GAL II, wiosna 2014

Zadania domowe, grupa 14 (wtorkowo–piątkowa, prowadzący H. Toruńczyk).

Na ćwiczeniach 6 VI byłem pod błędnym wrażeniem, że nie są one ostatnie i do części b) i c) zadania 2 z serii 21 jeszcze wrócimy. Daję więc wskazówkę dotyczącą odpowiedniego fragmentu części c): zauważyć, że gdy E jest podprzestrzenią wymiaru $> k - t$, to $E \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$ dla $W := \mathrm{lin}(\mathbf{b}_{s+1}, ..., \mathbf{b}_{s+t})$.

Warto też zauważyć, że założenia $s \leq t$ można się pozbyć, zmieniając w razie potrzeby znak formy f (co powoduje zamianę s z t również w odpowiedzi).

Krótka informacja dotycząca środków kwadryk. Gdy kwadryka X jest zbiorem zer funkcji kwadratowej $f : \mathbb{A} \to \mathbb{F}$, której to funkcji odpowiada w układzie bazowym $\mathcal{A} = (p_0, \mathcal{V})$ wielomian P, to „mapa”, przyporządkowująca każdemu punktowi $p \in \mathbb{A}$ jego ciag współrzędych w układzie $\mathcal{A}$, przeprowadza każdy środek symetrii zbioru X na środek symetrii zbioru $Y := P^{-1}(0)$. Środki symetrii zaś zbioru Y można wyznaczyć, rozwiązując układ równań liniowych, powstały przez przyrównanie do zera wartości wszystkich pochodnych cząstkowych wielomianu P. (Patrz wykład 26, tw.10, str. 60.) Można jednak, zamiast narażać się na omyłki przy układaniu i rozwiazywaniu tego układu, dobrać układ bazowy $\mathcal{A}$ tak, by wielomian P był jednej z dwóch postaci: $\sum_{i=1}^r c_i x_i^2 + x_n$, gdzie $r < n$, lub $\sum_{i=1}^r c_i x_i^2 + c$, gdzie $r \leq n$ i $c_1, ..., c_r \neq 0$. Jeśli równanie jest pierwszego typu, to Y nie ma środków (i przez to X też ich nie ma), a jeśli drugiego, to punkt $[y_1, ..., y_n]$ jest środkiem dla Y wtedy i tylko wtedy, gdy $y_1 = ... = y_r = 0$. (Równoważnie: w tak obranym układzie bazowym $\mathcal{A}$, zbiór środków zbioru X jest w drugim przypadku opisany równaniami $y_1 = ... = y_r = 0$.)

Seria 23 (na piątek 6 VI).

Podsumowanie dyskusji z ćwiczeń. Niech funkcji $f : A \to \mathbb{F}$ odpowiada w układzie $(q_0, (\mathbf{w}_i)_{i=1}^n)$ niezerowy wielomian, proporcjonalny do Q. Możemy wtedy wyciągnąć następujące wnioski odnośnie zbioru $f^{-1}(0)$ miejsc zerowych funkcji f:

a) W układzie $(q_0, (\mathbf{w}_i)_{i=1}^n)$, zbiór ten jest opisany równaniem $Q(\mathbf{y}) = 0$ (tzn. $f(q_0 + \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{w}_i) = 0 \Leftrightarrow Q(y_1, ..., y_n) = 0$).

b) Oznacza to, że przekształcenie F, przyporządkowujące każdemu punktowi p jego ciąg współrzędnych $\mathbf{y}$ w układzie $(q_0, (\mathbf{w}_i)_{i=1}^n)$, przeprowadza $f^{-1}(0)$ na $Q^{-1}(0)$. (Przekształcenie, o którym mowa, jest zdefiniowane wzorem $F(q_0 + \sum_i y_i \mathbf{w}_i) = (y_1, ..., y_n)$; jest ono izomorfizmem rozważanej przestrzeni afinicznej A na przestrzeń $\mathbb{F}^n$.)

Uwaga: na ogół, Q i $(q_0, (\mathbf{w}_i)_{i=1}^n)$ otrzymuje się przez wzięcie wpierw wielomianu P, odpowiadającego f w przypadkowym układzie bazowym $(p_0, (\mathbf{v}_i)_{i=1}^n)$, a następnie przeprowadzenie P odpowiednim podstawieniem $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{v}$ w wielomian proporcjonalny do „prostego” wielomianu Q. Układ $(q_0, (\mathbf{w}_i)_{i=1}^n)$ jest wtedy zadany jak opisano na następnej stronie: $\mathbf{w}_i = \mathbf{C}\mathbf{v}_i$, zaś q_0 jest punktem, którego ciągiem współrzędnych w wyjściowym układzie $(p_0, (\mathbf{v}_i)_{i=1}^n)$ jest $\mathbf{v}$. W przypadku rozważanym na ćwiczeniach, gdy $A = \mathbb{F}^n$, $p_0 = \mathbf{0}$ i $\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$, wyliczenie układu $(q_0, (\mathbf{w}_i)_{i=1}^n)$ jest szczególnie proste –otrzymujemy bowiem $q_0 = \mathbf{v}$, a $\mathbf{w}_j = \mathbf{C}\mathbf{e}_j$ jest j–tą kolumną macierzy $\mathbf{C}$.

1. Sprawdzić umiejętność rozwiązania zadania 3 na str. 80 w [Koźn].

2. To samo z zadaniem 4 na str. 81.

3. To samo z zadaniem 1 na str. 86. (Proszę korzystać z tabeli równań krzywch stożkowych, zamieszczonej w Wykładzie 25 na str. 58.)

4. Wywieszam trzy zestawy zadań egzaminacyjnych z ubiegłych lat – być może będą Państwo mieli pytania z nimi związane.

Proszę pamiętać też o nierozwiązanych zadaniach zaległych, przede wszystkim o zadaniu 2 z serii 21! (Rozwiązanie części d) wymaga pomysłu z dowodu twierdzenia o bezwładności – proszę przemyśleć ten dowód.)

Seria 22 (na wtorek 3 VI).

Przypomnienie. Pojęcie funkcji wielomianowej stopnia $n \leq 2$ przenosi się na przypadek, gdy jest ona określona na przestrzeni afinicznej: wtedy w układzie bazowym $\mathcal{A} = (p_0; (\mathbf{v}_i)_{i=1}^k)$ funkcji f odpowiada wielomian P taki, że $f(p_0 + \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{v}_i) = P(c_1, ..., c_k)$ dla $c_1, ..., c_k \in \mathbb{F}$. (I odwrotnie, gdy te zależności zachodzą, to wielomianowi P odpowiada w układzie $\mathcal{A}$ funkcja f, którą dr. Strojnowski oznacza przez $P_{\mathcal{A}}$.)

Nie można jednak mówić o formie (liniowej czy kwadratowej) na przestrzeni afinicznej, bo to, czy P jest taką formą, zależy nie tylko od f, lecz i od układu bazowego $\mathcal{A}$.

Odnotujmy, że gdy funkcji f odpowiada w układzie bazowym $\mathcal{A} = (p_0, (\mathbf{v}_i)_{i=1}^k)$ wielomian P, to w układzie $\mathcal{B} = (q_0, (\mathbf{w}_i)_{i=1}^k)$ odpowiada jej wielomian Q, otrzymany z P przez podstawienie niewiadomych (zmiennych) $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{v}$, związane z przejściem od współrzędnych względem układu $\mathcal{A} = (p, \mathcal{V})$ do współrzędnych względem układu $\mathcal{B} = (q, \mathcal{W})$ –tzn. $\mathbf{C} = M(I)_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$ i $\mathbf{v}$ jest ciągiem współrzędnych wektora $\overrightarrow{p_0 q_0}$ w bazie $\mathcal{V}$. Dla każdego bowiem punktu p mają bowiem zachodzić zależności $P(\mathbf{x}) = f(p) = Q(\mathbf{y})$, gdzie $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ to ciągi współrzędnych punktu p w układach $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, odpowiednio, a te pozostają w opisanej zależności $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{v}$; patrz niżej.

1. Uzasadnić prawdziwość ostatniego zdania, tzn. to, że jeśli $p = p_0 + \sum_i x_i \mathbf{v}_i = q_0 + \sum y_i \mathbf{w}_i$, to zachodzi powyższa zależność między $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^k$ i $\mathbf{y} = (y_i)_{i=1}^k$.

Proszę pamiętać też o nierozwiązanych zadaniach zaległych!

Zadania pisemne (porcja 14, na środę, 4 VI, godz. 14.15.)

35P Przy oznaczeniach zadania 34P,
a) Znaleźć bazę diagonalizującą dla formy $\det : \mathcal{M}_2 \to \mathbb{R}$.
b) Znaleźć bazę diagonalizującą dla formy $\det_{|V_0} : V_0 \to \mathbb{R}$.

c) Znaleźć bazę diagonalizującą dla formy $q_{|V_0} : V_0 \to \mathbb{R}$, gdzie $q(\mathbf{A}) := \operatorname{tr}(\mathbf{A}^2)$; wyznaczyć też rząd i indeksy bezwładności tej formy.

36P We współrzędnych $x_1, ..., x_k$ względem standardowego układu bazowego $(\mathbf{0}; \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_k)$, funkcja f jest zadana poniższym wzorem. Wyrazić ją we współrzędnych $y_1, ..., y_k$ względem układu $(q_0; \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k)$, jeśli (por. zadanie 6.4.19 a),b) w [Kostr] i 2, str. 71 w [Koźn]):

a) $f(x_1, ..., x_k) = \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_{i+1} = 2\sum_{i=1}^{k} x_i,\ q_0 = [1, ..., 1]$ i $\mathbf{w}_i = \mathbf{e}_i$ dla $i = 1, ..., k$.

b) $f(x_1, ..., x_k) = \sum_{1 \le i < j \le k} x_i x_j + 2x_1 + 1,\ q_0 = [0, 1, ..., 1]$ i $\mathbf{w}_i = \mathbf{e}_i$ dla $i = 1, ..., k$.

c) $k = 3,\ f(\mathbf{x}) = x_1^3 + 2x_1^2 x_3 - 4x_2^2 x_3^5 - 7,\ q_0 = [2, 1, 3], \mathbf{w}_1 = (1, 1, 0), \mathbf{w}_2 = (0, 3, 1), \mathbf{w}_3 = (0, 1, 0)$.

37P (na bazie zadania z kolokwium). Niech $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ będzie przestrzenią liniową euklidesową, zaś $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ będą jej bazami.

a) Przy założeniu ortonormalności obu baz $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ udowodnić, że operator liniowy $L : V \to V$ jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $M(L)_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}$ jest ortogonalna.

b) Przy założeniu ortonormalności bazy $\mathcal{V}$ udowodnić, że baza $\mathcal{W}$ jest też taka wtedy i tylko wtedy, gdy macierz zmiany baz $M(I)_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$ jest ortogonalna.

Seria 21 (na wtorek 27 V).

Przypomnienie. Zakładam, że znane jest z wykładu pojęcie wielomianu stopnia ≤ 2, w tym formy liniowej czy kwadratowej (wszystko kilku zmiennych, o współczynnikach w danym ciele). Funkcja f na przestrzeni wektorowej V, o wartościach w ciele skalarów $\mathbb{F}$ przestrzeni V, nazywana jest wielomianową stopnia $\le n$, jeśli istnieje taki wielomian $P \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_k]_n$, gdzie $k = \dim V$, oraz baza $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k)$ przestrzeni V, że $f(c_1\mathbf{b}_1 + ... + c_k\mathbf{b}_k) = P(c_1, ..., c_k)$ dla $c_1, ..., c_k \in \mathbb{F}$. Mówimy wtedy, że w bazie $\mathcal{B}$ wielomian P odpowiada funkcji f, i odwrotnie (funkcja odpowiada wielomianowi). Można zależność między f i P zapisać tak: $f(\mathbf{v}) = P([\mathbf{v}]_{\mathcal{B}})$ dla $\mathbf{v} \in V$, gdzie przez $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ oznaczyłem ciąg współrzędnych wektora $\mathbf{v}$ w bazie $\mathcal{B}$. (Jest to taki ciąg $(c_1, ..., c_k)$, że $\mathbf{v} = \sum_i c_i\mathbf{b}_i$).) Gdy $1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} \ne 0_{\mathbb{F}}$, to funkcji wielomianowej f może odpowiadać w danej bazie $\mathcal{B}$ tylko jeden wielomian stopnia ≤ 2. Gdy wielomian ten jest formą (liniową wgl. kwadratową), to i o f mówimy, że jest taką formą. Formy liniowe nazywamy też jednorodnymi funkcjami liniowymi, a kwadratowe – 2-jednorodnymi funkcjami kwadratowymi. Definicje te są poprawne, tzn. nie zależą od bazy $\mathcal{B}$ (choć wielomian P od zależy od bazy).

