru $s \in \mathbb{R}$ macierz $\mathbf{A}$ z zdania 2 na str. 78 w [TK] jest nieosobliwa, i gdy jest, wyznaczyć jej odwrotność (zależną od s).

P 21. Wyznaczyć $\mathbf{A} = M(I_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{V}}^{st_3}$ i $\mathbf{B} = M(I_{\mathbb{R}^3})_{st_3}^{\mathcal{V}}$, gdy $\mathcal{V} = ((3,4,5),(4,1,1),(2,0,1))$; zarazem uzasadnić, że $\mathcal{V}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$. W przypadku macierzy $\mathbf{B}$ sprawdzić, czy ma ona własności, wynikające z definicji macierzy $M(I_{\mathbb{R}^3})_{st_3}^{\mathcal{V}}$.

Wyznaczyć też macierz $M(I_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$, gdy $\mathcal{W} = ((2,3,4),(0,1,2),(3,4,5))$; sprawdzić, czy poprawnie została wyznaczona jej pierwsza kolumna.

Seria 17 (na piątek, 5 XII).

1. Zadanie 1a) na str. 55 w [TK].

2. Zadanie 1 str. 58 w [TK].

3. Przekształcenie liniowe $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ spełnia warunki

$$L(1,2) = (1,1,1), \ L(0,1) = (1,0,1).$$

a) Opisać to przekształcenie wzorem we współrzędnych kartezjańskich i znaleźć macierz $M(L)_{st_2}^{st_3}$.

b) Znaleźć też macierz $M(L)_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}$ przekształcenia L w bazach $\mathcal{V} = ((1,0),(-1,2))$ i $\mathcal{W} = ((1,2,0),(1,1,1),(0,0,1))$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, odpowiednio.

4. Udowodnić, że gdy podprzestrzenie U i W przestrzeni liniowej V spełniają warunek $\dim U + \dim W > \dim V$, to $U \cap W \neq \{0\}$.

Zadania pisemne, seria szósta (na czwartek, 11 XII).

Zadania ogłoszę w piątek, bo teraz i tak Państwo są zajęci kolokwium ze Wstępu do Matematyki.

Seria 16 (na wtorek, 11 XII).

1. Na ćwiczeniach starliśmy się dowieść, że funkcje $f_1, ..., f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zdefiniowane wzorami $f_i(x) = |x - t_i|$, tworzą układ liniowo niezależny gdy $t_1 < t_2 < ... < t_k$. Dokończyć rozwiązanie, n.p. w następujący sposób. Gdy $\sum_{i=1}^{k} c_i f_i = 0$, to różniczkując lewą stronę dla $x > t_k$ wnosimy, że $\sum_{i=1}^{k} c_i = 0$. Obliczając pochodną lewej strony dla $x \in (t_{k-1}, t_k)$ uzyskać inną podobną zależność i wywnioskować, że $c_k = 0$; zastosować indukcję.

2. Dowieść że przekształcenie $L : V \to \mathbb{F}^k$, przyporządkowujące każdemu wektorowi ciąg $(c_1, ..., c_k)$ jego współrzędnych w ustalonej bazie $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ przestrzeni V, jest liniowe.

3. + Zadanie 2 na str. 53 w TK.

4. + Zadanie 4 na str. 53 w TK.

5. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{F}$, a $L : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.

a) Dowieść, że jeśli obrazy $L\mathbf{v}_1, ..., L\mathbf{v}_k$ wektorów $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ tworzą układ liniowo niezależny, to i wektory $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ tworzą układ liniowo niezależny.

b) Wskazać na przykładzie, że z liniowej niezależności układu $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ nie musi wynikać liniowa niezależność układu $L\mathbf{v}_1, ..., L\mathbf{v}_k$.

c) * Dowieść, że gdy $\ker(L) = \{\mathbf{0}_V\}$, to z liniowej niezależności układu $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ wynika liniowa niezależność układu $L\mathbf{v}_1, ..., L\mathbf{v}_k$.

Seria 15 (na piątek, 28 XI). Proszę przemyśleć dotychczasowy materiał, w tym omawiane już zadania oraz definicje i twierdzenia z wykładu, popracować nad zadaniami nieomawianymi oraz przygotować pytania, jakie się przy tym nasuną. Proszę też przeczytać poniższe wyjaśnienie, związane z dyskusją na ćwiczeniach.

Co oznacza „7=2 w $\mathbb{Z}_5$", tudzież związane z tym równości.

