VIII Elementy geometrii afinicznej.

Wstęp.* W tym wstępie odwołamy się do całkowicie poglądowego opisu. Przypuśćmy, że grono osób bada niedostępny obiekt $\mathbb{A}$ (np. powierzchnię niewidocznej strony Księżyca), mając do dyspozycji pewien zbiór jego map, rozdzielonych między badających. Jeśli ktoś zaproponuje nazwanie zbioru $X \subset \mathbb{A}$ elipsą, gdy na jego mapie zbiór ten jest odzwierciedlony jako elipsa, to natychmiast pojawia się pytanie, czy na innych mapach też jest on tak odzwierciedlony. Oznaczmy przez S_i przekształcenie, które punktowi zbioru $\mathbb{A}$ przyporządkowuje jego obraz na i–tej mapie; wówczas $S_j S_i^{-1}$ przyporządkowuje punktom i–tej mapy odpowiadające im punkty mapy j-tej. Możliwość uzgodnienia przez badających, jakie zbiory w $\mathbb{A}$ nazwać elipsami, zależy od tego, czy wszystkie „przekształcenia zmiany map" $S_j S_i^{-1}$ przeprowadzają elipsy na elipsy. Ogólniej, badający zdołają uzgodnić te pojęcia dotyczące obiektu $\mathbb{A}$, które są niezmiennicze względem wszystkich tych przekształceń. (Zostawiamy tu pewne niedopowiedzenie.)

W geometrii naturalne staje się żądanie, by przekształcenia zmiany map przebiegały pewną grupę przekształceń; co to jest, niebawem wyjaśnimy. Sytuację zbliżoną do opisanej spotykamy w różniczkowej geometrii i topologii, a także w geometrii afinicznej. Tą ostatnią zajmiemy się obecnie. Podamy wpierw niezbędne definicje dotyczące grup przekształceń, a następnie przejdziemy do badania przestrzeni afinicznych, które zdefiniujemy przy pomocy pewnego zbioru map. Opiszemy dogodne przekształcenia i podprzestrzenie tych przestrzeni, a następnie przejdziemy do badania jednych z najprostszych, ale i ważnych podzbiorów przestrzeni afinicznej: tych, które w pewnej mapie opisać można równaniem kwadratowym. Na koniec wrócimy do przestrzeni afinicznych, by wyposażyć je w pojęcia, ułatwiające obywanie się bez map.

Materiał ten jest ważny i dlatego, że stwarza pewien zakres pojęć umożliwiających badanie przestrzeni, w której żyjemy – co było zadaniem geometrii od jej początków. Zadanie to o tyle sobie ułatwiamy, że istnienie odpowiednio zgodnych map *przyjmujemy*, podczas gdy ważnym osiągnięciem geometrii klasycznej było odkrycie ich istnienia i wskazanie sposobów konstrukcji.

§ 1. Grupy przekształceń, grupy macierzy, atlasy i mapy.

1. Grupy macierzy i odpowiadające im grupy przekształceń liniowych.

Definicja. Niech X będzie pewnym zbiorem. Niepusty zbiór G przekształceń $X \to X$ nazywamy **grupą przekształceń** zbioru X, gdy spełnione są następujące warunki:

i) $F_1 \circ F_2 \in G$ dla $F_1, F_2 \in G$ (zamkniętość względem składania przekształceń);

ii) Elementy G są bijekcjami X na X oraz dla każdego $F \in G$ przekształcenie odwrotne $F^{-1} \colon X \to X$ należy do G. (Zamkniętość względem brania odwrotności.)

Definicja. **Grupą macierzy** stopnia k nad ciałem $\mathbb{F}$ nazywamy niepusty zbiór $G \subset \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$, zamknięty względem mnożenia i brania odwrotności, tzn. taki, że

i') $\mathbf{AB} \in G$ dla $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in G$;

ii') Elementy G są macierzami nieosobliwymi i $\mathbf{A}^{-1} \in G$ dla każdej macierzy $\mathbf{A} \in G$.

Przykład 1. Poniżej, k jest ustaloną liczbą naturalną, $\mathbb{F}$ ciałem, zaś V przestrzenią wektorową nad $\mathbb{F}$, wymiaru k. Podamy kilka przykładów ważnych grup macierzy i odpowiadających im grup przekształceń liniowych.

a) Grupami macierzy są:

$\mathrm{GL}_k(\mathbb{F})$, zbiór wszystkich $k \times k$–macierzy nieosobliwych o wyrazach z $\mathbb{F}$;
$\mathrm{SL}_k(\mathbb{F})$, zbiór wszystkich $k \times k$–macierzy o wyznaczniku 1 i wyrazach z $\mathbb{F}$;
$\mathrm{GL}_k^+(\mathbb{R})$, zbiór wszystkich rzeczywistych $k \times k$–macierzy o dodatnim wyznaczniku.

Odpowiadają im następujące grupy przekształceń przestrzeni wektorowej V nad $\mathbb{F}$:

$\mathrm{GL}(V)$, zbiór wszystkich nieosobliwych przekształceń liniowych $V \to V$;
$\mathrm{SL}(V)$, zbiór wszystkich przekształceń liniowych $V \to V$ o wyznaczniku 1.
$\mathrm{GL}^+(V)$ (gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$), zbiór wszystkich przekształceń $L \in \mathcal{L}(V)$ z $\det(L) > 0$.