Gdy f jest formą kwadratową, to wielomian P można zapisać w postaci $\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}x_i x_j$, dbając przy tym o to, by macierz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ była symetryczna. Macierz tę nazywamy macierzą formy f w bazie $\mathcal{B}$ (jest ona jedyna). Dla $\mathbf{v} \in V$ mamy więc $f(\mathbf{v}) = \mathrm{c}^{\mathrm{t}}\mathbf{A}\mathrm{c}$, gdzie $\mathrm{c} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ to ciąg współrzędnych wektora $\mathbf{v}$ w bazie $\mathbf{B}$, zapisany jako kolumna. Rzędem formy f i jej indeksami bezwładności nazywamy rząd i indeksy bezwładności macierzy $\mathbf{A}$. (Nie zmienią się one, gdy zmienimy bazę, choć zmieni się macierz $\mathbf{A}$.)

Niżej zakładamy, że $1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} \neq 0$.

1. Niech $q : V \to \mathbb{F}$ będzie formą kwadratową i przyjmijmy $h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \frac{1}{4}(q(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - q(\mathbf{v} - \mathbf{w}))$ dla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. (Użyty wzór jest motywowany zadaniem 2 w seriii 14.)

a) Udowodnić, że h jest dwuliniową funkcją symetryczną i $h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = q(\mathbf{v})$ dla $\mathbf{v} \in V$.

b) Udowodnić, że macierz formy q w bazie $\mathcal{B}$ jest macierzą Grama $G(h, \mathcal{B})$ funkcji h i bazy $\mathcal{B}$. (Wskazówka: oznacza to, że $\sum_{i,j} c_i c_j h(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = q(\sum_i c_i \mathbf{b}_i)$.)

Uwaga 1. Tak więc forma kwadratowa $q : V \to \mathbb{F}$ jest wzorem $q(\mathbf{v}) = h(\mathbf{v}, \mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in V$, wyznaczona przez (dokładnie jedną) symetryczną funkcję dwuliniową $h : V \times V \to \mathbb{F}$. Ponadto, z zadania wynika, że <u>gdy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}'$ są macierzami tej samej formy q w bazach $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$</u>, odpowiednio, <u>to $\mathbf{A}' = \mathbf{C}^t\mathbf{A}\mathbf{C}$, gdzie $\mathbf{C} := M(Id)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$</u> (bo tak zmienia się macierz Grama funkcji dwuliniowej h, patrz Wykład 12, twierdzenie 12.1). A że $\mathbf{A} = \mathbf{C}^t\mathbf{D}\mathbf{C}$ dla pewnej macierzy nieosobliwej $\mathbf{C}$ i diagonalnej $\mathbf{D}$, więc <u>macierz formy q jest diagonalna w bazie $\mathcal{B}'$ zdefiniowanej tak, by $M(Id)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = \mathbf{C}$</u>. Zauważmy, że $q(\mathbf{v}) = \sum_i d_{ii} x_i^2$, gdzie $x_1, ..., x_k$ to współrzędne wektora $\mathbf{v}$ w tej **diagonalizującej** bazie $\mathcal{B}'$. Gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, to można uzyskać, by $d_{ii} \in \{0, 1, -1\}\ \forall i$.

2. Niech $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ i macierz formy q w bazie $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_i)_{i=1}^k$ będzie diagonalna, mająca na przekątnej s jedynek, t minus jedynek i $k - s - t$ zer. Dowieść, że:

a) Istnieje s–wymiarowa (odp. t–wymiarowa) podprzestrzeń przestrzeni V, na której q jest dodatnio (odp. ujemnie) określona; jest nią $\mathrm{lin}(\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_s)$ (odp. $\mathrm{lin}(\mathbf{b}_{s+1}, ..., \mathbf{b}_{s+t})$).

b) Gdy $s \leq t$, to istnieje $k - t$–wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni V, na której q jest zerowa; jest nią $\mathrm{lin}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_{s+1}, ..., \mathbf{b}_s + \mathbf{b}_{2s}, \mathbf{b}_{s+t+1}, ..., \mathbf{b}_k)$.

c)* Nie istnieją podprzestrzenie wyższego wymiaru o wymienionych własnościach.

3. Niech $P \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_k]$. Udowodnić, że P jest formą liniową wtedy i tylko wtedy, gdy $P(t\mathbf{v}) = tP(\mathbf{v})$ dla $x \in \mathbb{F}^k$ i $t \in \mathbb{F}$ (jednorodność). Natomiast P jest formą kwadratową wtedy i tylko wtedy, gdy $P(t\mathbf{v}) = t^2 P(\mathbf{v})$ dla $x \in \mathbb{F}^k$ i $t \in \mathbb{F}$ (2–jednorodność).

<u>Zadania pisemne</u> (porcja 13, na środę, 29 V, godz. 14.15.)

33P Zadanie 3, str. 71, w skrypcie [Ko].

34P (15p.) Na przestrzeni V wszystkich 2×2–macierzy rzeczywistych określamy funkcję $\det : V \to \mathbb{R}$, przyporządkowującą każdej macierzy $\mathbf{A} \in V$ jej wyznacznik.

a) Zbadać, czy funkcji tej w bazie $\mathcal{E} = (\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22})$ odpowiada wielomian, a jeśli tak, to jaki. Na tej podstawie wyjaśnić, czy det jest formą kwadratową i jaka jest jej macierz w bazie $\mathcal{E}$. (Tu, $\mathbf{E}_{ij}$ to macierz, której ij–tym wyrazem jest 1, a pozostałe wyrazy są zerami.)

b) Dla $\det : V \to \mathbb{R}$ znaleźć rząd i indeksy bezwładności.

c) Znaleźć rząd i indeksy bezwładności funkcji $\det_{|V_0}$, gdzie $V_0 := \{\mathbf{A} \in V : \mathbf{A} = \mathbf{A}^t\}$.

Seria 20 (na wtorek 20 V).

Jeszcze o zadaniu 28P. Być może taki schemat przedstawienia rozwiązania będzie bardziej zgodny z wcześniejszą dyskusją. Przypuśćmy, że szukamy izometrii $f : E^3 \to E^3$, przeprowadzającej prostą ℓ na ℓ', a punkt $p \notin \ell$ na punkt p'. Gdy przez q oznaczyć rzut ortogonalny punktu p na prostą ℓ, a przez q' rzut ortogonalny p' na ℓ', to jak zauważyliśmy, musi zachodzić $f(q) = q'$ i wobec tego $d(p, q) = d(p', q')$. Niech więc $d(p, q) = d(p', q')$ (w zadaniu 28P warunek ten nie był spełniony), i oznaczmy tę wspólną odległość przez d. Odnotujmy, że pochodna $L = Df$ szukanej izometrii f musi spełniać warunek $L\mathbf{v} = \mathbf{v}'$, gdzie $\mathbf{v} := q - p$ i $\mathbf{v}' := q' - p'$. Wybierzmy też wektor kierunkowy $\mathbf{w}$ prostej ℓ, długości 1, i takiż wektor $\mathbf{w}'$ dla prostej ℓ'. Skoro $f(\ell) = \ell'$, to $L\mathbf{w} = \pm\mathbf{w}'$ (bo $L\mathbf{w}$ musi być wektorem kierunkowym dla ℓ', i to równej mu długości). Uzupełnijmy też układ $(\frac{1}{d}\mathbf{v}, \mathbf{w})$ do ortonormalnej bazy $\mathcal{B} = (\frac{1}{d}\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{h})$ przestrzeni E^3, i tak samo utwórzmy bazę ortonormalną $\mathcal{B}' = (\frac{1}{d}\mathbf{v}', \mathbf{w}', \mathbf{h}')$. (Czynnik $\frac{1}{d}$ ma na celu unormowanie wektorów.) Ponieważ $L\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ i $L\mathbf{w} = \pm\mathbf{w}'$, to $L\mathbf{h} = \pm\mathbf{h}'$ (bo L przeprowadza układ ortonormalny $\mathcal{B}$ na układ ortonormalny.) Tak więc $M(L)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \delta)$, gdzie $\varepsilon = \pm 1$ i $\delta = \pm 1$. By wyznaczyć $M(L)_{st}^{st}$ (gdy $E^3 = \mathbb{R}^3$) wykorzystujemy to, że macierze przejścia $M(Id)_{\mathcal{B}}^{st}$ i $M(Id)_{\mathcal{B}'}^{st}$ wypisać jest łatwo (dlaczego?), a macierze $M(Id)_{st}^{\mathcal{B}}$ i $M(Id)_{st}^{\mathcal{B}'}$ otrzymujemy przez transponowanie poprzednich (bo $\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}^t$ dla macierzy ortogonalnych $\mathbf{X}$). W ten sposób wyznaczymy macierz $M(L)_{st}^{st}$, przy czym zależy ona od wyboru $\varepsilon = \pm 1$ i $\delta = \pm 1$: każdemu z 4 wyborów odpowiada macierz ortogonalna, którą oznaczymy $\mathbf{A}_{\varepsilon,\delta}$, oraz przekształcenie ortogonalne $L_{\varepsilon,\delta}$, zadane wzorem $L_{\varepsilon,\delta}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_{\varepsilon,\delta}\mathbf{x}$ (mnożenia tej macierzy przez kolumnę zmiennych). Każdej zaś izometrii liniowej $L_{\varepsilon,\delta}$ odpowiada izometria afiniczna $f_{\varepsilon,\delta}$, zadana wzorem $f_{\varepsilon,\delta}(p + \mathbf{x}) = p' + L_{\varepsilon,\delta}(\mathbf{x})$.

Otrzymane 4 izometrie $f_{\varepsilon,\delta}$ są różne, bo ich pochodne $L_{\varepsilon,\delta}$ różnie działają na któryś z wektorów $\mathbf{w}, \mathbf{h}$. Twierdzimy, że każda z nich spełnia żądane warunki. Istotnie, z końcowego wzoru wynika przy $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, że $f_{\varepsilon,\delta}(p) = p'$, a przy $\mathbf{x} = \mathbf{v}$ –że $f_{\varepsilon,\delta}(q) = q'$. Wreszcie, równości $f_{\varepsilon,\delta}(q) = q'$ i $L_{\varepsilon,\delta}(\mathbf{w}) = \pm\mathbf{w}'$ implikują, że $f_{\varepsilon,\delta}(q + t\mathbf{w}) = q' \pm t\mathbf{w}$, więc $f_{\varepsilon,\delta}$ przeprowadza prostą $\ell = q + \mathbb{R}\mathbf{w}$ na prostą $\ell' = q' + \mathbb{R}\mathbf{w}'$.

1. Niech $p = [0, 0, 0]$, $p' = [0, 0, t]$ i $\ell = [0, 1, 0] + \mathbb{R}(1, 0, 0)$, $\ell' = \mathrm{af}\{[1, 1, 1], [2, 2, 2]\}$. Zbadać, dla jakich liczb $t \in \mathbb{R}$ istnieje izometria spełniająca opisane wyżej warunki, i dla którejś z tych liczb t znaleźć wzory na każdą z 4 izometrii $f_{\varepsilon,\delta}$.

2. + W przestrzeni euklidesowej E^4 dane są podprzestrzenie V_i i W_i, $i = 0, ..., 4$, takie, że $V_i \subsetneq V_{i+1}$ i $W_i \subsetneq W_{i+1}$ dla każdego i. Ile istnieje izometrii $f : E^4 \to E^4$ takich, że $f(V_i) = W_i$ dla $i = 0, ..., 4$?

3. W przestrzeni euklidesowej E^n dane są proste ℓ i ℓ'. W zależności od kąta między ich wektorami kierunkowymi zbadać, ile istnieje izometrii przeprowadzających $\ell \cup \ell'$ na $\ell \cup \ell'$, jeśli

a) $n = 2$ i proste te są nierównoległe,

b) $n = 3$ i proste te są skośne.