Możliwe nieporozumienia biorą się stąd, że 7 po lewej i 2 po prawej należy inaczej rozumieć (nie tylko dlatego, że $7 \neq 2$). By to wyjaśnić, oznaczmy elementy ciała $\mathbb{Z}_5$ przy użyciu nawiasów $[\ ]_5$; są więc nimi $[0]_5, [1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5$. Element $[1]_5$, jako neutralny względem mnożenia, ma też prawo być oznaczany 1. (Patrz [TK], str. 9.) Ponadto, sumę n jedynek oznaczamy przez n, choć nie jest to już liczba naturalna n, tylko pewien element rozważanego ciała (otrzymany jak wyżej). Ale sumą siedmiu jedynek jest, zgodnie z regułą dodawania w $\mathbb{Z}_5$, element $[2]_5$. Otrzymaną równość $7 = [2]_5$ skrótowo zapisuje się właśnie „$7 = 2$ w $\mathbb{Z}_5$", w której 7 oznacza opisany element ciała $\mathbb{Z}_5$, a nie liczbę naturalną.

Ponadto, element przeciwny do x jest każdym ciele oznaczany przez $-x$. Możemy więc mówić o elemencie -7, przeciwnym do powyższego. Oczywiście, $-7 = [3]_5$, bo $7 = [2]_5$ i $[2]_5 + [3]_5 = [0]_5$.

Ogólniej, dla każdej liczby $n \in \mathbb{Z}$ możemy mówić o sumie n jedynek dowolnego ciała

$\mathbb{K}$ gdy $n > 0$, i o sumie $|n|$ elementów -1 tego ciała gdy $n < 0$. Jest to nadal element ciała $\mathbb{K}$, oznaczany jednak zwyczajowo przez n, jakby był liczbą całkowitą.Tak też oznaczaliśmy go wyżej, lecz dla odróżnienia oznaczmy go teraz przez $\{n\}$.

Z rozdzielności mnożenia względem dodawania wynika (jak?), że $\{mn\} = \{m\}\{n\}$ i podobnie $\{m+n\} = \{m\}+\{n\}$ dla $m, n \in \mathbb{Z}$. Wracając do ciała $\mathbb{Z}_5$ czy ogólniej $\mathbb{Z}_p$, dla liczby pierwszej p, zauważamy że $\{n\} = [r]_p$, gdzie r to reszta z dzielenia n przez p. Dla $a_1, ..., a_k \in \mathbb{Z}_p$ utworzyć więc można kombinację $n_1a_1 + ... + n_ka_k$, rozumianą jako suma n_1 elementów a_1 plus n_2 elementów a_2 plus...., gdzie dodawanie jest w $\mathbb{Z}_p$. Z tego, co powiedziano wynika, że wartość jej można wyznaczać tak, by traktować $a_1, ..., a_k$ jako elementy $\mathbb{Z}$, tam obliczać $n_1a_1 + ... + n_ka_k$, a następnie brać resztę z dzielenia otrzymanej liczby przez p.

Seria 14 (na wtorek, 25 XI).

1. Dokładnie zaznajomić się z definicjami i twierdzeniami, omawianymi na wykładzie. (To jest stałe zadanie, ale warte dodatkowego przypomnienia w związku z kolokwium.)

Z powodu kolokwium rezygnuję też z zadań pisemnych w tym tygodniu –zamiast tego proszę więcej czasu poświęcić na zadania ustne (w tym zaległe i z wywieszonych kolokwiów) i na przemyślenie materiału z wykładu.

Na ćwiczeniach nie mieliśmy dotąd do czynienia z ciałami skończonymi. Poniższe dwa zadania ich dotyczą.

2. + Zadania 3 i 4 na str. 10 w [TK].

3. + a) Niech V będzie najmniejszą podprzestrzenią przestrzeni $(\mathbb{Z}_5)^4$, zawierającą wektory $(1, 2, 3, 4), (1, 1, 1, 1)$ i $(3, 4, 0, 1)$. Opisać V układem jednorodnych równań liniowych.

b) Znaleźć bazę przestrzeni $V \cap W$, gdzie V jest jak wyżej, a W jest przestrzenią rozwiązań układu równań $x_1 + 3x_3 + 4x_4 = 0$, $x_1 + 3x_4 = 0$ nad ciałem $\mathbb{Z}_5$.

4. + Niech $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1), \mathbf{v}_2 = (1, -1, 0)$. Znaleźć, jeśli istnieje, taki wektor $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, by układ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ był bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$, a wektor $\mathbf{w} = (3, -2, 0)$ miał w tej bazie współrzędne $(2, 1, -1)$.

5. + Zadanie 5 z kolokwium z 2008r.