Tak $\mathrm{GL}(V)$, jak i $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F})$ nazywamy **pełną grupą liniową**, zaś $\mathrm{SL}_k(\mathbb{F})$ i $\mathrm{SL}(V)$ – **specjalną grupą liniową**. (Po angielsku: „**General Linear Group**" i „**Special Linear Group**".)

b) Gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, to grupami macierzy są:

O_k, zbiór $k \times k$–macierzy ortogonalnych;
SO_k, zbiór $k \times k$–macierzy ortogonalnych o wyznaczniku 1.

Odpowiadają im następujące grupy przekształceń przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$:

$\mathrm{O}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, zbiór wszystkich przekształceń ortogonalnych $V \to V$;
$\mathrm{SO}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, zbiór wszystkich zachowujących orientację przekształceń ortogonalnych $V \to V$.

O_k i $\mathrm{O}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazywamy **grupą ortogonalną**, a SO_k i $\mathrm{SO}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ –**specjalną grupą ortogonalną**.

c) Dla $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ mamy następujące analogiczne grupy:

U_k, zbiór (zespolonych) $k \times k$–macierzy unitarnych
SU_k, zbiór (zespolonych) $k \times k$–macierzy unitarnych o wyznaczniku 1.

Odpowiadają im grupy przekształceń zespolonej przestrzeni unitarnej $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$:

$\mathrm{U}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, zbiór wszystkich przekształceń unitarnych $V \to V$;
$\mathrm{SU}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, zbiór wszystkich przekształceń unitarnych $V \to V$ o wyznaczniku 1.

Tak U_k, jak i $\mathrm{U}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazywamy **grupą unitarną**, zaś SU_k i $\mathrm{SU}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ –**specjalną grupą unitarną**.

d) Dla $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ istotną rolę odgrywa grupa macierzy $\lambda\mathbf{A}$, gdzie λ przebiega niezerowe skalary, zaś $\mathbf{A}$ – macierze unitarne (nad $\mathbb{F}$). Grupę wyznaczonych przez takie macierze przekształceń $\mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^k$ nazywamy grupą **podobieństw liniowych** przestrzeni $\mathbb{F}^k$. Odpowiada jej grupa podobieństw liniowych dowolnej przestrzeni unitarnej nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. (Jak tę grupę zdefinować?)

e) Gdy V jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$, a $g\colon V \times V \to \mathbb{F}$ funkcją dwuliniową, to

$\mathrm{Aut}(V, g)$, zbiór wszystkich nieosobliwych przekształceń liniowych $L\colon V \to V$ takich, że $g\left(L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2)\right) = g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ dla $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$

jest grupą, nazywaną **grupą automorfizmów przestrzeni** (V, g) lub **grupą izometrii przestrzeni** (V, g). Gdy funkcja g jest symetryczna, grupa ta nazywana jest też **grupą automorfizmów formy kwadratowej** $f(\mathbf{v}) := g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ i oznaczana $\mathrm{Aut}(V, f)$ lub $\mathrm{O}(V, f)$. (Przypomnijmy, że wówczas f jednoznacznie określa g.)

Wymienione grupy nazywane są **klasycznymi grupami liniowymi**. Gdy nie prowadzi to do nieporozumień, pomija się oznaczanie iloczynu skalarnego i pisze n.p. $\mathrm{O}(V)$ zamiast $\mathrm{O}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Rola grup przekształceń w geometrii wiąże się z tzw. „programem z Erlangen" Felixa Kleina z 1872 r. Program ten ujmował geometrię jako badanie niezmienników grup przekształceń. Nie będziemy tu wyjaśniać znaczenia ostatniego zdania, lecz dalszy wykład przestrzeni afinicznych przedstawimy tak, by widoczne było, że badane są wyłączne pojęcia zdefiniowane przy użyciu odpowiedniej grupy przekształceń. By jednak uprawiać geometrię, musimy wyjść poza klasę przekształceń liniowych.

Stwierdzenie 1. *Niech G będzie grupą (pewnych) przekształceń liniowych przestrzeni V i przyjmijmy*

$$\overline{G} := \{L + \mathbf{u}\colon L \in G, \mathbf{u} \in V\}, \quad \text{gdzie } (L + \mathbf{u})(\mathbf{x}) := L(\mathbf{x}) + \mathbf{u} \text{ dla } \mathbf{x} \in V.$$

Wówczas $\overline{G}$ jest grupą przekształceń.

Stwierdzenie to wynika bezpośrednio z następującego lematu:

Lemat 1. *Niech $K \in \mathcal{L}(U, V)$ i $L \in \mathcal{L}(V, W)$, gdzie U, V, W to przestrzenie liniowe.*
a) Dla $\mathbf{v} \in V$ i $\mathbf{w} \in W$ zachodzi

$$(L + \mathbf{w}) \circ (K + \mathbf{v}) = L_0 + \mathbf{w}_0, \quad \text{gdzie } L_0 := L \circ K \ \text{ i } \ \mathbf{w}_0 := L(\mathbf{v}) + \mathbf{w}. \tag{0}$$

b) Gdy $L + \mathbf{w}\colon V \to W$ jest bijekcją, to L też nią jest i $(L + \mathbf{w})^{-1} = L^{-1} - L^{-1}(\mathbf{w})$.