4. + Niech $f : E^3 \to E^3$ będzie obrotem (wokół prostej). Udowodnić, że $\mathrm{tr}(Df) = 1 + 2\cos\alpha$, gdzie α to kąt obrotu f (zaś tr to ślad operatora).

Seria 19 (na piątek 16 V).

Przypominam, że 16 V odbędą się też zaległe zajęcia (o 16tej).

1. Zadanie 6.3.24 b) i dowolna część zadania 6.3.25 w zbiorze „Zadania z Algebry" pod redakcją A.I. Kostrykina (numeracja wg wydania z 1995r.).

2. a) Ile jest izometrii przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{st})$ takich, że $f(2,0,0) = (1,-1,-1)$ oraz $Df(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ dla każdego $\mathbf{v} \in \mathrm{af}((1,2,1),(1,2,0))$? Dla każdej takiej izometrii, obliczyć $f(8,2,1)$.

b) Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ przekształcenie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dane wzorem $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + sx_2)$, jest izometrią przestrzeni $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, gdzie $\langle (x_1, x_2), (y_1, , y_2) \rangle := x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$?

Zadanie to i 32P są z jednego z wcześniejszych kolokwiów. Wywieszam dwa takie kolokwia.

Zadania pisemne (porcja 12, na wtorek, 20 V, godz. 12.15.)

30P Zadanie 3, str. 30, w skrypcie [Ko].

31P Zadanie 6, str. 31, w skrypcie [Ko].

32P W przestrzeni $\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{st}$ dane są punkty $p_0 = (0,1,1)$, $p_1 = (1,1,2)$, $p_2 = (2,2,1)$. Na krzywej $\{(r^2 - 5, r, 2r^2) : r \in \mathbb{R}\}$ znaleźć punkt q, dla którego objętość czworościanu rozpiętego na p_0, p_1, p_2, q jest najmniejsza. Obliczyć też tę najmniejszą objętość.

Seria 18 (na wtorek 13 V).

Dr. Strojnowski zapowiedział, że kolokwium odbędzie się 23 V i obejmie co następuje:

Własności iloczynów skalarnych; przestrzenie euklidesowe liniowe i afiniczne; izometrie liniowe i afiniczne; przekształcenia samosprzężone; objętość k-wymiarowa; iloczyny wektorowe.

Przypomnienie niektórych partii materiału.

Przez E^n oznaczam przestrzeń euklidesową wymiaru n. Gdzie wygodnie, można o niej myśleć jako o przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym.

Przez $\mathbf{A}_\alpha$ oznaczam macierz o pierwszej kolumnie $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, a drugiej $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$. Przypominam, że jeśli $L : E^2 \to E^2$ jest przekształceniem, którego macierz w pewnej ortonormalnej bazie $\mathcal{B}$ płaszczyzny E^2 jest równa $\mathbf{A}_\alpha$, to jest tak w każdej bazie, która też ma te własności i jest zorientowana zgodnie z $\mathcal{B}$. Przekształcenie L jest wtedy izometrią liniową płaszczyzny E^2; jeśli E^2 zorientujemy zgodnie z bazą $\mathcal{B}$ to powiemy, że obrót jest o kąt α. Macierz postaci $\mathbf{A}_\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ nazywam macierzą obrotu.

Jeśli przekształcenie liniowe $L : E^3 \to E^3$ ma w pewnej ortonormalnej bazie $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ macierz równą $\operatorname{diag}(\mathbf{A}_\alpha, 1)$, to L nazywamy obrotem liniowym wokół osi $\mathbb{R}\mathbf{b}_3$, zgodnym z orientacją plaszczyzny $\mathbf{b}_3^\perp = \operatorname{lin}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$, wyznaczoną przez bazę $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ tej płaszczyzny.

Twierdzenie 17.6 z wykładu orzeka dla $n = 2$, że dla każdej liniowej izometrii $L : E^2 \to E^2$ istnieje taka ortonormalna baza $\mathcal{B}$ płaszczyzny E^2, że $M(L)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ jest macierzą obrotu lub macierzą $\operatorname{diag}(1, -1)$. Natomiast dla $n = 3$ twierdzenie to mówi, że dla każdej liniowej izometrii $L : E^3 \to E^3$ istnieje taka ortonormalna baza $\mathcal{B}$ przestrzeni E^3, że $M(L)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ jest postaci $\operatorname{diag}(\mathbf{A}, \pm 1)$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą obrotu.

Stąd wynika, że każda izometria liniowa L płaszczyzny E^2 jest obrotem wokół zera (gdy $\det(L) > 0$) lub jest symetrią ortogonalną względem prostej, przechodzącej przez 0 (gdy $\det(L) < 0$). Natomiast każda izometria liniowa L przestrzeni E^3 jest obrotem wokół prostej przechodzącej przez 0 (gdy $\det(L) > 0$) lub jest złożeniem takiego obrotu z symetrią ortogonalną wzdłuż osi obrotu (czyli względem płaszczyzny, prostopadłej do tej osi; wówczas $\det(L) < 0$).

Poniżej $L : E^n \to E^n$ jest izometrią liniową, zaś $f = L + \mathbf{u}$ izometrią afiniczną (tu $\mathbf{u} \in E^n$).

1. a) Niech $n = 2$ i $L \neq Id$ będzie obrotem wokół 0. Dowieść, że $f = L + \mathbf{u}$ ma jedyny punkt stały p_0 (tzn. taki, że $f(p_0) = p_0$). Zauważyć, że $f(p_0 + \mathbf{v}) = p_0 + L(\mathbf{v})$ dla $\mathbf{v} \in T(E^2) = E^2$, tzn. f jest obrotem wokół p_0.

b) Niech nadal $n = 2$ i L będzie symetrią, a $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ bazą ortonormalną, dla której $M(L)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(-1, 1)$. W bazie tej, f zapisuje się wzorem $f(x, y) = (-x+c, y+d)$, gdzie c i d to współrzędne wektora $\mathbf{u}$ w tej bazie. Dowieść, że w układzie bazowym $([c/2, 0], \mathcal{B})$ zapisuje się ono wzorem $f(x, y) = (-x, y + d)$. (Mówimy więc, że f jest **symetrią z poślizgiem wzdłuż osi symetrii.**)

c) Odnotować, że $p = [c/2, 0]$ (współrzędne w bazie $\mathcal{B}$) jest w b) jedynym punktem prostej $\mathbb{R}\mathbf{b}_1$, dla którego $\pi f(p) = p$, gdzie π to rzutowanie ortogonalne na tę prostą. Ponadto, dla każdego punktu $q \in E^2$, średnia $\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}f(q)$ leży na osi symetrii.

2. a) Niech teraz $n = 3$ i $L = Df$ ma w bazie ortonormalnej $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ macierz $\operatorname{diag}(\mathbf{A}, \varepsilon)$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą obrotu, różną od $\pm\mathbf{I}_2$, zaś $\varepsilon = \pm 1$. Dowieść, że:

a) $\mathbf{b}_3$ jest jedynym wektorem własnym dla $L = Df$, odpowiadającym wartości własnej ε.

b) W układzie bazowym $(\mathbf{0}, \mathcal{B})$, przekształcenie f jest zadane wzorem $f(x,y,z) = (\mathbf{A}(x,y)^t + (c,d)^t)$, gdzie c, d, e to współrzędne (w bazie $\mathcal{B}$) wektora $\mathbf{u}$.

b) Istnieje jedyny punkt p płaszczyzny $\Pi := \mathbf{b}_3^\perp$ taki, że $\pi f(p) = p$, gdzie π to rzutowanie ortogonalne na Π. W układzie bazowym $(p, \mathcal{B})$, przekształcenie f zapisuje się jak w b), lecz z $c = d = 0$.

c) Gdy wyżej $\varepsilon = -1$, to po zastąpieniu w b) punktu p przez $p' = [e/2, 0, 0]$ (współrzędne w układzie bazowym $(p, \mathcal{B})$) uzyskujemy nawet $c = d = e = 0$.

Uwaga 1. W związku z powyższym, gdy $\varepsilon = 1$, to f nazywamy **ruchem śrubowym**, wzdłuż prostej $\ell = p + \mathbb{R}\mathbf{b}_3$, z przesunięciem o wektor $f(p) - p$. Gdy zaś $\varepsilon = -1$, to f jest obrotem wokół ℓ, złożonym z symetrią ortogonalną względem płaszczyzny, prostopadłej do ℓ i przechodzącej przez p'.

Po uzupełnieniu brakujących przypadków (gdy $L = Id$ w zadaniu 2, zaś $\mathbf{A} = \pm\mathbf{I}_2$ w zadaniu 3) uzyskujemy wniosek: *jedynymi izometriami płaszczyzny E^2 są obroty i przesunięcia (te zachowują orientację) oraz symetrie osiowe z poślizgiem (zmieniają one orientację), zaś przestrzeni E^3 – ruchy śrubowe (ruchy te zachowują orientację i obejmują przesunięcia i obroty) oraz symetrie ortogonalne względem płaszczyzny, złożone czy to z obrotem wokół osi ortogonalnej do płaszczyzny symetrii, czy to z przesunięciem równoległym do tej płaszczyzny. (Złożenia te zmieniają orientację.)*

3. + Niech $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k)$ będzie bazą przestrzeni E^k, a $\mathcal{B}' = (\mathbf{b}'_1, ..., \mathbf{b}'_k)$ powstaje z $\mathcal{B}$ przez ortogonalizację Grama – Schmidta. Wówczas baza $\mathcal{B}'$ jest zorientowana zgodnie z $\mathcal{B}$, tzn. macierz $M(Id)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ ma dodatni wyznacznik.

4. Niech L będzie izometrią liniową liniowej przestrzeni euklidesowej wymiaru n.

a) Dowieść, że każda rzeczywista wartość własna dla L ma moduł 1. (Jest tak i dla wartości zespolonych, ale to trudniejsze.)

b) Dowieść, że gdy $n \in 2\mathbb{Z}$ i $\det(L) < 0$, to $L(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ dla pewnego $\mathbf{v} \neq 0$.

c) Dowieść, że gdy $n \in 2\mathbb{Z} + 1$ i $\det(L) > 0$, to $L(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ dla pewnego $\mathbf{v} \neq 0$.

(Wskazówka: rozumowania z ćwiczeń.)

<u>Zadania pisemne (porcja 11, na środę 14 V, godz. 14.)</u> Poniżej, $\mathbb{R}^3$ rozpatrujemy ze standardowym iloczynem skalarnym.

27P Opisać wzorem, we współrzędnych kartezjańskich, obrót $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wokół prostej $\ell = [0,1,0] + \mathbb{R}(1,-1,1)$ o $2\pi/3$, gdy orientację płaszczyzny $(1,-1,1)^\perp$ zadać bazą $((-1,0,1),(1,1,0))$. (Uwaga: użyteczne może być zadanie 1.)

28P a) Opisać wzorem dowolna izometrię $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, przeprowadzającą prostą $[0,1,0] + \mathbb{R}(1,0,0)$ na $\mathrm{af}\{[1,1,1],[2,2,2]\}$, zaś punkt $[0,0,0]$ na $[0,0,1]$.

b) Ile istnieje takich izometrii? Każdą z nich opisać wzorem.

29P Rozwiązać ponownie zadanie **25P**, lecz przy iloczynie skalarnym w $\mathbb{R}^3$ zadanym wzorem $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - y_1x_2 + 2x_2y_2 + x_3y_3$. Uzasadnić też, że podany wzór definiuje iloczyn skalarny.

Seria 17 (na wtorek 6 V).

Przypomnienie i uzupełnienie dyskusji z ćwiczeń.

Gdy A i B są warstwami w przestrzeni V, wyposażonej w iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle$, i interesuje nas wyznaczenie $\mathbf{a} \in A$ i $\mathbf{b} \in B$ dla których $\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| = \operatorname{dist}(A, B)$, to można to zrobić korzystając z warunków $\mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B, \mathbf{a} - \mathbf{b} \in (T(A))^\perp \cap (T(B))^\perp$. Gdy chodzi o wyznaczenie tylko $\operatorname{dist}(A, B)$, wystarczające może być zadanie 3b) poniżej.