6. + Niech funkcje $f_1, ..., f_n : T \to \mathbb{F}$ i punkty $t_1, ..., t_n \in T$ mają tę własność, że $f_i(t_i) \neq 0$ i $f_i(t_j) = 0$ dla $1 \leq i < j \leq n$. Dowieść, że $(f_1, ..., f_n)$, jako układ wektorów przestrzeni liniowej (nad $\mathbb{F}$) wszystkich funkcji z T do $\mathbb{F}$, jest liniowo niezależny.

Seria 13 (na piątek, 21 XI).

1. Wyznaczyć wymiary sumy i części wspólnej podprzestrzeni $\mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ i

$\mathrm{lin}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, gdzie $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 1, -1), \mathbf{v}_3 = (1, 3, 3), \mathbf{w}_1 = (1, 2, 2), \mathbf{w}_2 = (2, 3, -1), \mathbf{w}_3 = (1, 1, -3)$.

Uwaga: twierdzenie z wykładu pozwala wyznaczyć którykolwiek z tych wymiarów, gdy znany jest drugi.

2. Zadanie 2 str 46 w [TK].

3. Zadanie 5 a), b) str. 47 w [TK].

Proszę pamiętać o zadaniach zaległych i zaznajomić się z wywieszonymi zadaniami z dawniejszych kolokwiów.

Seria 12 (na wtorek 18 XI). Zgodnie z Państwa prośbą, związaną z kolokwium z Analizy, termin oddania zadań pisemnych serii V przesuwam na czwartek 20 XI, godz. 12.15 (proszę wrzucać prace do koperty przy drzwiach pokoju 5560).

1. + Dane są wielomiany $f_1 = x^5 + x_4,\ f_2 = x^5 - 3x^2,\ f_3 = x^5 + 2x^2,\ f_4 = x^5 - x$.

a) Zbadać, czy wielomiany te są liniowo niezależne w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}[x]$ wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych.

b) Jeśli są one liniowo niezależne, rozszerzyć układ $(f_i)_{i=1}^{5}$ do bazy podprzestrzeni $\mathbb{R}[x]_5$ przestrzeni $\mathbb{R}[x]$. (Przypominam, że $\mathbb{R}[x]_5 := \{w \in \mathbb{R}[x] : \deg(w) \leq 5\}$.)

2. Niech V oznacza zbiór wszystkich takich ciągów liczbowych $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, które spełniają warunki $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n$ dla $n = 1, 2, ...$ Zbadać, czy V jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$, a jeśli nią jest, to jaki ma wymiar. W przypadku wymiaru skończonego, wskazać bazę.

3. Zadanie 6 str. 41 w [TK].

Proszę pamiętać też o zadanch zaległych.

Seria 11 (na piątek 14 XI).

1. + Zadanie 1b) na str. 46 w [TK] (część dotycząca $V_1 + V_2$, bo pozostała była już omówiona).

2. + Opisać podprzestrzeń $\mathrm{lin}((1, 2, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, -1))$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ układem równań jednorodnych, o współczynnikach z $\mathbb{R}$.

3. + Zadanie 1 na str. 41 w [TK].

4. Zadanie 4 na str. 41 w [TK].

Na swej stronie wywiesiłem niektóre kolokwia z poprzednich lat. Zachęcam do zaznajomienia się z zadaniami i przemyślenia ich; w miarę wolnego czasu możemy niektóre omawiać na ćwiczeniach. Proszę też pamiętać o nieomawianych zadaniach wcześniejszych (nadal je można zgłaszać).

Zadania pisemne, seria piąta (na wtorek, 18 XI).

P15. Opisać układem równań jednorodnych najmniejszą podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^5$, zawierającą wektory $(1,1,-1,-1,1),(1,0,1,0,3),(0,-1,2,1,2),(2,0,2,0,6)$.

P16. W zależności od wartości parametru λ wyznaczyć rząd macierzy, której kolejnymi wierszami są $(3,4,2,2),(3,17,7,1),(1,10,4,\lambda),(4,1,1,3)$.

P17. Zadanie 1c) na str. 46 w [TK], część dotycząca V_1+V_2.

P18. (Por. zadanie P7, które wypadło źle.) Niech $D := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \geq 0, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ i niech funkcje $f,g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ zadane będą wzorami

$$f(z) := (1+i)z^4+2+i, \quad g(z) := (z-2i)^4.$$

Narysować zbiory $f(D)$ i $g^{-1}(D)$.

Seria 10 (na piątek 7 XI).

Uwaga: Na prośbę niektórych z Państwa, opóźniam o tydzień termin oddania serii 4 zadań pisemnych. Zadania pisemne (na wtorek 18 XI) będą ogłoszone do 9 XI.