Dowód. a) otrzymujemy porównując wartości obu stron (0) na dowolnym wektorze $\mathbf{x} \in V$ i korzystając z liniowości L, zaś b)-rozwiązując równanie $(L + \mathbf{w})(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. $\boxminus$

Oznaczenia. W dalszej części grupa $\overline{G}$ będzie używana gdy:

1. $G = \mathrm{GL}(V)$. Wtedy $\overline{G}$ nazywamy **pełną grupą afiniczną przestrzeni** V i oznaczamy $\mathrm{GA}(V)$, od **General Affine**.

2. $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ jest euklidesową (odp. zespoloną unitarną) przestrzenią wektorową i $G = \mathrm{O}(V)$ (odp. $G = \mathrm{U}(V)$). Wtedy grupę $\overline{G}$ oznaczamy przez $\mathrm{OA}(V)$ (odp. przez $\mathrm{UA}(V)$). Grupę $\mathrm{OA}(V)$ nazywamy **grupą przekształceń euklidesowych** przestrzeni V. (Oznaczenia wzięte od nazw **Orthogonal Affine** i **Unitary Affine**.)

Definicja. Przekształcenie $I_V + \mathbf{u}$ nazywamy **przesunięciem** w przestrzeni wektorowej V o wektor $\mathbf{u} \in V$. Przesunięcie to działa więc tak: $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{u}$ dla $\mathbf{v} \in V$, gdzie wektor $\mathbf{u}$ jest ustalony.

Uwaga 1. * a) $\overline{G}$ jest najmniejszą grupą przekształceń przestrzeni V, zawierającą G i wszystkie przesunięcia $V \to V$ (tzn. każda taka grupa przekształceń zawiera też $\overline{G}$).

b) Z (0) wynika, że gdy G zawiera element różny od identyczności, to grupa $\overline{G}$ jest nieprzemienna (tzn. $F_1 \circ F_2 \neq F_2 \circ F_1$ dla pewnych $F_1, F_2 \in \overline{G}$. ⊟

W dalszej części znak $\circ$ (składania przekształceń) często pomijamy.

2. Atlasy i mapy.

Niech G będzie grupą przekształceń przestrzeni $\mathbb{F}^k$, zaś X niech będzie dowolnym zbiorem, równolicznym z $\mathbb{F}^k$.

Definicja. a) Dwie bijekcje $S, T\colon X \to \mathbb{F}^k$ są G–**zgodne**, gdy $TS^{-1} \in G$. G–zgodność jest relacją równoważności w zbiorze wszystkich bijekcji $X \to \mathbb{F}^k$. (Wynika to łatwo stąd, że G jest grupą.)

b) Każdą klasę abstrakcji tej relacji nazywamy G–**zgodnym atlasem** na zbiorze X, a elementy atlasu nazywamy jego **mapami**.

Uwaga 1. a) Podkreślmy, że mapy są zawsze bijekcjami zbioru X na przestrzeń $\mathbb{F}^k$.

b) Każda bijekcja $S\colon X \to \mathbb{F}^k$ wyznacza jedyny G–zgodny atlas, do którego należy; składa się on ze wszystkich bijekcji $X \to V$, które są G–zgodne z S. (Jest to własność ogólna: klasa abstrakcji składa się ze wszystkich elementów, będących w relacji z danym.)

c) Atlas **wyznaczony** przez S, o którym mowa w b), jest równy $\{US\colon U \in G\}$. ⊟

Uwaga 2. Jak stąd wynika, dowolna mapa wyznacza go jednoznacznie. Dlaczego więc nie rozważać par (X, S) w miejsce dość abstrakcyjnych „atlasów”? Przyczyna jest następująca: nie chcemy wyróżniać żadnej mapy na X i dla dalszej części możliwość zmiany map będzie bardzo istotna. Dlatego to użycie całego zbioru G-zgodnych map jest, wbrew pozorom, dogodniejsze.

G–zgodność map umożliwia przeniesienie z przestrzeni $\mathbb{F}^k$ na zbiór X własności „G–niezmienniczych”. Ponownie, w miejsce wyjaśnień użyjemy przykładów.

Przykład 1. Niech $S, T\colon X \to \mathbb{R}^2$ będą G–zgodnymi bijekcjami i niech $U := TS^{-1}$.

a) Gdy $G = \mathrm{GA}(\mathbb{R}^2)$ i zbiór $Z \subset X$ ma tę własność, że $S(Z)$ jest prostą w $\mathbb{R}^2$, to i $T(Z)$ jest prostą w $\mathbb{R}^2$. Istotnie, $T(Z) = U(S(Z))$ i pozostaje sprawdzić, że przekształcenie $U \in \mathrm{GA}(\mathbb{R}^2)$ przeprowadza proste na proste. Ponieważ $U(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) + \mathbf{v}_0$ dla wszystkich $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, gdzie $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^2$ jest ustalone, a $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest izomorfizmem liniowym, więc „szkolne" sprawdzenie nie nastręcza kłopotu.

b) Gdy $G = \overline{\mathrm{SL}}(\mathbb{R}^2)$ i zbiór $Z \subset X$ ma tę własność, że $S(Z)$ jest równoległobokiem w $\mathbb{R}^2$ o polu powierzchni równym 1, to $T(Z)$ też nim jest. Tym razem do uzasadnienia wykorzystać należy to, że U przeprowadza równoległoboki na równoległoboki o tym samym polu powierzchni. (Odnotujmy, że U jest złożeniem przekształcenia liniowego $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, o wyznaczniku 1, i przesunięcia $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{v}_0$.)

c) Gdy $G = \mathrm{OA}(\mathbb{R}^2)$, to dla dowolnych $p_1, p_2 \in X$ zachodzi równość $\|S(p_1) - S(p_2)\| = \|T(p_1) - T(p_2)\|$. (Wynika to stąd, że $T(p_i) = U(S(p_i))$ $(i = 1, 2)$ i $U = L + \mathbf{v}_0$, gdzie L jest izometrią liniową.)