1. Dowieść, że rzutowanie ortogonalne na podprzestrzeń afiniczną spełnia warunek Lipschitza: $||P(\mathbf{v}) - P(\mathbf{w})|| \leq ||\mathbf{v} - \mathbf{w}||$ dla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, gdzie P to rzutowanie.

2. Przyjmijmy $\mathbf{v}' = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}$ dla $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. (Przekształcenie $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}'$ nazywane jest **inwersją** względem sfery $\|\mathbf{v}\| = 1$.) Dowieść, że $\|\mathbf{v}' - \mathbf{w}'\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|/\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$.

3. a) Dowieść, że $\operatorname{dist}(\mathbf{a} + K, \mathbf{b} + L) = \operatorname{dist}(\mathbf{a} - \mathbf{b}, L - K)$ dla $K, L \subset V$ i $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$. (Przyjmujemy tu $X \pm Y := \{\mathbf{x} \pm \mathbf{y} : \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y\}$ dla $X, Y \subset V$.

b) Gdy A i B są warstwami w V względem podprzestrzeni liniowych A_0 i B_0, odpowiednio, to dla $\mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B$ ma miejsce równość $\operatorname{dist}(A, B) = \|\mathbf{a}-\mathbf{b}-P(\mathbf{a}-\mathbf{b})\|$, gdzie P to rzutowanie ortogonalne na $A_0 - B_0$.

4. (przygotowawcze) Niech macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ mają tę własność, że dla każdego $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$ wektor $\mathbf{Bv}$ jest proporcjonalny do $\mathbf{Av}$. Dowieść, że $\mathbf{B} = \lambda\mathbf{A}$ dla pewnego skalara λ.

5. * Niech $g, h : V \times V \to \mathbb{F}$ będą funkcjami dwuliniowymi. (Tu, V jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$, skończonego wymiaru.) Dowieść, że jeśli $h(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0$ dla wszystkich $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$ takich, że $g(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0$, to $h = \lambda g$ dla pewnego skalara λ. (Wskazówka: przy $V = \mathbb{F}^k$ użyteczne może być powyższe zadanie.)

Zadania pisemne (porcja 10, na środę 7 V, godz. 14.)

24P W przestrzeni euklidesowej $V = \mathbb{R}^5$, ze standardowym iloczynem skalarnym, rozważamy następujące podprzestrzenie afiniczne:

$A = (-4, 3, -3, 2, 4) + \operatorname{lin}\{(2, 0, 1, 1, 1), (-5, 1, 0, 1, 1)\}$

B jest zadana układem równań $x_1-2x_2+x_3-x_4+3x_5 = 6,\ x_1-x_3-x_4+3x_5 = 0$. Wyznaczyć $\operatorname{dist}(A, B)$ oraz takie $\mathbf{a} \in A$ i $\mathbf{b} \in B$, że $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \operatorname{dist}(A, B)$.

25P W przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{st})$ rozważmy płaszczyznę M, opisaną równaniem $x_1 - x_2 + x_3 = 3$, oraz prostą $L = [0, 1, 1] + \mathbb{R}(-1, 1, 0)$.

a) Znaleźć przedstawienia parametryczne i) prostej, będącej obrazem prostej L przy rzutowaniu ortogonalnym na M, oraz ii) prostej, będącej obrazem prostej L przy symetrii ortogonalnej względem M.

b) Znaleźć równanie płaszczyzny, która zawiera prostą L i jest prostopadła do M.

26P Niech $L(x,y,z) = (y+2z, x+2z, 2x+2y+3z)$ dla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Znaleźć bazę $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, która jest ortogonalna względem standardowego iloczynu skalarnego i diagonalizuje operator L (tzn. macierz $M(L)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ jest diagonalna). (Wskazówka: jedną z wartości własnych operatora L jest 5.)

Uwaga: Zadań takich, jak ostatnie, jeszcze nie omawialiśmy. Odpowiedni materiał był przedstawiony na wykładzie 18, twierdzenie 5. Bazę $\mathcal{B}$ należy konstruować jak każdą bazę diagonalizującą, lecz bazę każdej podprzestrzeni własnej należy poddać ortogonalizacji.

Seria 16 (na wtorek 29 IV).

Przypomnienie i uzupełnienie dyskusji z ćwiczeń.

1. Sposoby wyznaczania rzutu ortogonanego P na podprzestrzeń $W = \mathrm{lin}(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_s)$:

a) Ortogonalizujemy układ $(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_s)$ metodą G-S, otrzymując ortogonalny układ $(\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_s)$, rozpinający W. Rzut $P(\mathbf{v})$ wektora $\mathbf{v}$ wyraża sie wzorem $\mathbf{v} = \sum \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_i \rangle}{\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle} \mathbf{b}_i$, gdzie sumowanie jest po wszystkich $\mathbf{b}_i \neq 0$. (Zerowe wektory $\mathbf{b}_i$ mogą się zdarzyć, gdy wyjściowy układ $(\mathbf{w}_i)_{i=1}^s$ jest liniowo zależny.)

b) Można uniknąć ortogonalizowania układu $(\mathbf{w}_i)$, w oparciu o następującą obserwację: wektor $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^s t_i \mathbf{w}_i$ jest równy $P(\mathbf{v})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(t_1, ..., t_s)$ jest rozwiązaniem układu rownań $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą, której ij–ty wyraz jest równy $\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_i \rangle$ $(i, j = 1, ..., s)$, zaś $\mathbf{b}$ jest kolumną, której i–ty wyrazem jest $\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_i \rangle$. (Tu, $i, j = 1, ..., s$.)

Obserwację tę uzasadniamy następująco: $\mathbf{w}$ jest rzutem ortogonalnym wektora $\mathbf{v}$ wtedy i tylko wtedy, gdy wektor $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ jest ortogonalny do W, co ma miejsce wtedy i tyko wtedy, gdy $\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp \mathbf{w}_i \forall i = 1, ..., s$. (Jest tak, bo $W = \mathrm{lin}(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_s)$.) Ponieważ $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^s t_j \mathbf{w}_j$, więc nietrudno się przekonać, że poprzedni warunek jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $(t_1, ..., t_s)$ jest rozwiązaniem opisanego wyżej układu równań. (Rozwiązań może być dużo, ale wszystkie dadzą ten sam wektor $\sum_j t_j \mathbf{w}_j$.)

c) Warto pamiętać, że rzut P i rzut ortogonalny Q na $W^\perp$ związane są równością $P + Q = I_V$. Niekiedy, np. gdy $W^\perp$ jest małego wymiaru, Q wyznacza się dość łatwo kórymś z powyższych sposobów, co pozwala przyjąć $P(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - Q(\mathbf{v})$ dla $\mathbf{v} \in V$. Np. gdy $\dim(W^\perp) = 1$, to $W^\perp = \mathbb{R}\mathbf{w}$ dla pewnego $\mathbf{w} \in V$, skąd rzut Q wyznacza się wzorem $Q(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle} \mathbf{w}$, a rzut P – wzorem $P(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle} \mathbf{w}$.

2. Gdy wyżej $V = \mathbb{R}^n$, iloczyn skalarny jest standardowy i W jest zadane w postaci uwikłanej układem równań $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, to przestrzeń $W^\perp$ jest powłoką liniową wierszy macierzy $\mathbf{A}$. Wtedy też łatwiej jest wpierw wyznaczyć rzut ortogonalny Q na $W^\perp$, bo znamy układ generatorów przestrzeni $W^\perp$, a dla W dopiero musielibyśmy go znaleźć.

3. Na rzut ortogonalny P można też patrzeć jak na zwykły rzut liniowy na podprze-

strzeń iniową W, w tym przypadku wzdłuż podprzestrzeni $W^{\perp}$. Pozwala to mówić też o rzucie ortogonalnym (tzn., nadal wzdłuż $W^{\perp}$) na warstwę $W' = W + \mathbf{w}_0$. (O rzutach na podprzestrzeń afiniczną wzdłuż podprzestrzeni liniowej była mowa wcześniej, m.in. na kolokwium.) Możemy też mówić o symetrii ortogonalnej względem podprzestrzeni afinicznej (czyli względem warstwy). W tym kontekście rzutowaną przestrzeń V traktuje się jako przestrzeń afiniczną, a jej elementy nazywane są punktami.

Zadania pisemne (seria 9, na środę 30 IV.)

21P Przestrzeń $\mathbb{R}[x]$ wszystkich wielomianów rzeczywistych rozpatrujemy z iloczynem skalarnym $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

a) Znaleźć wielomiany, otrzymane z ciągu $1, x, x^2$ przez ortogonalizację Grama-Schmidta.

b) Znaleźć rzut ortogonalny wielomianu x^3 na $H := \operatorname{lin}(1, x, x^2)$, posługując się wpierw wzorem z p. 1a) wyżej, a następnie metodą opisaną w 1b).

c) Wyznaczyć odległość $\operatorname{dist}(x^3, H)$ wielomianu x^3 od podprzestrzeni H.

22P Wyznaczyć rzut ortogonalny $\mathbf{v}$ na H w przestrzeni $(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle_{st})$, gdy

a) $\mathbf{v} = (4, 1, -4, -5)$ i $H = \operatorname{lin}((2, 3, -2, -2), (4, 1, 3, 2))$,

b) $\mathbf{v}$ jest jak wyżej, zaś $H = (3, -2, 1, 5) + \operatorname{lin}((2, 3, -2, -2), (4, 1, 3, 2))$.

23P Wyznaczyć rzut ortogonalny $\mathbf{v}$ na H w przestrzeni $(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle_{st})$, gdy

a) $\mathbf{v} = (2, 1, -3, 4)$ i H jest zbiorem rozwiązań układu równań $2x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 13x_4 = 0, \quad x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$,

b) jak wyżej, lecz prawe strony równań są równe -19 i 1, odpowiednio.

Seria 15 (na piątek 25.IV). Z okazji Świąt nie ma zadań pisemnych–ale „niepisemne" daję, bo odstęp jest 10 dni i potem może brakować czasu. (Raczej będzie tego czasu brakowało, więc proszę w odniesieniu do wszystkich serii, w tym tej, o namysł nad zadaniami – jeśli nawet się ich nie rozwiązało, to już określenie, co sprawia trudność, jest istotne.)

Materiał/ zadania do przemyślenia. Na ćwiczeniach można zgłaszać też rozwiązania nieomawianych jeszcze zadań z wcześniejszych serii. (Omawiane staram się oznaczyć plusem.)

Materiał dotyczący przestrzeni euklidesowych $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, z normą $\|\ \|$.

1. + a) Udowodnić „regułę równoległoboku": $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$

b) Ustalmy $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in V$ i wagi $m_1, ..., m_k \in \mathbb{R}$ ($\sum_i m_i = 1$), i przyjmijmy $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k m_i\|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|^2$ dla $\mathbf{x} \in V$. Dowieść, że przy $\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^k m_i\mathbf{a}_i$ zachodzi $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$; wywnioskować, że funkcja f przyjmuje w $\mathbf{x}_0$ swe minimum.

2. a) Wywnioskować z twierdzenia Pitagorasa, że gdy $\mathbf{w}$ jest rzutem ortogonalnym wektora $\mathbf{v}$ na podprzestrzeń W, to $\|\mathbf{w}\| \le \|\mathbf{v}\|$, a także $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| < \|\mathbf{v} - \mathbf{w}'\|$ dla

$\mathbf{w}' \in W \setminus \{\mathbf{w}\}$. (Liczba $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ jest więc równa **odległości v od** W, zdefiniowanej jako $\inf_{\mathbf{x}\in W} \|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|$.)

b) Dowieść twierdzenia Pitagorasa w takiej wersji: $\| \sum_{i\in I} \mathbf{v}_i\|^2 = \sum_{i\in I} \|\mathbf{v}_i\|^2$ gdy skończony układ $(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$ jest ortogonalny.

c) Wywnioskować z b), że gdy $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{s} c_i\mathbf{b}_i$ jest rzutem ortogonalnym wektora $\mathbf{v}$ na podprzestrzeń $W := \mathrm{lin}(\mathbf{b}_i)_{i=1}^{s}$, gdzie układ $(\mathbf{b}_i)_{i=1}^{s}$ jest ortogonalny, to $\sum_i c_i^2\|\mathbf{b}_i\|^2 \leq \|\mathbf{v}\|^2$. (Nierówność Parsevala.)

d) Jakimi wzorami wyrażają się współczynniki c_i? Dla $s = 1$ uzyskać stąd nierówność CBS: $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}\rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$.

3. Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą rzeczywistą o liniowo niezależnych kolumnach. Dowieść, że $\mathbf{A}$ ma tzw. QR-rozkład: $\mathbf{A} = \mathbf{US}$, gdzie macierz $\mathbf{S}$ jest kwadratowa i górnie trójkątna, o dodatnich wyrazach na przekątnej, zaś $\mathbf{U}$ jest macierzą, której kolumny tworzą układ ortogonalny względem standardowego iloczynu skalarnego na $\mathbb{R}^l$, gdzie l to liczba wierszy macierzy $\mathbf{A}$. (Wskazówka: ortogonalizacja G-S, zastosowana do kolumn.)

Materiał dotyczący form dwuliniowych:

4. Niech $h : V \times V \to \mathbb{R}$ będzie symetryczną formą dwuliniową na rzeczywistej przestrzeni V. Dowieść, że:

a) dla $d = \sigma_+(h)$ istnieje taka d–wymiarowa podprzestrzeń W, że forma $h_{|W\times W}$ jest dodatnio określona;

b) podprzestrzeń taka nie istnieje dla $d > \sigma_+(f)$. (Wskazówka: dowód twierdzenia o bezwładności.)

c)* Dowieść, że jeśli w a) i b) zastąpić dodatnią określoność przez dodatnią półokreśloność, to należy też zastąpić $\sigma_+(h)$ przez $\dim V - \sigma_-(h)$.

Seria 14 (na wtorek 15 IV).

1. + (Pozostało z ćwiczeń.) Dowieść, że $\det \begin{bmatrix} \mathbf{AP} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{A}) \det \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}$ dla kwadratowych macierzy $\begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}$ i $\mathbf{A}$ takich, że iloczyn $\mathbf{AP}$ ma sens. Uzyskać stąd zależność między $\det [\mathbf{P}|\mathbf{Q}]$, $\det \mathbf{A}$ i $\det [\mathbf{PA}|\mathbf{Q}]$ gdy macierze $\mathbf{A}$ i $[\mathbf{P}|\mathbf{Q}]$ są kwadratowe i iloczyn $\mathbf{PA}$ ma sens. (Wskazówka: gdy $\det \mathbf{A} \neq 0$, przedstawić $\mathbf{A}$ jako iloczyn macierzy elementarnych.)

Niżej zakładamy, że $h : V \times V \to \mathbb{F}$ jest fromą dwuliniową, a $q : V \to \mathbb{F}$ -wyznaczoną przez h formą kwadratową (tzn., $q(\mathbf{v}) = h(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ dla $\mathbf{v} \in V$).

2. + Dowieść, że jeśli forma h jest symetryczna, to jest ona przez q wyznaczona „wzorami polaryzacyjnymi” $h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}(q(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - q(\mathbf{v}) - q(\mathbf{w})) = \frac{1}{4}(q(\mathbf{v} + \mathbf{w}) -$

$q(\mathbf{v}-\mathbf{w})$).

3. * + Udowodnić następującą **tożsamość Cauchy'ego**: $q(\mathbf{u})\big(q(\mathbf{u})q(\mathbf{w})-h(\mathbf{u},\mathbf{w})h(\mathbf{w},\mathbf{u})\big) = q\big(q(\mathbf{u})\mathbf{w}-h(\mathbf{u},\mathbf{w})\mathbf{u}\big)$ dla $\mathbf{u},\mathbf{w}\in V$. Wywnioskować, że jeśli $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ i forma h jest symetryczna i dodatnio określona, to zachodzi nierówność CBS: $|h(\mathbf{u},\mathbf{w})|\le\sqrt{q(\mathbf{u})q(\mathbf{w})}$.

Uwaga 1. Zadanie 1 pozwala utożsamić każdą symetryczną formę dwuliniową h z wyznaczoną przez nią formą kwadratową q (bo q pozwala odtworzyć h). Wszystkie pojęcia dotyczące h odnosimy więc wtedy też do q (rząd formy[1], a dla $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ też określoność, półokreśloność, sygnaturę, indeksy bezwładności).

b) Wektor $\mathbf{v}$ taki, że $h(\mathbf{v},\mathbf{v})=0$, nazywany jest **izotropowym** (względem formy symetrycznej h lub wyznaczonej przez nią formy kwadratowej q). Z zadania 2 wynika (jak?), że jeśli symetryczna forma h nie jest zerowa, to pewien wektor nie jest izotropowy.

c) Wektory $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ nazywamy **ortogonalnymi** (względem h), jeśli $h(\mathbf{v},\mathbf{w})=0$.

4. a) Dowieść, że dla $\mathbf{v}\in V$ zbiór $\mathbf{v}^\perp := \{\mathbf{w}\in V : h(\mathbf{v},\mathbf{w})=0\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V. Wywnioskować, że dla $A\subset V$, zbiór $A^\perp := \bigcap_{\mathbf{a}\in A}\mathbf{a}^\perp$ jest podprzestrzenią liniową.

b) Dowieść, że jeśli zbiór A liczy p elementów, to $\dim(A^\perp)\ge\dim(V)-p$ i wywnioskować, że $\dim(V_0^\perp)\ge\dim(V)-\dim(V_0)$ dla każdej podprzestrzeni liniowej V_0 przestrzeni V.

c) * Dowieść, że $\dim(V^\perp)=\dim(V)-\mathrm{rk}(h)$ i wywnioskować, że $(\mathrm{rk}(h)=\dim V)\Leftrightarrow(V^\perp=\{\mathbf{0}\})$. (Formę, spełniającą któryś z tych równoważnych warunków, nazywamy **nieosobliwą**.)

5. (Przypomnienie wykładu.) a) Dowieść, że układ $\mathcal{V}=(\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n)$ jest ortogonalny (tzn. $h(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j)=0$ dla $i\neq j$) wtedy i tylko wtedy, gdy macierz Grama $G(h,\mathcal{V})$ jest diagonalna. Tak więc bazę, którą nazywaliśmy diagonalizującą (dla h) równie dobrze można określać jako ortogonalną (względem h).

c) W oparciu o to i o zadanie 4b) uzasadnić następujący sposób znajdowania bazy $\mathcal{V}$, ortogonalnej względem formy symetrycznej h:

• Jeśli każdy wektor $\mathbf{v}\in V$ jest izotropowy, to $h=0$ i za $\mathcal{V}$ można obrać dowolną bazę.

• W przeciwnym razie obrać wektor nieizotropowy $\mathbf{v}_1$ i uzasadnić, że $V=\mathrm{lin}(\mathbf{v}_1)\oplus\mathbf{v}_1^\perp$; w szczególności, $\dim(\mathbf{v}_1^\perp)=\dim V-1$. Korzystając z założenia indukcyjnego obrać bazę ortogonalną $\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n$ przestrzeni $\mathbf{v}_1^\perp$ i zauważyć, że $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n$ jest szukaną bazą.

Zadania pisemne, porcja 8 (na środę 16 IV, godz. 14).

[1] Jest on zdefiniowany jako rząd macierzy Grama w dowolnej bazie; oznaczamy go $\mathrm{rk}(h)$ czy $\mathrm{rk}(q)$. (Jeśli zmienimy bazę, to macierz Grama zmieni się na kongruentną z wyjściową, a więc mającą ten sam rząd.)

18P=zad. 2 na str. 64 w [TK].

19P=zad. 3 na str. 64 w [TK].

20P=zad. 5 na str. 72 w [TK].

Seria 13 (na piątek 11.IV).

W zadaniach 1 i 2 przemyśleć i umieć uzasadnić następujące własności kongruentności, w większości omawiane na ćwiczeniach:

1. a) Gdy forma dwuliniowa h w pewnej bazie $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_i)_{i=1}^k$ ma diagonalną macierz Grama $G(h, \mathcal{B})$, to $h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_i \lambda_i x_i y_i$ dla $\mathbf{v} = \sum_i x_i \mathbf{b}_i, \mathbf{w} = \sum_j y_j \mathbf{b}_j$, gdzie λ_i oznacza i–ty wyraz przekątnej macierzy $G(h, \mathcal{W})$.

b) Gdy wyżej ciałem skalarów jest $\mathbb{R}$, to $\big(h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$ dla wszystkich $\mathbf{v} \in V \setminus \mathbf{0}\big) \Leftrightarrow \big(\lambda_i > 0$ dla $i = 1, ..., k\big)$, i tak samo przy $>$ zastąpionym przez $\geq$.

2. Niech rzeczywiste, symetryczne macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ stopnia k będą kongruentne. Wówczas:

a) Mają one te same indeksy bezwładności.

b) Jeśli $\mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\mathbf{0}\}$, to $\mathbf{x}^t\mathbf{B}\mathbf{x} > 0$ dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\mathbf{0}\}$, i tak samo przy $>$ zastąpionym przez $\geq$.

Przypominam, że formę h (odp. macierz $\mathbf{A}$) nazywamy dodatnio określoną, jeśli spełnione są ostre nierówności $>$ z części b) odpowiedniego z powyższych zadań, zaś dodatnio półokreśloną, jeśli spełnione są nierówności $\geq$; przy nierównościach $<$ wzgl. $\leq$ mówimy o ujemnej (poł)określoności. Gdy forma czy macierz nie jest półokreślona ani dodatnio, ani ujemnie, nazywamy ją nieokreśloną.

3. Sprawdzić, czy umieją sobie Państwo poradzić z zdaniami 1 i 2 na str. 71 w [TK2].

4. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem.

a) Dowieść, że dla operatora $L \in \mathcal{L}(V, W)$ i dwuliniowej formy $h : W \times W \to \mathbb{F}$, dwuliniowa jest forma $g : V \times V \to \mathbb{F}$, określona wzorem $g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := h(L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2))$.

b) Dowieść, że gdy wyżej $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ i $\mathcal{W} = (\mathbf{w}_j)_{j=1}^l$ są bazami w V i W, odpowiednio, to $G(g, \mathcal{V}) = \mathbf{C}^t G(h, \mathcal{W}) \mathbf{C}$, gdzie $\mathbf{C} := M(L)_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}$.

Seria 12 (na wtorek 8 IV).

Materiał do przemyślenia.

Przypominam, że gdy $h : V \times V \to \mathbb{F}$ jest formą dwuliniową (inaczej: funkcjonałem dwuliniowym), zaś $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ jest układem wektorów z V, to przez $G(h, \mathcal{V})$ oznaczamy $k \times k$–macierz, której ij–tym wyrazem jest $h(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$. (Najczęściej, $\mathcal{V}$ jest bazą dla V.) Gdy $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ są dwiema bazami, to $G(h, \mathcal{W}) = \mathbf{C}^t G(h, \mathcal{V}) \mathbf{C}$, gdzie $\mathbf{C} = M(I)_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$. Na ćwiczeniach wskazaliśmy, jak dla zadanej macierzy symetrycznej $\mathbf{A}$ znaleźć nieosobliwą macierz $\mathbf{C}$ taką, że $\mathbf{D} := \mathbf{C}^t\mathbf{A}\mathbf{C}$ jest macierzą diagonalną. (Wymaga to, by ciało skalarów $\mathbb{F}$ miało charakterystykę różną od 2, co zawsze zakładamy, gdy mowa o formach dwuliniowych i o kongruentności macierzy.) Pozwala to dla każdej symetrycznej formy dwuliniowej h znaleźć „bazę diagonalizującą” $\mathcal{W}$, dla której macierz $G(h, \mathcal{W})$ jest diagonalna.(Należy zacząć od dowolnej bazy $\mathcal{V}$, przyjąć $\mathbf{A} := G(h, \mathcal{V})$, znaleźć $\mathbf{C}$ j.w. i obrać $\mathcal{W}$ tak, by $M(I)^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} = \mathbf{C}$; wtedy $G(h, \mathcal{W}) = \mathbf{D}$.)