Poniżej daję poczynione na ćwiczeniach uwagi w wersji potrzebnej do naszych zastosowań:

Uwaga 1. Niech wektory $\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_p \in \mathbb{K}^n$ mają następującą własność: dla $i=1,...,p$ istnieje wskaźnik $j_i \in \{1,...,n\}$ taki, że j_i-ta współrzędna wektora $\mathbf{w}_k$ jest różna od zera gdy $k=i$, a równa 0 gdy $k>i$. Wówczas układ $(\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_p)$ jest liniowo niezależny.

Dowód. Mamy dowieść, że gdy $\sum_{i=1}^p c_i\mathbf{w}_i = \mathbf{0}$, to wszystkie skalary $c_1,...,c_p$ są równe 0. Jednak patrząc na j_1–szą współrzędną kombinacji $\sum c_i\mathbf{w}_i$ stwierdzamy, że jest ona równa $c_1\mathbf{w}_1(j_1)$, bo wektory $\mathbf{w}_2,...,\mathbf{w}_p$ mają tę współrzędną zerową. (Przez $\mathbf{v}(k)$ oznaczam k–tą współrzędną wektora $\mathbf{v}\in\mathbb{K}^n$.) Tak więc $c_1\mathbf{w}_1(1)=0$; a że $\mathbf{w}_1(j_1)\neq 0$, to $c_1=0$. Nasza kombinacja jest więc równa $\sum_{i=2}^p c_i\mathbf{w}_i$ i patrząc na jej j_2-gą wpółrzędną stwierdzamy analogicznie, że $c_2=0$ itd. □

Uwaga 2. Niech $\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_p,\mathbf{b}\in\mathbb{K}^n$. Pytanie, czy $\mathbf{b}\in \mathrm{lin}(\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_p)$ sprowadza się do tego, czy równanie wektorowe $x_1\mathbf{w}_1+...+x_p\mathbf{w}_p=\mathbf{b}$ ma rozwiązanie. Patrząc na współrzędne obu stron widzimy, że jest to równanie $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą o kolumnach $\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_p$. Jeśli rozwiązanie $(c_1,...,c_p)$ równania $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ jest jedyne, to układ $(\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_p)$ jest liniowo niezależny, a więc jest bazą przestrzeni $\mathrm{lin}(\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_p)$; układ zaś $(c_1,...,c_p)$ jest ciągiem współrzędnych wektora $\mathbf{b}$ w tej bazie. ⊟

Obie uwagi są bardzo użyteczne, gdy chodzi o badanie układów wektorów w $\mathbb{K}^n$. Przypominam, że z uwagi 1 wynika, iż niezerowe wiersze macierzy schodkowej tworzą układ liniowo niezależny, a także, że bazę przestrzeni rozwiązań układu równań jednorodnych można tworzyć w sposób opisany na ćwiczeniach (a omawiany też w [TK] w uwadze 3.18.).

Zadanie 1. Przemyśleć obie uwagi i ich uzsadnienie.

Zadanie 2. Przez wykonanie kilku operacji elementarnych na wierszach, z macierzy $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ otrzymano macierz $(\mathbf{A}', \mathbf{b}')$. Udowodnić, że gdy $\mathbf{b}$ jest kombinacją liniową kolumn macierzy $\mathbf{A}$, ze współczynnikami $c_1, ..., c_p$, to $\mathbf{b}'$ jest kombinacją liniową kolumn macierzy $\mathbf{A}'$, z tymi samymi współczynnikami.

Zadanie 3. Upewnić się, czy zadania 2 i 3 na str. 36 w [TK] nie sprawiają kłopotu.

Seria 9 (na wtorek 4 XI, a pisemne na czwartek, 6 XI.

Uwaga: Pod adresem

http://students.mimuw.edu.pl/ ps305551/gal-gr6/

pan Piotr Suwara wywiesza poprawne rozwiązania zadań pisemnych oraz swe uwagi.

1. Udowodnić, że dla macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{K})$ równoważne są warunki:

a) Kolumny tej macierzy tworzą układ liniowo niezależny.

b) Układ równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ma tylko zerowe rozwiązanie (tzn. tylko takie, w którym $x_1 = ... = x_k = 0$).

2. Udowodnić, że dla macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{K})$ i wektora $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^l$ równoważne są warunki:

a) $\mathbf{b} \in \mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$, gdzie $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ to kolumny macierzy $\mathbf{A}$.

b) Układ równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jest niesprzeczny.

3. W oparciu o zadania 1 i 2 zbadać, a) czy układ wektorów z zadania 1c) ze strony 36 w [TK] jest liniowo niezależny, oraz b) czy wektor $(0, 1, 0, 1, 0)$ leży w powłoce liniowej tego układu.

Przypomnę, że gdy $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ jest bazą przestrzeni V, a $\mathbf{v}$ jest wektorem tej przestrzeni, to $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i$ dla jednoznacznie wyznaczonych skalarów $c_1, ..., c_n$, nazywanych **współrzędnymi** wektora $\mathbf{v}$ w bazie $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$.