Przykład 2. Nie powinno być teraz zaskoczeniem, że G–zgodna rodzina map $X \to \mathbb{R}^2$ umożliwia zdefiniowanie w zbiorze X:

a) prostych, gdy $G = \mathrm{GA}(\mathbb{R}^2)$;

b) równoległoboków o powierzchni 1, gdy $G = \overline{\mathrm{SL}}(\mathbb{R}^2)$;

c) odległości punktów, gdy $G = \mathrm{OA}(\mathbb{R}^2)$.

W a) należy w tym celu zbiór $Z \subset X$ nazwać prostą w X, gdy pewna z rozważanych map przeprowadza zbiór Z na prostą w $\mathbb{R}^2$, i podobnie postąpić należy w b), definiując równoległoboki o polu 1. Natomiast odległość dwóch punktów p_1, p_2 w c) definiujemy jako normę wektora $S(p_1) - S(p_2)$, dla dowolnej mapy S z wyróżnionego atlasu. Z przykładu 1 wynika, że wybór użytych mapy jest nieistotny.

Przykłady te są typowe dla wielu rozumowań. Odnotujmy, że o zbiorze X, w którym wyżej zdefiniowano proste czy równoległoboki, niczego prawie nie wiemy. Może to być dowolny zbiór równoliczny z $\mathbb{R}^2$, np. zbiór Cantora, dalece nie „przypominający" płaszczyzny. Ważne jest tylko, że na X wyróżniono pewną rodzinę G–zgodnych bijekcji $X \to \mathbb{R}^2$, dla odpowiedniej grupy przekształceń G.

3. Warstwy i przekształcenia różniące się od liniowego o przesunięcie.

W dalszej części ograniczamy się do najważniejszych przypadków, gdy $G = \mathrm{GA}(\mathbb{F}^k)$ lub $G = \mathrm{OA}(\mathbb{R}^k)$. Tak jednak w tych, jak i w pozostałych przypadkach istotną rolę grają proste własności przekształceń, bliskich liniowym.

Definicja. Niech V i V' będą przestrzeniami liniowymi.

a) Przekształcenie $I_V + \mathbf{v}$, gdzie $\mathbf{v} \in V$, nazywamy **przesunięciem o $\mathbf{v}$**.

b) **Przekształcenie $F\colon V \to V'$ różni się od liniowego o przesunięcie**, gdy dla pewnego wektora $\mathbf{v}' \in V'$ przekształcenie $L := F - \mathbf{v}'$ jest liniowe. Oczywiście, wtedy $F(\mathbf{0}) - \mathbf{v}' = \mathbf{0}$, tzn. $F = F(\mathbf{0}) + L$, gdzie $L \in \mathcal{L}(V, V')$.

Uwaga 1. Ponieważ dla $\mathbf{v}' \in V'$ i przekształceń $L\colon V \to V'$ ma miejsce równość $L + \mathbf{v}' = (I_{V'} + \mathbf{v}') \circ L$, to przekształcenie różniące się od liniowego o przesunięcie powstaje z przesunięcia przez złożenie go (z prawa) z przekształceniem liniowym.

Przypomnijmy też, że **warstwą** w przestrzeni liniowej V, **względem** (liniowej) podprzestrzeni $V_0 \subset V$, nazywamy każdy zbiór $V_0 + \mathbf{v}$, gdzie $\mathbf{v} \in V$. Dwie warstwy względem tej samej podprzestrzeni albo są rozłączne, albo równe – są one bowiem klasami abstrakcji relacji $\mathbf{v}_1 \sim \mathbf{v}_2 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in V_0$. Zbiór $\mathbb{A} \subset V$, będący warstwą względem V_0, wyznacza V_0 jednoznacznie wzorem $V_0 = \mathbb{A} - \mathbf{a}$, dla dowolnego $\mathbf{a} \in A$. (Patrz zadanie 1a) w §V.2.2.) Tę jedyną podprzestrzeń liniową V_0, względem której $\mathbb{A}$ jest warstwą, nazywamy **przestrzenią kierunkową** warstwy $\mathbb{A}$ i oznaczamy na ogół $T_{\mathbb{A}}$. Oczywiście,

$$\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \in T_{\mathbb{A}} \ \text{ dla } \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{A}\ , \quad \text{oraz } \ \mathbf{a} + \mathbf{v} \in \mathbb{A} \ \text{ dla } \mathbf{a} \in \mathbb{A}, \mathbf{v} \in T_{\mathbb{A}}\ . \tag{1}$$

Zadanie 1. Przekształcenie, $F\colon V \to V'$ różniące się od liniowego o przesunięcie, przeprowadza, zbiór, będący warstwą w V, na warstwę w V'.

§ 2. Przestrzenie afiniczne i przestrzenie euklidesowe afiniczne (wstęp).

1. Przestrzenie, podprzestrzenie i przekształcenia afiniczne.

W tym paragrafie oznaczamy przez $\mathbb{F}$ ustalone ciało. Zajmować się będziemy grupą $G = \mathrm{GA}(\mathbb{F}^k)$, a G–zgodne przekształcenia nazywać będziemy **afinicznie zgodnymi**.