Wyżej, macierz diagonalna $\mathbf{D}$ nie jest przez $\mathbf{A}$ jednoznacznie wyznaczona, nawet z dokładnością do kolejności wyrazów na przekątnej. Jednak liczba niezerowych wyrazów tej przekątnej jest wyznaczona jednoznacznie, i jest równa $\mathrm{rk}(\mathbf{A})$ (dlaczego?). Ponadto, gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, to liczba jej dodatnich wyrazów też jest wyznaczona jednoznacznie (jest to tw. Sylvestera o bezwładności; patrz wykład). Różnicę między liczbą dodatnich a ujemnych wyrazów macierzy $\mathbf{D}$ nazywamy sygnaturą macierzy symetrycznej (i rzeczywistej) $\mathbf{A}$. Tak samo określa się sygnaturę dwuliniowej formy symetrycznej na rzeczywistej przestrzeni wektorowej. Gdy sygnatura jest równa rozmiarowi macierzy $\mathbf{D}$ (tzn., wszystkie wyrazy przekątnej są dodatnie), to macierz $\mathbf{A}$ czy formę h nazywamy dodatnio określoną. Dla dodatnio określonej formy h zachodzi $h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$ dla wszystkich $\mathbf{v} \in V \setminus \{0\}$.

W oparciu o tw. Sylvestera nietrudno zauważyć, że dwie symetryczne macierze rzeczywiste (odp. zespolone) są kongruentne wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam rząd i sygnaturę (odp.: ten sam rząd); patrz wykład.

Zadania pisemne, porcja 7 (na środę 9 IV, godz. 14).

15P W zadaniu 2, str. 54 w [TK2], znaleźć wzór na h (we współrzędnych kartezjańskich).

16P=zadanie 8 str. 65 w [TK2]. (Szukaną macierz $\mathbf{C}$ wolno wyrazić jako iloczyn wskazanych macierzy i ich odrotności; mnożenie i wyznaczanie odwrotności można pominąć.)

17P Wyznaczyć sygnaturę i bazę diagonalizującą formy $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gdy
a) $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 + 3x_3y_3$;
b) $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 - x_2y_3 + 3x_3y_1 - x_3y_2 + x_3y_3$.

Seria 11 (na wtorek 1 IV).

Nadal, proszę przemyśleć materiał objęty kolokwium i wcześniejsze zadania, które jeszcze nie dorobiły się „plusa”.

Zadania pisemne, porcja 6 (na środę 2 IV, godz. 14).

Proszę na postawie wykładu iłub notatek na stronie dra Strojnowskiego (Wykład 11), rozwiązać następujące zadania ze skryptu [TK, 2]:

13P=zad. 1 na str. 54.

14P=zad. 2 na str. 54.

Uwaga: gdy mowa o funkcjonałach dwuliniowych, w [TK,2] zakłada się równość przestrzeni V i W oraz baz $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Dlatego $G(h, \mathcal{A})$ jest tym, co w swych notatkach dr. Strojnowski oznacza przez $G(h, \mathcal{A}, \mathcal{A})$.

<u>Seria 10 (na piątek 29.III).</u>

Planuję, by ćwiczenia piątkowe były ostatnimi, które poświęcone są materiałowi objętemu kolokwium 3 IV (tzn. endomorfizmom liniowym, w tym diagonalizowalności i twierdzeniu Jordana, oraz przestrzeniom i przekształceniom afinicznym). Proszę przejrzeć ten materiał i przygotować ewentualne pytania.

W szczególności, jako „zadania do przemyślenia" daję te wcześniejsze zadania, których dotąd nie omawiano (są pozbawione znaku plus). Proszę też sprawdzić, czy nie sprawiają kłopotu zadania 2,3,4 na str. 14-15 w [TK, 2].

<u>Seria 9 (na wtorek 25.III).</u>

1. Kolejne zadania z pliku dra Strojnowskiego Jordan.pdf dotyczą postaci Jordana i jej zastosować. Z tych można wydzielić następujące, zbliżone do już rozwiązywanych: 11, 12, 21, 36 (choć to jest nieco inne), 44, 45, 47, 65–67, 71, 77. Proszę sprawdzić, czy czują się Państo na siłach je rozwiązać; te, które sprawiają kłopot, można zgłaszać na ćwiczeniach.

2. + Dla przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{F}$ i wektorów $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_j \in V$ dowieść równoważności warunków:

a) wektory $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_0$ tworzą układ liniowo niezależny;

b) wektory $(\mathbf{v}_0, 1), ..., (\mathbf{v}_j, 1)$ przestrzeni $V \times \mathbb{F}$ tworzą układ liniowo niezależny.

c) żaden wektor $\mathbf{v}_i$ nie jest <u>afiniczną</u> kombinacją pozostałych wektorów.

(Przypominam, że gdy warunki te są spełnione, to $\mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_j$ nazywamy afinicznie niezależnymi. Ponieważ b) nie zależy od kolejności wektorów $\mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_j$, więc a) –też.)

Nadal, sporo zadań zaległych jest nierozwiązanych!

<u>Zadania pisemne, porcja 5 (na środę 25.III, godz. 14).</u>

10P. = zad. 4 w „Afini.pdf" dra Strojnowskiego: Niech $L := [1, 0, 1, 0] + \mathrm{lin}\{(1, 2, 0, 3)\}$ i $\Pi := \mathrm{af}\{[3, 3, 36], [2, 2, 2, 2], [1, 0, 0, 2]\}$. Zbadać, czy istnieje prosta w $\mathbb{R}^4$, która przechodzi przez punkt $[4, 4, 5, 9]$ i przecina prostą L i płaszczyznę Π. Jeśli prosta taka istnieje, opisać ją i znaleźć jej punkty przecięcia z L i z Π.

11P. Niech $L_1 := [2, 2, 2] + \mathrm{lin}\{(2, 3, 2)\}$ i niech prosta L_2 w $\mathbb{R}^3$ będzie zadana układem równań $2x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ 2x_2 - x_3 = -1$.

a) Znaleźć przedstawienie parametryczne prostej L_2.

b) Znaleźć równanie płaszczyzny Π, zawierającej L_1 i takiej, że prosta L_2 jest równoległa do Π (tzn. $L_1 \subset \Pi$ i $T(L_2) \subset T(\Pi)$, gdzie $T(X)$ to przestrzeń kierunkowa podprzestrzeni X).

12P. Niech $p_0 = [1, 0, 0, 0], p_1 = [1, 1, 1, 0], p_2 = [1, 0, 0, 1], p_3 = [1, 2, 2, 5]$ i niech hiperpłaszczyzna $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ będzie zadana równaniem $x_1 + x_2 - x_3 = 1$.

a) Sprawdzić, czy układ $(p_i)_{i=0}^3$ jest bazą punktową w Π; jeśli tak, to znaleźć współrzędne afiniczne (inaczej barycentryczne) punktu $[1, 1, 1, 5]$ w tej bazie.

b) Zbadać, czy istnieje przekształcenie afiniczne $F : \mathbb{R}^3 \to \Pi$ takie, że $F([1, -1, 1]) = p_0$, $F([2, -1, 1]) = p_1$, $F([1, 0, 1]) = p_2$ i $F([1, -1, 3]) = p_3$. Jeśli przekształcenie F istnieje, opisać je wzorem.

Seria 8 (na piątek 20.III).

W związku z wczorajszym Państwa postulatem, będę dawał łatwiejsze te „zadania do przemyślenia”, które mają charakter bardziej teoretyczny. Nie można jednak tych „teoretycznych” zadań zaniedbać –bez nich nabywana wiedza jest często iluzoryczna i znika po krótkim czasie.

Dr. Strojnowski ogłosił termin kolokwium (3. IV) i na swej stronie wywiesił mnóstwo zadań. Niektóre wymagają rozwiązania wcześniejszych naszych „zadań do przemyślenia”, więc proszę się nadal nad tymi ostatnimi zastanawiać. Sporo zadań wychodzi poza program i te w większości pominiemy. Pozostałe pogrupuję tematycznie i ważniejsze przejrzymy.

1. Diagonalizacji i wektorów własnych dotyczą zadania 2, 4, 8, 10, 14–19, 37, 39, 57, 72, 75. Proszę sprawdzić, czy pominąwszy 10, 15 i 72, pozostałe czują się Państwo na sile rozwiązać. Na ćwiczeniach proszę zgłaszać, które zadania sprawiają kłopot.

2. Gdy L_1 i L_2 są prostymi w przestrzeni afinicznej H i $p \in H \setminus (L_1 \cup L_2)$, to $\Pi_i := \mathrm{af}(\{p\} \cup L_i)$ jest płaszczyzną dla $i = 1, 2$; gdy $\dim H = 3$, to te dwie płaszczyzny przecinają się (na ogół wzdłuż prostej, chyba, że są równe). Wektor kierunkowy tej prostej jest wspólny dla płaszczyzn kierunkowych dla Π_1 i Π_2, odpowiednio. W oparciu o to, rozwiązać zadanie 4 na str. 9 w [TK, 2], gdzie $H = \mathbb{R}^3$, $p = [2, 1, 4]$ i $L_1 = \{[0, 1, 1] + t(1, -1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$, $L_2 = \{[2, 0, 1] + t(1, 3, 0) : t \in \mathbb{R}\}$. (Staram się jak dr. Strojnowski na Państwa wykładzie, oznaczać punkty przez $[x, y, z]$, a wektory przez (x, y, z), zamiast używać strzałek – choć tu i jedno, i drugie jest trójką liczb rzeczywistych.)

Seria 7 (na wtorek 18.III).

1. $+$ Niech macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{k\times k}(\mathbb{F})$ będą podobne. Wywnioskować z zadania 2.1a), lub dowieść bezpośrednio, że dla każdego wielomianu $p \in \mathbb{F}[x]$ podobne są też macierze $p(\mathbf{A})$ i $p(\mathbf{B})$. Dalej uzyskać to, czego użyto na ćwiczeniach: że dla każdego skalara λ i liczby $n \in \mathbb{N}$, zachodzi $\mathrm{rk}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^n = \mathrm{rk}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})^n$.

2. $+$ Niech operator $L : V \to V$ i liczba $n \in \mathbb{N}$ będą takie, że $\mathrm{im}(L^{n-1}) \supsetneq \mathrm{im}(L^n) = \mathrm{im}(L^{n+1})$. Udowodnić, że $V = \ker(L^n) \oplus \mathrm{im}(L^n)$, przy czym podprzestrzenie $\ker(L^n)$ i

$\mathrm{im}(L^n)$ są L–niezmiennicze (a przez to i $L+\lambda I$–niezmiennicze, dla każdego skalara λ). Wskazówka: co do końcowych stwierdzeń, patrz zadanie 2.3.

Zadania zaległe! Podaję zmienioną wskazówkę do zadania 5.2 jako odzielne zadanie:

3. + Niech $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_k)$ będzie bazą przestrzeni V i niech operator $L : V \to V$ spełnia warunki $L(\mathbf{e}_i) = c_i\mathbf{e}_{i+1} + \mathbf{f}_i$ dla $i = 1, ..., k-1$ i $L(\mathbf{e}_k) = \mathbf{0}$, gdzie skalary $c_1, ..., c_{k-1}$ są niezerowe, $\mathbf{f}_{k-1} = \mathbf{0}$ i $\mathbf{f}_i \in \mathrm{lin}(\mathbf{e}_{i+2}, ..., \mathbf{e}_k)$ dla pozostałych i. Jakie podobne warunki spełnia iteracja L^n operatora L, i co można z nich wnosić o macierzy $M(L^n)_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ i jej rzędzie?

4. Sprawdzić, czy sprawiają kłopot zadania 1-4 na str. 3 w skrypcie [TK, II].

Zadania pisemne, porcja 4 (na środę 18.III, godz. 14). Uwaga: przesunąłem termin oddawania zadań pisemnych, by umożliwić zadawanie pytań na wtorkowych zajęciach. Zobaczymy, czy ten system będzie lepszy.

7P. W obu przypadkach, znaleźć macierz Jordana $\mathbf{J}$ i macierz nieosobliwą $\mathbf{S}$, dla których $\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$, oraz wyznaczyć $e^{\mathbf{A}}$ i $\sqrt[3]{\mathbf{A}}$, jeśli kolejnymi wierszami $\mathbf{A}$ są:

a) $(3, -4, 0, 2), (4, -5, -2, 4), (0, 0, 3, -2), (0, 0, 2, -1)$ (za 3p.);

b) $(6, -9, 5, 4), (7, -13, 8, 7), (8, -17, 11, 8), (1, -2, 1, 3)$, przy czym można przyjąć bez rachunków, że $w_{\mathbf{A}} = (2-x)^3(1-x)$ (za 3p.)