4. Zadanie 6 na str. 36/37 w [TK]. (W części b), ograniczyć się do podania współrzednych wektora β_1 w rozwazanej bazie.)

Zadania pisemne, seria czwarta (na czwartek, 6 XI, godz. 12.15).

P13. Punkty $(1, 3)$ i $(4, 7)$ płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Używając liczb zespolonych, znaleźć współrzędne kartezjańskie pozostałego wierzchołka. Ile jest rozwiązań?

P13 : Zadanie 8 na str. 37 w [TK].

P14 : Zadanie 2 na str. 41 w [TK]. (Zadanie to jest podobne do zadania P3, które wypadło słabo. Proszę przemyśleć to wcześniejsze zadanie i zaznajomić się z jego rozwiązaniem.)

Seria 8 (na piątek 31 X). Proszę zacząć od przemyślenia treści wykładów!

1. Niżej, funkcje rozpatrujemy na odcinku $[0,1]$.
a) Czy funkcja x^2 jest kombinacją liniową funkcji 1 i x?
b) Czy funkcja $\sin^2$ jest kombinacją liniową funkcji 1 i $\cos^2$?

2. Zadanie 1 str. 29 w [TK]. (Wybrać dwa z punktów a)–c).)

3. Zadanie 2 str. 29 w [TK].

4. Niech V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V.
a) Dowieść, że $V_1 \cap V_2$ jest podprzestrzenią przestrzeni V.
b) Dowieść, że $\mathrm{lin}(V_1 \cup V_2) = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 : \mathbf{v}_1 \in V_1, \mathbf{v}_2 \in V_2\}$.

5. Niech X będzie zbiorem, V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{K}$, a $f : X \to V$ przekształceniem bijektywnym (tzn. różnowartościowym i „na"). Przyjmijmy:

$$\mathbf{x} \boxplus \mathbf{y} := f^{-1}(f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})) \ \text{ i } \ c \cdot \mathbf{x} := f^{-1}(cf(\mathbf{x})) \text{ dla } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \ c \in \mathbb{K}.$$

a) Wykazać, że z tymi działaniami X jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{K}$.
b) Określić te działania wzorami, gdy $V = \mathbb{K} = \mathbb{R}$, $X = (0, \infty)$ i $f(x) = \ln x$.
c)* To samo, gdy $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$, X to zbiór podzbiorów zbioru T, $V = F(T, \mathbb{K})$ (używam notacji z [TK], str. 20, przykład 5), a $f : X \to V$ przyporządkowuje każdemu zbiorowi $A \in X$ jego funkcję charakterystyczną 1_A, zdefiniowaną wzorem $1_A(t) = 1$ dla $t \in A$ i $1_A(t) = 0$ dla $t \in T \setminus A$.

Zadania pisemne, seria czwarta –zadania będą ogłoszone w piątek 30 X, z terminem oddania na czwartek 6 XI.

Seria 7 (na wtorek 28 X).
Uwaga: Grupom GALowym przydzielono już graderów. Będę zmierzał do tego, by zadania pisemne były zbierane we wtorki, a zwracane Państwu po tygodniu. Jednak termin oddania zadań serii 3 przesuwam na czwartek 30 X, ponieważ zgłoszono mi celowość przedysktutowania jeszcze zadań podobnych do P9. Rozwiązania proszę wrzucać do koperty przy drzwiach pokoju 5560, do godz. 12.15.

1. + Niech liczba z_0 będzie pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych. Udowodnić, że $\overline{z_0}$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu i wywnioskować, że wielomian ten jest podzielny przez $(x - z_0)(x - \overline{z_0}) = x^2 - 2x\mathrm{Re}(z_0) + |z_0|^2$.

2. + Korzystając z powyższego, wskazać wielomian najniższego stopnia, o współczynnikach rzeczywistych, mający:

a) podwójny pierwiastek 1 i pierwiastki pojedyńcze $2, 3, i + i$.

b) podwójny pierwiastek i oraz pierwiastek pojedyńczy $-1 - i$.

W obu przypadkach wskazać też wielomian najniższego stopnia o współczynnikach zespolonych, mający wymienione własności.

3. + Zadanie 4 na str. 25 w [TK].

4. + Zadanie 2 na str. 25 w [TK].

Seria 6 (na piątek 24 X), a pisemne –na wtorek 28 X).

Przypominam, że w piątek zbieram też rozwiązania drugiej serii zadań pisemnych. Rozwiązując zadanie P 5 proszę jawnie wskazywać, jakie własności ciał są wykorzystywane.

