

GAL, kolokwium nr 2, 21.04.2004, Temat A

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce powinno być: imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania oraz litera tematu.

1. Niech $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie symetrią względem $H : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3$ wzdłuż $L = (1, 0, 1) + \text{lin}((1, 1, 1))$, niech $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie przesunięciem o wektor $(5, 6, 7)$ i niech $f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie jednokładnością o środku $(6, 6, 6)$ i skali 2.

a) Znaleźć $f_1((1, 3, 0))$.

b) Znaleźć parametryzację przestrzeni $g(M)$, gdzie $g = f_3 \circ f_2$ oraz M jest płaszczyzną opisaną równaniem $x_1 - x_2 + x_3 = 5$.

2. Niech $\mathcal{A} = \{(1, 0, 1), (1, 2, 0), (0, 1, 0)\}$, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

a) Niech $\psi \in (\mathbb{R}^3)^*$ będzie funkcjonałem mającym w bazie dualnej do \mathcal{A} współrzędne 1, 2, 3. Znaleźć wzór na ψ i znaleźć współrzędne funkcjonału ψ w bazie dualnej do \mathcal{B} .

b) Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Dla jakich $r \in \mathbb{R}$ funkcjonał $\psi_r((x_1, x_2, x_3)) = x_1 + x_2 + rx_3$ należy do $\text{im}(\varphi^*)$?

3. Niech $W \subset \mathbb{R}^4$ będzie podprzestrzenią opisaną równaniem $x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$ oraz niech $\alpha = (1, 1, 1, 0)$.

a) W \mathbb{R}^4 ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni W , bazę ortonormalną przestrzeni W^\perp oraz znaleźć rzuty prostopadłe wektora α na W i na W^\perp .

b) Niech $\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. Czy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni \mathbb{R}^4 ? Czy $\langle \cdot, \cdot \rangle|_W$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni W ?

4. Niech $p_0 = (1, 2, 0)$, $p_1 = (1, 1, 1)$, $p_2 = (0, 1, 2)$, $q = (1, 1, 2)$, $w_t = (4, t, t^2)$. W \mathbb{R}^3 zadany jest standardowy iloczyn skalarny.

a) Znaleźć odległość punktu q od $\text{af}(p_0, p_1)$, znaleźć odległość punktu q od $\text{af}(p_0, p_1, p_2)$ oraz znaleźć pole trójkąta $\text{conv}(p_0, p_1, p_2)$.

b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ czworoscian $\text{conv}(p_0, p_1, p_2, w_t)$ ma najmniejszą objętość?

5. Niech $p = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, niech $L = (b_1, \dots, b_n) + \text{lin}((a_1, \dots, a_n))$ będzie prostą w \mathbb{R}^n i niech r_1, \dots, r_k będzie ciągiem k liczb rzeczywistych dodatnich, gdzie $1 \leq k \leq n$. W \mathbb{R}^n dany jest standardowy iloczyn skalarny.

a) Wykazać, że rzutem prostopadłym punktu p na prostą L jest punkt $q = (z_1, \dots, z_n)$, gdzie $z_i = b_i + ca_i$ dla $i = 1, \dots, n$ oraz $c = \frac{\sum_{i=1}^n a_i(y_i - b_i)}{\sum_{i=1}^n (a_i)^2}$.

b) Wykazać, że spośród wszystkich k -wymiarowych równoległocienów $R(p_0; \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ w \mathbb{R}^n takich, że $\|\alpha_i\| = r_i$ dla $i = 1, \dots, k$ największą k -wymiarową objętość μ_k mają te, w których $\alpha_i \perp \alpha_j$ dla wszystkich $i \neq j$. Obliczyć tę największą objętość.