Uwaga: wystarczy przedstawienie $e^{\mathbf{A}}$ i $\sqrt[3]{\mathbf{A}}$ jako iloczynu skończenie wielu macierzy, z kórych każda bądź jest znana, bądź jej odwrotność jest znana. (Nie jest konieczne wyznaczanie odwrotności i wykonywanie mnożenia.) Jako wskazówkę do wyznaczania $\mathbf{J}$ i $\mathbf{S}$ daję poniższe „przypomnienie i omówienie".

8P. Zadanie 1 na str. 8-9 w [TK, II].

9P. Zadanie 2 na str. 9 w [TK, II].

Przypomnienie i omówienie rozwiązania zadania 6.2. Jak już w wielu zadaniach, tworzymy obrazy generatorów $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ przestrzeni $V = \mathbb{R}^3$ przy iteracjach przekształcenia $L := L_{\mathbf{A}} + I$ (ogólniej: $L := L_{\mathbf{A}} - \lambda I$, gdzie λ jest jedną z wartości własnych); są nimi kolumny kolejnych potęg macierzy $\mathbf{B} := \mathbf{A} + \mathbf{I}$:

nr.0	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
nr.1	$2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3$	$-3\mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_2 - 7\mathbf{e}_3$	$4\mathbf{e}_1 + 8\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3$
nr.2	$16(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$	$-16(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$	$16(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$
nr.3	$64(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$	$-64(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$	$64(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$

Przestrzeń $V_i = L^i(V)$ jest generowana przez wektory z i–tego wiersza. Ponieważ $V \supset V_1 \supset V_2 ...$, to dla pewnego i zachodzi $V_i = V_{i+1}$. Tu $V_3 = V_2 \neq V_1$ i w przestrzeni „poprzedzającej" V_1 tworzymy bazę A_1 dla $\ker(L_{|V_1})$. Ogólniej, byłaby to baza A_p w przestrzeni $\ker(L_{|V_p})$, gdzie $V_{p+1} = V_{p+2}$. Jeśli chcemy zachować systematyczność postępowania, tworzymy bazy $A_{p-1}, ..., A_0$ jak w opisano w serii 5, uzyskując na koniec bazę Jordana A_0 dla operatora $L_{|\ker(L^{p+1})}$. (Pamiętajmy, że w ślad za $L := L_{\mathbf{A}} - \lambda I$, baza A_0 zależy od wyboru λ, co dalej uwidocznię pisząc $A_0(\lambda)$ zamiast A_0.)

Dla macierzy niewielkich rozmiarów, jak tu, można jednak postąpić prościej. Z tabeli wynika bowiem, że $\dim V_1 = 2$ i $\dim V_2 = 1 = \dim V_3$, wobec czego w postaci Jordana macierzy $\mathbf{A}$, wartości $\lambda = -1$ odpowiada jedyna klatka, stopnia 2. Jej z kolei odpowiada strumień długości 2 dla macierzy $\mathbf{B} = \mathbf{A}+\mathbf{I}$, czyli ciąg wektorów $\mathbf{v}, \mathbf{Bv}$ taki, że $\mathbf{B}^2\mathbf{v} = 0$, lecz $\mathbf{Bv} \neq 0$. „Źródło” $\mathbf{v}$ tego strumienia najłatwiej znaleźć bezpośrednio: rozwiązując równanie $\mathbf{B}^2\mathbf{x} = 0$ uzyskujemy zależność $x_1 = x_2 - x_3$, przy czym należy jeszcze zadbać o to, by $\mathbf{Bx} \neq 0$ –co pozwala np. przyjąć $x_1 = 0, x_2 = 1 = x_3$. Obieramy więc $\mathbf{v} := (0, 1, 1)$, wtedy $\mathbf{Bv} = (1, 2, 1)$, zaś $A_0 = \{(0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ jest szukaną bazą dla $L_{|\ker(L^2)}$.

Należy jeszcze $A_0 = A_0(-1)$ uzupełnić analogicznie znajdowanymi bazami, związanymi z pozostałymi wartościami własnymi. W tym przypadku jest tylko jedna taka wartość, $\mu = 3$, i odpowiada jej tylko jedna klatka, stopnia 1. Klatka ta jest więc „wytwarzana” przez wektor własny. Wektor ten już znamy: z tabeli wynika, że wektor $\mathbf{w} := \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ jest przez $L_{\mathbf{A}} + I$ przeprowadzany na $4\mathbf{w}$, tzn. jest przez $L_{\mathbf{A}}$ przeprowadzany na $3\mathbf{w}$. Przyjmiemy więc $A_0(3) = \{\mathbf{w}\}$, otrzymując szukaną bazę Jordana $\mathcal{V} = ((0, 1, 1), (1, 2, 1); (1, 2, 2))$ przestrzeni $V = \mathbb{R}^3$. Przy tym, $M(L_{\mathbf{A}})^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}}$ jest macierzą Jordana $\mathbf{J}$ o kolumnach $(-1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 3)$ (jedna 2×2–klatka odpowiadająca wartości -1 i jedna 1×1-klatka odpowiadająca wartości 3).

Na koniec pytanie: skąd wiemy, że $\mathcal{V}$ jest bazą w V? Gdy są tylko dwie wartości własne, λ i μ, to wobec zadania 2 zachodzi $V = \ker(L^{p+1}) \oplus \mathrm{im}(L^{p+1})$. Jeśli więc połączymy bazę $A_0(\lambda)$ w $\ker(L^{p+1})$ z bazą $A_0(\mu)$ w $\mathrm{im}(L^{p+1})$, to otrzymamy bazę w V. Sytuacja nie zmieni się, gdy wartości własnych jest więcej (indukcja!). Wynika też stąd, że tworząc bazę $A_0(\mu)$ wystarcza brać pod uwagę działanie $L - \mu I$ tylko na przestrzeń niezmienniczą $\mathrm{im}(L^{p+1}) = V_{p+1}$, której układ generatorów już znamy z poprzedniej tabeli. (Jest to ułatwieniem, bo $\dim(V_{p+1}) < \dim(V)$, np. w rozwiązywanym zadaniu, przestrzeń V_{p+1} jest generowana przez $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$.)

Seria 6 (na piątek 14.III).

1. + =zadanie 1b) z poprzedniej serii w wersji zapisanej obecnie.

2. + $\mathbf{A}$ jest macierzą rzeczywistą o kolejnych wierszach $(1, -3, 4), (4, -7, 8), (6, -7, 7)$. Wiedząc, że $w_{\mathbf{A}}(x) = (3 - x)(1 + x)^2$, znaleźć macierz nieosobliwą $\mathbf{S}$ i macierz Jordana $\mathbf{J}$, dla których $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \mathbf{J}$. (Uwaga: to zadanie różni się od rozwiązywanych wcześniej, bo $\mathbf{A}$ ma więcej niż jedną wartość własną. Należy dla każdej wartości własnej znaleźć „odpowiadający jej kawałek bazy”.)

Pomyśleć o zaległych zadaniach! Poniżej wskazówki do niektórych z nich.

Zad. 5.2: przyjąć wpierw $\lambda = 0$. Zmierzając do wykorzystania zadania 3.3 sprawdzić, jak mnoży się takie macierze.

Zad 2.2: by dowieść, że warunek $\mathrm{rk}(P) = \mathrm{rk}(Q)$ jest wystarczający, skonstruować izomorfizm $S : V \to V$ taki, że $S(\mathrm{im}(P)) = \mathrm{im}(Q)$ i $S(\ker(P)) = \ker(Q)$.

Zad. 2.3: po prostu spróbować!

Seria 5 (na wtorek 11.III).

Przypomnę sposób znajdywania bazy Jordana dla operatora $L : V \to V$ takiego, że $L^{p+1} = 0$ (zakładam, że $L^p \neq 0$):

a) Dla $i = 0, 1, ..., p + 1$, niech $V_i := L^i(V)$. Ważne jest to, że $V_{p+1} = \{0\}$ oraz

$$V = V_0 \supset V_1 ... \supset V_p \ \text{ i } \ L(V_i) = V_{i+1} \text{ dla } i = 0, ..., p.$$

b) Tworzymy dowolną bazę A_p przestrzeni V_p, a gdy znamy już bazę A_i przestrzeni V_i dla pewnego $i \leq p$, to bazę A_{i-1} poprzedzającej przestrzeni V_{i-1} tworzymy tak:

* dla każdego elementu $\mathbf{a}$ bazy A_i, znajdujemy wektor $\widetilde{\mathbf{a}} \in V_{i-1}$ taki, że $L(\widetilde{\mathbf{a}}) = \mathbf{a}$. (Nie wystarczy, by $\widetilde{\mathbf{a}} \in V$, ma być $\widetilde{\mathbf{a}} \in V_{i-1}$ –lecz da się to uzyskać, bo $\mathbf{a} \in V_i = L(V_{i-1})$.)

* Uzupełniamy zbiór $A_i \cap \ker(L)$ pewnym zbiorem Z do bazy przestrzeni $V_{i-1} \cap \ker(L) = \ker(L_{|V_{i-1}})$.

Za A_{i-1} przyjmujemy $Z \cup A_i \cup \{\widetilde{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in A_i \setminus A_{i+1}\}$; na ćwiczeniach udowodnimy, że jest to baza przestrzeni V_{i-1}.

c) Po p krokach, otrzymamy bazę A_0 przestrzeni $V_0 = V$. Jest to szukana baza Jordana dla operatora L, jeśli uporządkować ją według strumieni (to też zauważymy na ćwiczeniach).

Zadania do przemyślenia.

1. a) + Operator $L : V \to V$ działa na wektory pewnej bazy $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_j)_{j=1}^4$ przestrzeni V tak: $L(\mathbf{b}_1) = \mathbf{0}, L(\mathbf{b}_2) = \mathbf{b}_1, L(\mathbf{b}_3) = \mathbf{b}_2$ i $L(\mathbf{b}_4) = \mathbf{b}_2$. Znaleźć bazę Jordana operatora L i jego macierz w tej bazie.

b) + To samo, lecz tym razem $L(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_2, L(\mathbf{b}_2) = \mathbf{0}, L(\mathbf{b}_3) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ i $L(\mathbf{b}_4) = \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_1$.

Oboma razy, zapisać w i-tym wierszu tabeli układ generatorów $L^i(\mathbf{b}_j), j = 1, ..., 4$, przestrzeni $V_i := L^i(V)$; wówczas w j-tej kolumnie tabeli zapisane bedą obrazy wektora $\mathbf{b}_i$ przy kolejnych iteracjach L^i operatora L. To, że któryś z wierszy tabeli okaże się składać tylko z wektora zerowego, świadczy o nilpotentności L.

2. + Znaleźć postać Jordana macierzy dolnie trójkątnej, mającej na przekątnej wyrazy równe λ, zaś bezpośrednio poniżej wyrazy niezerowe.

Proszę pamiętać o nieomawianych zadaniach wcześniejszych, w tym o zad. 1 poprzedniej serii (będziemy go potrzebować).

Zadania pisemne, porcja 3 (na wtorek 10.III).

4P. $\mathbf{A}$ jest 3×3 macierzą o kolejnych wierszach $(-6, 6, 6), (0, 2, 0), (-8, 8, 8)$, zaś $\mathbf{B}_t$ różni się od $\mathbf{A}$ tylko swym ostatnim wierszem, którym jest $(-8, t, 8)$. Zbadać, dla jakich $t \in \mathbb{R}$ macierz $\mathbf{B}_t$ jest nad $\mathbb{R}$ podobna do $\mathbf{A}$. (Wskazówka: jest tak wtedy i tylko wtedy, gdy macierze te mają tę samą postać Jordana.)

5P. Operator $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest zadany wzorem $L(\mathbf{x}) = (7x_1 - 4x_2 + 9x_3, 12x_1 - 7x_2 - 6x_3, 8x_3)$ dla $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

a) Zbadać, czy istnieje baza $\mathcal{V}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, diagonalizująca operator L. Jeśli taka baza istnieje, to wskazać ją.

b) Zbadać, czy istnieje operator $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ taki, że $K^3 = L$. (Przez K^3 oznaczam złożenie $K \circ K \circ K$.) Jeśli taki operator istnieje, wyrazić go wzorem we współrzędnych kartezjańskich x_1, x_2, x_3.