1. + Dokończyć rozwiązanie zadania 3 serii 5 zaproponowaną na ćwiczeniach metodą. (Oprócz pomylenia wzoru na f_3, nie zwróciłem też Państwa uwagi na to, że $iz^3 + i$ i iz^3 mają tę samą część rzeczywistą.)

2. + =zadanie 2 na str. 17 w [TK]

3. =zadanie 3 na str. 17 w [TK] (dwa wybrane punkty spośród a–d)).

4. = zadanie 4 na tr.17–18 w [TK].

5. =zadanie 4 na str. 22 w [TK].

Zadania pisemne, seria trzecia (na wtorek 28 X).

P 8. Niech $p, q \in K[x]$ będą wielomianami stopnia $\leq n$. Udowodnić, że gdy podzbiór A ciała K liczy więcej niż n elementów, to $p(a) \neq q(a)$ dla pewnego $a \in A$.

P 9. Liczba $z_1 = 2 - i$ jest jednym z pierwiastków wielomianu $w(z) = z^4 - 6z^3 + 18z^2 - 30z + 25$. Wyznaczyć pozostałe pierwiastki tego wielomianu i rozłożyć go na czynniki najniższych stopni o współczynnikach rzeczywistych.

P 10 =zadanie 1 na str. 22 w [TK].

P 11. Traktujemy zbiór $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ wszystkich $k \times k$–macierzy rzeczywistych jako przestrzeń liniową nad $\mathbb{R}$. Zbadać, które z poniższych zbiorów macierzy są podprzestrzenią tej przestrzeni liniowej (odpowiedzi uzasadnić!):

a) Zbiór macierzy symetrycznych, tzn. tych macierzy (a_{ij}), dla których spełniona jest równość $a_{ij} = a_{ji},\ i, j = 1, ..., k$.

b) Zbiór macierzy ze śladem $tr(\mathbf{A})$ równym zeru. (Patrz zadanie 3 serii 1.)

c) Gdy $k = 2$, zbiór tych macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_2$, których wyznacznik $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ jest równy 0.

d) Zbiór tych macierzy, których pewien wyraz jest równy 0.

Seria 5 (na wtorek 21 X).

Uwaga 1. Ponieważ nadal nie mamy „gradera”, a ostatni temat (badanie obrazów i przeciwobrazów zbiorów przy przekształceniach płaszczyzny, zadanych analitycznie) wydaje się sprawiać pewne kłopoty, więc termin oddania drugiej serii zadań pisemnych odkładam do piątku 24 X.

1. + a) Niech $f(z) = (1+\sqrt{3}i)((1+i)(3z+1)^2+5)^3-1$. Znaleźć funkcje $f_1, ..., f_n$ takie, że $f = f_n \circ f_{n-1} \circ ... \circ f_1$ i dla każdego $k \leq n$, f_k jest przesunięciem, obrotem wokół 0, jednokładnością o środku w 0 lub podnoszeniem do pewnej potęgi (czyli jest postaci $z \mapsto z^j$, dla pewnego $j \in \mathbb{N}$). Każdą funkcję f_k zadać jawnym wzorem i napisać, z którym z powyższych rodzajów funkcji mamy w jej przypadku do czynienia. W przypadku obrotów, jednokładności lub przesunięć podać kąt obrotu, skalę jednokładności i wektor przesunięcia, odpowiednio.

b) To samo, gdy $f(z) = z^2 + 2z + 2$.

2. + Przedstawić symetrię względem osi urojonej jako złożenie obrotów wokół zera i sprzężenia.

3. + Naszkicować zbiór $D := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(-iz^3 + i) > 0\}$ i ustalić, dla jakich liczb naturalnych $k \leq 8$ zachodzi $(-1+i)^k \in D$.

4. + Rozwiązać równanie $16z^4\overline{z}^2 = i|z|^2$. (Wskazówka: użyć przedstawienia $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, gdzie r i α są niewiadome.)

Seria 4 (na piątek, 17 X), a pisemne –na wtorek 21 X).

1. Proszę przyswoić sobie treść wykładu 2, zaznajomić się z zdaniami ze skryptu [TK] na stronach 10, 14 i 15 i z poniższymi zadaniami pisemnymi, oraz przygotować ewentualne pytania.

2. Wyznaczyć liczby rzeczywiste x i y takie, by $(2+i)x + (1+2i)y = 1 - 4i$.

3. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone, które są sprzężone do a)+ swego kwadratu, b) swego sześcianu.

4. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona i twierdzenia de Moivre'a, wyrazić $\sin(4\alpha)$ poprzez $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

Zadania pisemne, seria druga (na wtorek 21 X). (Zadania proszę numerować jak niżej: P5, P6 itd.)

