Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Temat A

1. Niech $w = 3 + i\sqrt{3}$ i niech $D = \{z \in \mathbf{C} \mid Re((1+i)z^3) \leq 0\}$.
a) Przedstawić liczbę w^{101} w postaci $a + bi$ dla $a, b \in \mathbf{R}$.
b) Naszkicować zbiór D. Czy $w \in D$?

2. Niech $s \in \mathbf{R}$ i niech U będzie układem równań w $\mathbf{R}^4$

$$U : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = s^2 + 2s \\ 2x_1 + 5x_2 + (4 - s^2)x_3^6 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + 9x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 2s(s+2)\ . \end{cases}$$

a) Dla $s = 2$ znaleźć rozwiązanie ogólne układu U.
b) Dla jakich $s \in \mathbf{R}$ zbiór rozwiązań układu U jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbf{R}^4$. Odpowiedź uzasadnić.

3. Niech $V = \text{lin}((4,-1,-5,2),(1,1,-1,-1),(1,0,0,-1),(2,1,3,-6)) \subset \mathbf{R}^4$.
a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni V.
b) Znaleźć bazę przestrzeni V zawierającą wektor $(1,-1,0,0)$.

4. Niech $W \subset \mathbf{R}^4$ będzie przestrzenią rozwiązań układu równań

$$U : \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni W.
b) Znaleźć wszystkie wartości $r \in \mathbf{R}$, dla których układ wektorów $(1,0,0,-2)$, $(-2,0,0,r)$ można dopełnić do bazy przestrzeni $\mathbf{R}^4$ wektorami leżącymi w W. Dla każdej takiej wartości r podać przykład otrzymanej w ten sposób bazy przestrzeni $\mathbf{R}^4$.

5. Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $k \leq n+1$ istnieje w V układ liniowo zależny $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ taki, że każdy jego podukład właściwy jest liniowo niezależny.