6P. Macierz kwadratowa $\mathbf{A}$ ma bezpośrednio pod przekątną jedynki, ostatnią kolumnę równą $(a_0, ..., a_{k-1})^t$, a w pozostałych miejscach zera. Wyznaczyć jej wielomian charakterystyczny $w_{\mathbf{A}}$.

Seria 4 (na piątek 7.III).

Zadania do przemyślenia.

1. + Niech $L : V \to W$ będzie surejektywnym przekształceniem liniowym, a $(\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k)$ –bazą przestrzeni W. Dla każdego wektora $\mathbf{b}_i$ tej bazy, obierzmy wektor $\widetilde{\mathbf{b}}_i \in V$ tak, by $L(\widetilde{\mathbf{b}}_i) = \mathbf{b}_i$. Dowieść, że jeśli $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_l)$ jest bazą jądra $\ker(L)$ przekształcenia L, to $(\widetilde{\mathbf{b}}_1, ..., \widetilde{\mathbf{b}}_k, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_l)$ jest bazą przestrzeni V.

2. + Jak zmieni się macierz $M(L)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ operatora $L \in \mathcal{L}(V)$, gdy w bazie $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n)$ zamienimy pierwszy wektor z drugim (tzn., gdy bazę zmienimy na $(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3, ..., \mathbf{b}_n)$)? A gdy zamienimy pierwszy z trzecim?

(Wskazówka: raczej, niż obliczać macierze zmiany bazy i wykonywać odpowiednie mnożenia macierzy, wykorzystać to, jak tworzymy kolumny macierzy przekształcenia.)

3. Niech $\mathbf{E}_{ij}$ oznacza $k \times k$–macierz, której ij–ty wyraz jest równy 1, a pozostałe 0. Dowieść, że:

a)+ Macierze $\mathbf{E}_{ii}$ i $\mathbf{E}_{jj}$ są podobne.

b)+ Dla $i \neq j$ i $\lambda \neq 0$, macierz $\mathbf{E}_{ij}$ jest podobna do $\lambda \mathbf{E}_{ij}$.

c) Gdy $\#\mathbb{F} > 2$ i $f : \mathcal{M}_k(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ jest funkcją liniową, przyjmującą na każdych dwóch macierzach podobnych tę samą wartość, to $f(\mathbf{A}) = f(\mathbf{E}_{11})\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$.

4. + (Omówiono na ćwiczeniach.) Niech $V_0 \subset V$ będzie podprzestrzenią niezmienniczą operatora $L \in \mathcal{L}(V)$ i niech $L_0 := L_{|V_0} : V_0 \to V_0$. Udowodnić, że wielomian w_{L_0} jest dzielnikiem wielomianu w_L.

Seria 3 (na wtorek 4.III).

1. + Dowieść, że gdy któraś z macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ jest nieosobliwa, to macierz $\mathbf{AB}$ jest podobna do $\mathbf{BA}$.

Definicja. **Klatką Jordana** stopnia k, odpowiadającą wartości λ, nazywam tu macierz kwadratową stopnia k, mającą na przekątnej wszystkie wyrazy równe λ, bezpośrednio pod przekątną – równe 1, a pozostałe – równe 0. (Można też przyjąć, że wyrazy równe 1 są bezpośrednio nad przekątna.) Przypomnijmy też, że dla macierzy kwadratowych $\mathbf{K}_1, ..., \mathbf{K}_p$, przez $\mathrm{diag}(\mathbf{K}_1, ..., \mathbf{K}_p)$ oznaczamy macierz, w której wzdłuż przekątnej stoją kolejno klatki $\mathbf{K}_1, ..., \mathbf{K}_p$, a poza nimi są zera.

2. Niech $\mathbf{B} = \mathrm{diag}(\mathbf{K}_1, ..., \mathbf{K}_t, \mathbf{C})$, gdzie λ nie jest wartością własną klatki $\mathbf{C}$, a $\mathbf{K}_1, ..., \mathbf{K}_t$ są klatkami Jordana, stopni $s_1, ..., s_t$, odpowiednio, wszystkie odpowiadające wartości λ. Dowieść, że

a) t jest wymiarem przestrzeni własnej $V_{\mathbf{B}}(\lambda)$, odpowiadającej wartości λ;

b) $n_\lambda := s_1 + ... + s_t$ jest krotnością λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego $w_{\mathbf{B}}$;

c) + liczba $\mathrm{rk}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})^{n-1} - \mathrm{rk}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})^n$ jest równa liczbie tych klatek $\mathbf{K}_i$, których stopień s_i jest $\geq n$. (Tu $n = 1, 2, ...$ i przyjmujemy $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})^0 = \mathbf{I}$. Wskazówka: zbadać $\mathrm{rk}(\mathbf{K}_i - \lambda\mathbf{I})^{n-1} - \mathrm{rk}(\mathbf{K}_i - \lambda\mathbf{I})^n$ dla pojedyńczej klatki $\mathbf{K}_i$.)

d) liczba $m_\lambda := \max_i s_i$ (wskazująca rozmiar największej spośród klatek $\mathbf{K}_1, ..., \mathbf{K}_t$) jest równa $\inf\{n : \mathrm{rk}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})^n = \mathrm{rk}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})^{n+1}\}$

3. + Niech macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ będzie nad $\mathbb{F}$ podobna do macierzy $\mathrm{diag}(\mathbf{K}_1, ..., \mathbf{K}_p)$, gdzie $\mathbf{K}_i$ to klatki Jordana (być może różnych rozmiarów i odpowiadające być może różnym wartościom). Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ i $n \in \mathbb{N}$ wywnioskować z części c) zadania 2, że liczba tych klatek $\mathbf{K}_i$, kóre odpowiadają wartości λ i są rozmiaru $\geq n$, jest równa $\mathrm{rk}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{n-1} - \mathrm{rk}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^n$

Zadania pisemne, porcja 2 (na wtorek 3.III).

2P. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ jest macierzą o kolejnych wierszach $(7, -12, 6), (10, -19, 10), (12, -24, 13)$. Wiedząc, że jej wielomian charakterystyczny $w_{\mathbf{A}}$ jest równy $-(1-x)^2(1+x)$, wyznaczyć macierze $\mathbf{S}$ i $\mathbf{D}$ takie, że $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}$, przy czym macierz $\mathbf{D}$ jest diagonalna, a $\mathbf{S}$ nieosobliwa. Obliczyć też macierz $f(\mathbf{A})$, gdzie $f(x) = \sin(\pi x^2) + \frac{1}{2}(x+1)$.

Uzupełnienie (za dodatkowy punkt): wykonać rachunek potwierdzający, że wielomian $w_{\mathbf{A}}$ jest taki, jak napisano.

3P. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ jest macierzą o kolejnych wierszach $(3, -4, 0, 2), (4, -5, -2, 4), (0, 0, 3, -2), (0, 0, 2, -1)$. Ustalić, czy macierz ta jest nad $\mathbb{R}$ podobna do macierzy Jordana, a jeśli jest, to do jakiej. (Jeśli zaś nie jest, to dać uzasadnienie.)

Uwaga: w zadaniu tym można oprzeć się na ostatnim „zadaniu do przemyślenia", nawet, gdy sie go nie rozwiązało.

Seria 2 (na piątek 28.II).

Zadania do przemyślenia:

1. Niech operatory $K \in \mathcal{L}(V)$ i $L \in \mathcal{L}(W)$ oraz izomorfizm $S \in \mathcal{L}(V, W)$ spełniają warunek $K = S^{-1}LS$. Dowieść, że

a)+ dla wielomianów $p \in \mathbb{F}[x]$ zachodzi $p(K) = S^{-1}p(L)S$;

b) $\ker(L) = S(\ker(K))$ i $\mathrm{im}(L) = S(\mathrm{im}(K))$, i tak samo z $p(K)$ i $p(L)$ w miejsce K i L, odpowiednio.

2. Udowodnić, że rzuty liniowe $P, Q \in \mathcal{L}(V)$ są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{rk}(P) = \mathrm{rk}(Q)$.

3. a) + Podprzestrzeń L–niezmiennicza jest i $p(L)$–niezmiennicza, dla $p \in \mathbb{F}[x]$.

b) + Podprzestrzeń zawarta w $\ker(L)$ lub zawierająca $\mathrm{im}(L)$ jest L-niezmiennicza.

c) Niech $K, L \in \mathcal{L}(V)$ i $KL = LK$. Gdy podprzestrzeń V_0 jest L–niezmiennicza, to $K(V_0)$ i $K^{-1}(V_0)$ też są takie. Stąd L–niezmiennicze są $\ker(K)$, $\mathrm{im}(K)$, czy ogólniej $\ker(p(K))$ i $\mathrm{im}(p(K))$ dla $p \in \mathbb{F}[x]$, w tym przestrzenie własne operatora K.

4. * Zdefiniować podobieństwo permutacji $\sigma, \tau \in \mathbf{S}_k$ i dowieść, że ma ono miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego n tyle samo cykli długości n występuje w przedstawieniu σ w postaci iloczynu cykli rozłącznych, co w przedstawieniu τ w postaci takiego iloczynu.

Seria 1 (na 25.II).

Zadania do przemyślenia:

1. + Niech operator $L : V \to V$ będzie taki, że złożenie $L \circ L$ jest identycznością.

a) Udowodnić, że jedynymi wartościami własnymi L mogą być 1 i -1.

b) Przypomnieć sobie z semestru 1, co wiadomo Państwu o operatorach, jak w a).

c) W oparciu o tą wiedzę ustalić, czy operator L jest diagonalizowalny.

1' + (Rozwiązano na ćwiczeniach.) To samo, gdy operator L jest **idempotentny**, tzn. $L \circ L = L$. (Wtedy jednak wartościami własnymi mogą być 0 i 1.)

2. + Niech $L : V \to V$ będzie endomorfizmem skończenie–wymiarowej przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{F}$, a $\mathbf{v}$ jego wektorem własnym, odpowiadającym wartości własnej λ. Udowodnić, że dla każdego wielomianu $P \in \mathbb{F}[x]$, wektor $\mathbf{v}$ jest też wektorem własnym operatora $P(L)$, odpowiadającym wartości własnej $P(\lambda)$. (Operator $P(L)$ zdefiniowano na wykładzie.)

3. Dla macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{k\times k}(\mathbb{F})$ oznaczmy przez $c_i(\mathbf{A})$ współczynniki jej wielomianu charakterystycznego:

$$w_{\mathbf{A}} = \sum_{i=0}^{k} c_i(\mathbf{A}) x^i. \qquad (*)$$

Dowieść, że:

a) + $c_0(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$, $c_k(\mathbf{A}) = (-1)^k$ i $c_{k-1}(\mathbf{A}) = (-1)^{k-1}\mathrm{tr}(\mathbf{A})$, gdzie $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^k a_{ii}$.

b) Gdy $\chi_\mathbf{A}$ ma, uwzględniając krotności, k pierwiastków $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{F}$, to $\sum_i \lambda_i = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$ i $\prod_i \lambda_i = \det(\mathbf{A})$.

c)* Ogólniej, dla $s = 0, ..., k$:

$$c_s(\mathbf{A}) = (-1)^s \sum_{\#P=k-s} \det(\mathbf{A}_P) \text{ oraz } \sum_{\#P=s} \prod_{i\in P} \lambda_i = \sum_{\#P=s} \det(\mathbf{A}_P)$$

gdzie # oznacza moc zbioru, a $\mathbf{A}_P$ –podmacierz wyznaczoną przez wiersze i kolumny o numerach ze zbioru $P \subset \{1, ..., k\}$. (Zbadać wpierw przypadek $k = 3$.)

Zadania pisemne, porcja 1.

P **1.** Operator $L : V \to V$ ma w pewnej bazie $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4)$ macierz $\mathbf{A} = M(L)_\mathcal{B}^\mathcal{B}$, której kolejnymi kolumnami są $(1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)$. (Ciałem skalarów jest $\mathbb{R}$.)

a) Wyznaczyć wielomian charakterystyczny w_L i wartości własne operatora L.

b) Dla każdej wartości własnej, znaleźć bazę odpowiadającej jej podprzestrzeni własnej.

c) Zbadać, czy operator L jest diagonalizowalny (tzn., czy jego macierz w pewnej bazie jest diagonalna). Jeśli nie, podać uzasadnienie, a jeśli tak, wskazać diagonalizującą go bazę i macierz operatora L w tej bazie.