Definicja. k–**wymiarową przestrzenią afiniczną** (nad $\mathbb{F}$) nazywamy parę $(\mathbb{A}, M_{\mathbb{A}})$, gdzie $\mathbb{A}$ jest zbiorem równolicznym z $\mathbb{F}^k$, zaś $M_{\mathbb{A}}$ jest afinicznie zgodnym atlasem bijekcji $\mathbb{A} \to \mathbb{F}^k$. Elementy atlasu nazywamy **mapami** tej przestrzeni afinicznej, a liczbę k jej **wymiarem** i oznaczamy $\dim(\mathbb{A})$. Elementy zbioru $\mathbb{A}$ na ogół nazywamy **punktami**.

Prócz przestrzeni afinicznych, wprowadzimy pozostałe ważne pojęcia wymienione w tytule punktu. Zrobimy to tak, by miały one własności podobne do spotykanych w innych teoriach matematycznych, n.p. w rozważanej dotąd teorii przestrzeni liniowych. Do końca p. 3 ustalamy przestrzenie afiniczne $(\mathbb{A}, M_{\mathbb{A}})$, $(\mathbb{A}', M_{\mathbb{A}'})$ i $(\mathbb{A}'', M_{\mathbb{A}''})$, wymiarów k, l, m, odpowiednio. (Czasem nakładamy na nie pewne dodatkowe założenia.) Oto nasze „docelowe" stwierdzenia, opisujące własności wprowadzanych pojęć:

Stwierdzenie 1. *a) Złożenie przekształceń afinicznych $\mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ i $\mathbb{A}' \to \mathbb{A}''$ jest przekształceniem afinicznym. Przekształcenie identycznościowe $I_{\mathbb{A}}\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ jest afiniczne.*

b) Odwrotność bijektywnego przekształcenia afinicznego też nim jest.

c) Gdy przekształcenie afiniczne $\mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ jest różnowartościowe (odp. jest „na", wzgl. jest bijekcją), to $\dim \mathbb{A} \le \dim \mathbb{A}'$ (odp. $\dim \mathbb{A} \ge \dim \mathbb{A}'$, wzgl. $\dim \mathbb{A} = \dim \mathbb{A}'$).

Stwierdzenie 2. *Przy przekształceniu afinicznym, obraz podprzestrzeni jest podprzestrzenią, a przeciwobraz podprzestrzeni jest podprzestrzenią lub jest pusty.*

Stwierdzenie 3. *a) Podprzestrzeń $\mathbb{A}_0$ przestrzeni $\mathbb{A}$ jest jej podzbiorem i jest też przestrzenią afiniczną. Ponadto,* $\dim(\mathbb{A}_0) < \dim(\mathbb{A})$ *gdy* $\mathbb{A}_0 \neq \mathbb{A}$.

b) Niech przekształcenie afiniczne $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ i podprzestrzenie $\mathbb{A}_0$, $\mathbb{A}'_0$ przestrzeni $\mathbb{A}$ i $\mathbb{A}'$, odpowiednio, spełniają warunek $F(\mathbb{A}_0) \subset \mathbb{A}'_0$. Wówczas zawężone przekształcenie $F_0\colon \mathbb{A}_0 \to \mathbb{A}'_0$, określone wzorem $\mathbb{A}_0 \ni a \mapsto F(a) \in \mathbb{A}'_0$, jest afiniczne.

Przed dowodem musimy określić, czym są podprzestrzenie i przekształcenia afiniczne.

Definicja. Powiemy, że w przekształcenie $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ jest **w mapach** $S \in M_{\mathbb{A}}, S' \in M_{\mathbb{A}'}$ **zadane przekształceniem** $\overline{F}\colon \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$, jeśli $\overline{F} = S'FS^{-1}$. Mówimy też wtedy, że przekształcenia F i $\overline{F}$ **odpowiadają** każde drugiemu **w mapach** S, S' (lub: **w mapie** S, o ile $\mathbb{A} = \mathbb{A}'$ i $S = S'$).

Uwaga 1. Ponieważ mapy S i S' są bijekcjami, więc gdy jedno z przekształceń F i $\overline{F}$ jest różnowartościowe, czy jest „na", to drugie też jest takie.

Lemat 1. *Ustalmy przekształcenie $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ oraz mapy $S, S_1 \in M_{\mathbb{A}}$ i $S', S'_1 \in M_{\mathbb{A}'}$. Jeśli $S'FS^{-1}\colon \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ różni się od przekształcenia liniowego o przesunięcie, to $S'_1FS_1^{-1}$ też ma tę własność.*

Dowód. Ponieważ $S, S_1 \in M_{\mathbb{A}}$, więc $H_1 := SS_1^{-1} \in \mathrm{GA}(\mathbb{F}^k)$, i podobnie $H_2 := S'_1(S')^{-1} \in \mathrm{GA}(\mathbb{F}^l)$. Każde z przekształceń $H_1, S'FS^{-1}$ i H_2 różni się od liniowego o przesunięcie (z definicji $\mathrm{GA}(\mathbb{F}^n)$ lub z założenia). Ich złożenie $H_2(S'FS^{-1})H_1$, równe $S'_1FS_1^{-1}$, też ma więc tę własność; patrz lemat 1a) z §1.1. □

Definicja. Przekształcenie $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ jest **afiniczne**, gdy w pewnych (równoważnie: w każdych) mapach S, S' odpowiada mu przekształcenie różniące się od liniowego o przesunięcie. Zbiór takich przekształceń oznaczymy przez $\mathcal{A}(\mathbb{A}, \mathbb{A}')$ lub, gdy chcieć zaznaczyć atlasy, przez $\mathcal{A}((\mathbb{A}, M_{\mathbb{A}}), (\mathbb{A}', M_{\mathbb{A}'}))$. Bijektywne przekształcenia afiniczne nazywamy **izomorfizmami afinicznymi**.