P 5. Zadanie 1 str. 10 w [TK], części a) i b).

P 6. Narysować na płaszczyźnie: a) zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \arg(iz^5) = 0\}$, b) zbiór

$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z^3) > \mathrm{Re}(z^3)\}$.

P 7. Niech $D := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq -\mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Im}(z)\}$ i niech funkcje $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zadane będą wzorami

$$f(z) := (1 + i\sqrt{3})z^3 + 3, \quad g(z) := (z - 4i)^3.$$

Narysować zbiory $f(D)$ i $g^{-1}(D)$.

Seria 3 (na wtorek, 14 X).

1. Dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ i macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_2$, proszę równość $L_{\mathbf{A}}(L_{\mathbf{B}}(\mathbf{x})) = L_{\mathbf{AB}}(\mathbf{x})$ sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. (Ogólniejszy taki rachunek przeprowadzono w dowodzie stwierdzenia 1 po serii 2.)

2. Przy $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ znaleźć macierz $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_2$ taką, że $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. (Wskazówka: poniższa obserwacja.)

Obserwacja. Niech dane będą macierze kwadratowe $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$. Chcemy znaleźć macierz $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_k$ taką, że $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Niech $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k$ będą kolejnymi kolumnami tej szukanej macierzy, a $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k$ – kolejnymi kolumnami macierzy $\mathbf{B}$. Z definicji iloczynu macierzy, pierwsza kolumna macierzy $\mathbf{AX}$ jest równa $\mathbf{Ax}_1$; jeśli więc $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, to $\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}_1$. Rozważając dalsze kolumny stwierdzamy, że spełnione są równości

$$\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}_1,\ \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{b}_2,\ ...,\ \mathbf{Ax}_k = \mathbf{b}_k \tag{1}$$

Również odwrotnie: gdy równości te zachodzą, to macierz $\mathbf{X}$ o kolumnach $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k$ ma żądaną własność $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

Każde równanie w (1) możemy rozwiązywać metodą eliminacji Gaussa, i w ten sposób znaleźć (jeśli istnieje) macierz $\mathbf{X}$. Macierz współczynników lewych stron tych równań jest jednak wspólna (równa $\mathbf{A}$). Zmiast więc rozwiązywać pierwsze równanie $\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}_1$, wypisując macierz $(\mathbf{A}|\mathbf{b}_1)$ i operacjami wierszowymi przeprowadzając ją w $(\mathbf{A}', \mathbf{b}_1)$, gdzie $\mathbf{A}'_1$ jest macierzą schodkową, po czym powtarzać to z macierzą $(\mathbf{A}|\mathbf{b}_2)$ i dalszymi, można do $\mathbf{A}$ dopisać wszystkie kolumny $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k$ (czyli całą macierz $\mathbf{B}$), i otrzymaną macierz $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ operacjami wierszowymi przeprowadzić w $(\mathbf{A}'|\mathbf{B}')$, gdzie macierz $\mathbf{A}'$ jest schodkowa. Wyjściowe równanie $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ będzie miało te same rozwiązania, co równanie $\mathbf{A}'\mathbf{X} = \mathbf{B}'$.

Jeśli uda się tu otrzymać $\mathbf{A}' = \mathbf{I}_k$, macierz diagonalną mającą tylko jedynki na przekątnej, to końcowe równanie $\mathbf{A}'\mathbf{X} = \mathbf{B}'$ rozwiązuje się bardzo prosto: jedynym jego rozwiązaniem jest $\mathbf{X} = \mathbf{B}'$ (bo $\mathbf{I}_k\mathbf{X} = \mathbf{X}$).

Seria 2 (na piątek, 10 X, a pisemne –na wtorek 14 X).

1. Proszę przyswoić sobie treść wykładu 1, a także wiadomości z ćwiczeń. (Poniżej zadań daję alternatywne wyprowadzenie zasadniczego wzoru z ćwiczeń.) Proszę zaznajomić się też z zadaniami pisemnymi (termin ich oddania to wtorek) i zadaniami ze str. 8 skryptu [TK1] i przygotować ewentualne pytania.

