GAL potok 1, kolokwium nr 2, 25.01.2008

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Temat A

1. Niech $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $\varphi((1,2)) = (1,2,3)$, $\varphi((1,1)) = (2,1,1)$.
a) Znaleźć wzór na φ i znaleźć macierz przekształcenia φ w bazach $\mathcal{A} = \{(3,4),(1,3)\}$ oraz $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$.
b) Określić (przez podanie wartości na wybranej bazie) takie przekształcenie liniowe $\psi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, że $\mathrm{im}(\psi \circ \varphi) = \{(0,0)\}$ oraz $\mathrm{im}(\varphi \circ \psi) = \mathrm{lin}((2,1,1))$.

2. Niech $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ będzie przekształceniem liniowym zadanym warunkiem
$M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathrm{st}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, gdzie $\mathcal{B} = \{(1,-1),(0,1)\}$.
a) Znaleźć bazę przestrzeni $\ker(\varphi)$.
b) Niech $\psi_t : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ będzie dane wzorem $\psi_t((x_1,x_2)) = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, -x_1 + x_2, x_1 + tx_2)$. Dla jakich $t \in \mathbf{R}$ przekształcenie $\varphi \circ \psi_t$ jest izomorfizmem?

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & s & s & \dots & s \\ s & 1 & s & \dots & s \\ s & s & 1 & \dots & s \\ \vdots & & & & \vdots \\ s & s & s & \dots & 1 \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$, $B = \begin{bmatrix} 1 & s & s & \dots & s & 1 \\ s & 1 & s & \dots & s & 1 \\ s & s & 1 & \dots & s & 1 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ s & s & s & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{n\times(n+1)}(\mathbf{R})$
a) Obliczyć $\det A$.
b) Dla jakich $s \in \mathbf{R}$ macierz A jest odwracalna? Dla każdego takiego s niech $(y_1,\dots,y_n)$ będzie rozwiązaniem układu równań liniowych o macierzy B. Obliczyć y_2.

4. Niech $A \in M_{n\times n}(K)$. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:
(i) A jest odwracalna,
(ii) $r(A) = n$,
(iii) $\det A \neq 0$.

5. Niech V będzie n wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbf{R}$.
a) Wykazać, że jeśli V_1, V_2 są podprzestrzeniami przestrzeni V takimi, że $\dim V_1 + \dim V_2 \geq n$, to istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : V \to V$ takie, że $\ker\varphi \subset V_1, \mathrm{im}\varphi \subset V_2$.
b) Wykazać, że dla każdego przekształcenia liniowego $\psi : V \to V$ istnieją izomorfizmy $\psi_1 : V \to V$, $\psi_2 : V \to V$ takie, że $\psi = \psi_1 + \psi_2$.

GAL potok 1, kolokwium nr 2, 25.01.2008

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce:
- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Temat B

1. Niech $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $\varphi((1,1)) = (2,1,3)$, $\varphi((1,2)) = (1,1,4)$.
a) Znaleźć wzór na φ i znaleźć macierz przekształcenia φ w bazach $\mathcal{A} = \{(3,2),(1,2)\}$ oraz $\mathcal{B} = \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$.
b) Określić (przez podanie wartości na wybranej bazie) takie przekształcenie liniowe $\psi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, że $\operatorname{im}(\psi \circ \varphi) = \{(0,0)\}$ oraz $\operatorname{im}(\varphi \circ \psi) = \operatorname{lin}((2,1,1))$.

2. Niech $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ będzie przekształceniem liniowym zadanym warunkiem
$M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathrm{st}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, gdzie $\mathcal{B} = \{(0,1),(1,-1)\}$.
a) Znaleźć bazę przestrzeni $\ker(\varphi)$.
b) Niech $\psi_t : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ będzie dane wzorem $\psi_t((x_1,x_2)) = (2x_1+x_2, x_1+2x_2, -x_1+x_2, x_1+tx_2)$. Dla jakich $t \in \mathbf{R}$ przekształcenie $\varphi \circ \psi_t$ jest izomorfizmem?

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & s & s & \dots & s \\ s & 1 & s & \dots & s \\ s & s & 1 & \dots & s \\ \vdots & & & & \vdots \\ s & s & s & \dots & 1 \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$, $B = \begin{bmatrix} 1 & s & s & \dots & s & 1 \\ s & 1 & s & \dots & s & 1 \\ s & s & 1 & \dots & s & 1 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ s & s & s & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{n\times(n+1)}(\mathbf{R})$
a) Obliczyć $\det A$.
b) Dla jakich $s \in \mathbf{R}$ macierz A jest odwracalna? Dla każdego takiego s niech $(y_1,\dots,y_n)$ będzie rozwiązaniem układu równań liniowych o macierzy B. Obliczyć y_3.

4. Niech $A \in M_{n\times n}(K)$. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:
(i) A jest odwracalna,
(ii) $r(A) = n$,
(iii) $\det A \neq 0$.

5. Niech V będzie n wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbf{R}$.
a) Wykazać, że jeśli V_1, V_2 są podprzestrzeniami przestrzeni V takimi, że $\dim V_1 + \dim V_2 \geq n$, to istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : V \to V$ takie, że $\ker\varphi \subset V_1, \operatorname{im}\varphi \subset V_2$.
b) Wykazać, że dla każdego przekształcenia liniowego $\psi : V \to V$ istnieją izomorfizmy $\psi_1 : V \to V$, $\psi_2 : V \to V$ takie, że $\psi = \psi_1 + \psi_2$.