Dowód stwierdzenia 1. Część c) stwierdzenia wynika z lematu 1b) w §1.1 i uwagi 1, a części a) i b) – z lematu 1 w §1.1 i poniższego:

Lemat 2. *Jeśli w mapach S, S' przekształceniu $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ odpowiada przekształcenie $\overline{F}\colon \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$, a w mapach S', S'' przekształceniu $G\colon \mathbb{A}' \to \mathbb{A}''$ odpowiada przekształcenie $\overline{G}\colon \mathbb{F}^l \to \mathbb{F}^m$, to w mapach S, S'' złożeniu $G \circ F$ odpowiada złożenie $\overline{G} \circ \overline{F}$. (Tu, $S \in M_{\mathbb{A}}, S' \in M_{\mathbb{A}'}, S'' \in M_{\mathbb{A}''}$.) Ponadto, jeśli przekształcenie F^{-1} istnieje, to istnieje też przekształcenie $\overline{F}^{-1}$ i odpowiada ono w mapach S', S przekształceniu F^{-1}.*

Dowód. $S''(GF)S^{-1} = (S''G(S')^{-1})(S'FS^{-1}) = \overline{G} \circ \overline{F}$, i analogicznie dla F^{-1}. ⊟

Gdy przekształcenie $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ jest afiniczne, to nietrudno jest obrać mapy $S \in M_{\mathbb{A}}, S' \in M_{\mathbb{A}'}$, w których odpowiada mu przekształcenie liniowe. By to zauważyć, przekształcenie $S\colon \mathbb{A} \to V$, gdzie V to przestrzeń wektorowa, nazwijmy **zaczepionym** w punkcie $a \in \mathbb{A}$, jeśli $S(a) = \mathbf{0}$.

Uwaga 2. a) Gdy przekształcenie S jest dowolne, to $T := S - S(a)$ jest zaczepione w a.

b) Wyżej, $T = U \circ S$, gdzie $U = I_V - S(a)$ jest przesunięciem przestrzeni V. Ponieważ $U \in \mathrm{GA}(V)$ to wynika stąd, że wychodząc od dowolnej mapy $S \in M_{\mathbb{A}}$ otrzymujemy zaczepioną w a mapę $S - S(a) \in M_{\mathbb{A}}$.

Uwaga 3. Gdy przekształcenie $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ jest afiniczne, to w mapach S, S', zaczepionych w a i $F(a)$, odpowiednio, odpowiada mu liniowe przekształcenie $\overline{F}$. (Istotnie, $\overline{F}$ różni od przekształcenia liniowego o przesunięcie i przeprowadza $\mathbf{0}$ na $\mathbf{0}$.)

Pojęcie podprzestrzeni wprowadzimy w dwóch częściach. Wpierw powiemy, które podzbiory przestrzeni afinicznej nazwiemy jej podprzestrzeniami, a potem zbiory te wyposażymy w atlasy.

Definicja. Zbiór $X \subset \mathbb{A}$ jest **podprzestrzenią** przestrzeni $\mathbb{A}$, jeśli pewna mapa $S \in M_{\mathbb{A}}$ przeprowadza X na podprzestrzeń liniową przestrzeni $\mathbb{F}^k$. W razie wątpliwości, n.p. gdy $\mathbb{A}$ jest zarazem przestrzenią liniową, używamy też nazwy **podprzestrzeń afiniczna**.

Lemat 3. *Gdy X jest podprzestrzenią w $\mathbb{A}$, to każda mapa $S \in M_{\mathbb{A}}$ przeprowadza X na warstwę w $\mathbb{F}^k$, zaś każda mapa, zaczepiona w punkcie zbioru X, przeprowadza X na poprzestrzeń liniową przestrzeni $\mathbb{F}^k$.*

Dowód. Z założenia, istnieje mapa S_0 taka, że $Y := S_0(X)$ jest podprzestrzenią liniową (w $\mathbb{F}^k$). Zbiór $S(X) = SS_0^{-1}(Y)$ jest obrazem Y przy przekształceniu $SS_0^{-1} \in \mathrm{GA}(\mathbb{F}^k)$; jest on więc warstwą w $\mathbb{F}^k$ na podstawie zadania z §1.3. Gdy mapa S jest zaczepiona w punkcie zbioru X, to warstwa ta zawiera $\mathbf{0}$ i wobec tego jest podprzestrzenią liniową. □

Dowód stwierdzenia 2. Niech $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ będzie przekształceniem afinicznym, a X i X' będą podprzestrzeniami w $\mathbb{A}$ i $\mathbb{A}'$, odpowiednio. Obierzemy punkt $a \in X$ i mapy $S \in M_{\mathbb{A}}, S' \in M_{\mathbb{A}'}$ zaczepione w a i $F(a)$, odpowiednio; zapewni to, że przekształcenie $\overline{F}\colon \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$, odpowiadające F w mapach S, S', będzie liniowe. (Patrz uwaga 3.) Warunki, nałożone na a, zależą od rozpatrywanego przypadku.