2. + Udowodnić, że gdy każde z mnożeń po jednej ze stron równości $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ jest wykonalne, to po drugiej stronie –też, a równość rzeczywiście ma miejsce. (Tu, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ to macierze o wyrazach rzeczywistych. Mnożenia są wykonalne, gdy rozmiary macierzy są odpowiednio zgodne.)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

Stwierdzenie 1. *Złożenie $K_1 \circ K_2$ przekształceń liniowych $K_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ i $K_1 : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ jest przekształceniem liniowym przestrzeni $\mathbb{R}^k$ w $\mathbb{R}^m$. Ponadto, gdy $K_1 = L_{\mathbf{A}}$ i $K_2 = L_{\mathbf{B}}$, gdzie $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,l}$ i $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{l,k}$, to $K_1 \circ K_2 = L_{\mathbf{C}}$, gdzie $\mathbf{C} = \mathbf{AB} \in \mathcal{M}_{m,k}$. Równoważnie: dla takich macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ określony jest iloczyn $\mathbf{AB}$ i zachodzi równość $L_{\mathbf{A}} \circ L_{\mathbf{B}} = L_{\mathbf{AB}}$.*

<u>Dowód.</u> (Ciągi zaznaczam „tłustymi" literami, w miejsce użycia strzałeczek, jak na ćwiczeniach.) Niech $\mathbf{v} = (v_j)_{j=1}^k \in \mathbb{R}^k$ i $\mathbf{y} := (K_1 \circ K_2)(\mathbf{v}), \mathbf{w} := K_2(\mathbf{v})$. Z definicji, $\mathbf{y} = K_1(\mathbf{w})$ i $\mathbf{w} = (\sum_{j=1}^k b_{sj} v_j)_{s=1}^l \in \mathbb{R}^l$. Stąd $y_i = \sum_{s=1}^l a_{is} w_s = \sum_{s=1}^l a_{is} (\sum_{j=1}^k b_{sj} v_j)$ dla $i = 1, ..., m$. „Otwierając nawiasy" i zmieniając kolejność sumowania stwierdzamy, że $y_i = \sum_{j=1}^l c_{ij} v_j$, gdzie $c_{ij} := \sum_{s=1}^l a_{is} b_{sj}$ $(i = 1, ..., m)$. Wobec dowolności ciągu $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ dowodzi to, że $K_1 \circ K_2 = L_{\mathbf{C}}$, przy $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

<u>Zadania pisemnie, seria pierwsza (na wtorek 14 X).</u>

P **1.** Rozwiązać następujące równania/układy równań:

a) $x + 2y + 3z + 4t = 11$
$2x + 3y + 4z + t = 12$
$3x + 4y + z + 2t = 13$
$4x + y + 2z + 3t = 14$

Zapisać też ten układ w postaci macierzowej $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

b) $x(1, 1, 2) + y(-3, -1, 1) + z(2, 1, -3) = (1, 2, -5)$. (Dodawanie ciągów jest „po współrzędnych", a mnożymy je przez liczbę mnożąc przez nią ich kolejne współrzędne.)

P **2.** Znaleźć wielomian $f(x) = p + qx + rx^2 + sx^3 + tx^4$ jeśli wiadomo, że ma on współczynniki rzeczywiste i spełnia warunki $f(-2) = 10$, $f(1) = 4$, $f(-3) = 60, f(2) = -10$, $f(-1) = -4$.

P **3.** W zależności od wartości parametrów a, b wyznaczyć liczbę rozwiązań układu:

$3x - 2y + z = b$

$5x - 8y + 9z = 3$
$2x + y + az = -1.$

P **4.** Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu równań:

$12x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13$
$4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$
$8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7.$

Seria 1 (na wtorek, 7 X).

Zbiór wszystkich $l \times k$–macierzy o wyrazach rzeczywistych oznaczam niżej krótko $\mathcal{M}_{l,k}$ (zamiast $\mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{R})$); piszę też $\mathcal{M}_k$ zamiast $\mathcal{M}_{k,k}$.

1. Niech $\mathbf{D} \in \mathcal{M}_k$ będzie macierzą diagonalną, której wyrazy stojące na przekątnej są parami różne.

a)+ Znaleźć wszystkie macierze $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ takie, że $\mathbf{AD} = \mathbf{DA}$.

b) Dowieść, że każda $k \times k$–macierz, której główna przekątna jest zerowa, jest postaci $\mathbf{BD} - \mathbf{DB}$ dla pewnej macierzy $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$.

2. W $\mathcal{M}_2$, dać wszystkie rozwiązania każdego z równań a) $\mathbf{X}^2 = \mathbf{0}_2$, b) $\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}_2$. (Przez $\mathbf{I}_k$ oznaczam $k \times k$–macierz, mającą na przekątnej jedynki, a poza nią zera, zaś przez $\mathbf{0}_k$ – macierz mającą wszystkie wyrazy równe 0.)

3. + Dla każdej macierzy kwadratowej $\mathbf{X}$, oznaczmy przez $\mathrm{tr}(\mathbf{X})$ sumę wyrazów jej przekątnej. Dowieść, że dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$ i $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{k,l}$ zachodzi równość $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$. (W razie kłopotów, rozpatrzeć wpierw przypadek małych wartości k i l.)