i) Gdy X jest podprzestrzenia w $\mathbb{A}$, to dla zbadania $F(X)$ zażądamy, by $a \in X$. Z lematu wiemy, że $Y := S(X)$ jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{F}^k$. Jej obraz $\overline{F}(Y)$ przy przekształceniu liniowym $\overline{F}$ jest nią więc w $\mathbb{F}^l$. A że $\overline{F}(Y) = S'(F(X))$ (bo $Y = S(X)$ i $\overline{F}S = S'F$), to mapa S' zaświadcza, iż $F(X)$ jest podprzestrzenią w $\mathbb{A}'$.

ii) Gdy X' jest podprzestrzenią w $\mathbb{A}'$ i $F^{-1}(X') \neq \emptyset$, to dla zbadania $F^{-1}(X')$ zażądamy, by $a \in F^{-1}(X')$. Tym razem zbiór $Y' := S'(X')$ jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{F}^l$, więc $\overline{F}^{-1}(Y')$ jest nią w $\mathbb{F}^k$. A że $\overline{F}^{-1}(Y') = S(F^{-1}(X'))$, to mapa S zaświadcza o tym, iż $F^{-1}(X')$ jest podprzestrzenią w $\mathbb{A}$. □

Lemat 4. *Niech X będzie podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{A}$ i niech $x_0 \in X$. Wówczas:*

a) Istnieje mapa S taka, że $S(x_0) = \mathbf{0}$ i $S(X) = \mathrm{lin}(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_s)$ dla pewnego $s \leq k$.

b) Jeśli mapy $S, T \in M_{\mathbb{A}}$ i liczby s, t są takie, że $S(X) = \mathrm{lin}(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_s)$ i $T(X) = \mathrm{lin}(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_t)$, to $s = t$ i zawężenia $S_{|X}, T_{|X} : X \to \mathrm{lin}(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_s)$ są afinicznie zgodne, gdy utożsamić $\mathrm{lin}(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_s)$ z $\mathbb{F}^s$.

Dowód. Ad a). Obierzmy mapę $S_0 \in M_{\mathbb{A}}$, zaczepioną w x_0; wówczas $S_0(X)$ jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{F}^k$. Rozszerzmy jej dowolną bazę $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^s$ do bazy $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ przestrzeni $\mathbb{F}^k$ i określmy izomorfizm liniowy $K\colon \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^k$ warunkami $K(\mathbf{v}_i) = \mathbf{e}_i$ dla $i = 1, ..., k$. Ponieważ $K(S_0(X)) = \mathrm{lin}(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_s)$, więc możemy przyjąć $S := KS_0$.

Ad b). Niech $U := TS^{-1}$; wówczas $U(\mathrm{lin}(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_s)) = \mathrm{lin}(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_t)$ i $U \in \mathrm{GA}(\mathbb{F}^k)$. Stąd wynika łatwo, że zawężenie U_0 przekształcenia U jest bijekcją $\mathrm{lin}(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_s)$ na $\mathrm{lin}(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_t)$, różniącą się od liniowej o przesunięcie. To powoduje, że $s = t$, a gdy utożsamić $\mathrm{lin}(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_s)$ z $\mathbb{F}^s$, to $U_0 \in \mathrm{GA}(\mathbb{F}^s)$ –co kończy dowód tezy b). $\square$

Definicja. Niech X będzie podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{A}$. Obierzmy mapę $S \in M_{\mathbb{A}}$ taką, że $S(X) = \mathrm{lin}(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_s)$ dla pewnego $s \leq k$. Przy utożsamieniu $\mathrm{lin}(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_s)$ z $\mathbb{F}^s$, otrzymujemy indukowaną bijekcję $S_0 : X \to \mathbb{F}^s$; jak każda inna, wyznacza ona afinicznie zgodny atlas, do którego należy. Atlas ten nie zależy na mocy części b) lematu 4 od wyboru mapy S; nazywamy go **atlasem indukowanym** (przez $M_{\mathbb{A}}$).

Podprzestrzenie zawsze rozważać będziemy z atlasem indukowanym; będziemy je też odtąd oznaczać literami $\mathbb{A}, \mathbb{A}_0$ itp., podobnie jak przestrzenie afiniczne (bo stały się nimi z chwilą wyposażenia je w atlasy).

Dowód stwierdzenia 3. Część a) wynika z przyjętych definicji. By dowieść b), obierzmy mapy $S \in M_{\mathbb{A}}$ i $S' \in M_{\mathbb{A}'}$ takie, że $S(\mathbb{A}_0) = \mathrm{lin}(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_s)$ i $S'(\mathbb{A}'_0) = \mathrm{lin}(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_t)$ dla pewnych liczb $s \leq k$ i $t \leq l$. Zadbajmy też o to, by mapa S była zaczepiona w punkcie $a_0 \in \mathbb{A}_0$, a S' w puncie $F(a_0)$. W mapach tych, przekształceniu F odpowiada liniowe przekształcenie $\overline{F}\colon \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$, spełniające warunek $\overline{F}(\mathrm{lin}(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_s)) \subset \mathrm{lin}(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_t)$. Stąd wyznaczone przez $\overline{F}$ przekształcenie $\mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^t$, które oznaczmy $\overline{F}_0$, też jest liniowe. Dowodzi to tezy, bo $\overline{F}_0$ odpowiada przekształceniu F_0 w „mapach obciętych” $S_0\colon \mathbb{A}_0 \to \mathbb{F}^s$, $S'_0\colon \mathbb{A}'_0 \to \mathbb{F}^t$ atlasu indukowanego. $\square$

Wniosek 1. *Niech $\mathbb{A}_0$ będzie podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{A}$ i niech $X \subset \mathbb{A}_0$. Jeśli X jest podprzestrzenią w $\mathbb{A}_0$, to jest nią w $\mathbb{A}$, i odwrotnie.*

Dowód. Przekształcenie inkluzji $J\colon \mathbb{A}_0 \to \mathbb{A}$ jest afiniczne, wobec stwierdzenia 3b) zastosowanego do $F := I_{\mathbb{A}}$ (przy $\mathbb{A}' := \mathbb{A}$ i $\mathbb{A}'_0 := \mathbb{A}$). Gdy więc X jest podprzestrzenią w $\mathbb{A}_0$, to $J(X)$ jest nią w $\mathbb{A}$, a gdy jest podprzestrzenią w $\mathbb{A}$, to $J^{-1}(X)$ jest nią w $\mathbb{A}_0$. $\square$

Definicja. Podprzestrzeń $\mathbb{A}_0$ przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$ nazywamy **prostą**, gdy $\dim \mathbb{A}_0 = 1$, **płaszczyzną**, gdy $\dim \mathbb{A}_0 = 2$, zaś **hiperpłaszczyzną**, gdy $\dim \mathbb{A}_0 = \dim A - 1$.

Zadanie 1. Niech $F \in \mathcal{A}(\mathbb{A}, \mathbb{A})$; z definicji, w każdej mapie $S \in M_{\mathbb{A}}$ odpowiada mu przekształcenie $L_S + \mathbf{u}_S$, gdzie $L_S \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^k)$ i $\mathbf{u}_S \in \mathbb{F}^k$.

a) Dowieść, że operatory L_S i L_T, otrzymane dla rożnych map $S, T \in M_{\mathbb{A}}$, są podobne.

b) Przy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ dowieść, że warunek $\det(L_S) > 0$ nie zależy od mapy S, a zbiór określonych nim **zachowujących orientację przekształceń** F tworzy grupę.

Zadanie uzupełniające 1. Niech $\mathbb{A}$ oznacza sferę $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3\colon \|\mathbf{v}\| = 1\}$ z usuniętym biegunem $\mathbf{v}_0 := (0,0,1)$. Zbiór $\mathbb{A}$ wyposażono w atlas, wyznaczony przez rzut stereograficzny S z tego bieguna (tzn. $S(\mathbf{v})$ jest punktem przecięcia prostej $\mathbf{v}\mathbf{v}_0 \subset \mathbb{R}^3$ z płaszczyzną $x_3 = 0$, dla $\mathbf{v} \in \mathbb{A}$). Dowieść, że prostymi w $\mathbb{A}$ są przechodzące przez $\mathbf{v}_0$ euklidesowe okręgi w sferze $\|\mathbf{v}\| = 1$, z których $\mathbf{v}_0$ usunięto.

2. Obierzmy mapy $S \in M_{\mathbb{A}}$ i $S' \in M_{\mathbb{A}'}$ i wyposażmy $\mathbb{A} \times \mathbb{A}'$ w atlas, wyznaczony przez bijekcję $S \times S' : \mathbb{A} \times \mathbb{A}' \to \mathbb{F}^k \times \mathbb{F}^l = \mathbb{F}^{k+l}$. Dowieść, że otrzymana przestrzeń jest niezależna od wyboru map S i S', a gdy $\mathbb{A} = \mathbb{A}'$, to zbiór $\{(a,a)\colon a \in \mathbb{A}\}$ jest jej podprzestrzenią. Wywnioskować, że gdy przekształcenia $F\colon \mathbb{A}'' \to \mathbb{A}$ i $G\colon \mathbb{A}'' \to \mathbb{A}$ są afiniczne, to $\{x \in \mathbb{A}''\colon F(x) = G(x)\}$ jest podprzestrzenią w $\mathbb{A}''$.

2. Przestrzenie wektorowe jako afiniczne.

Niech V będzie k–wymiarową przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$. Każdy izomorfizm liniowy $S\colon V \to \mathbb{F}^k$ wyznacza na V atlas, który który okazuje się być od S niezależny. (Jest tak, bo gdy $S, T : V \to \mathbb{F}^k$ są izomorfizmami, to $TS^{-1} \in \mathrm{GL}(\mathbb{F}^k) \subset \mathrm{GA}(\mathbb{F}^k)$.) Gdy nie powiedziano inaczej, przestrzeń liniową rozpatrujemy z tym atlasem, który nazwiemy **standardowym**. Elementy zbioru V możemy nazywać punktami (otrzymanej przestrzeni afinicznej), jak również wektorami (wyjściowej przestrzeni wektorowej).

Stwierdzenie 1. *Niech przestrzenie liniowe V i V' rozpatrywane będą jako afiniczne.*

a) Przekształcenie afiniczne $F\colon V \to V'$ różni się od liniowego o przesunięcie.

b) Podprzestrzeń afiniczna przestrzeni V jest warstwą w V.

c) Implikacje odwrotne też mają miejsce.

Dowód. Obierzmy izomorfizmy liniowe $S\colon V \to \mathbb{F}^k$ i $S'\colon V' \to \mathbb{F}^l$. (Są one mapami dla przestrzeni afinicznych V i V', odpowiednio.) Wobec lematu 1 w §1.1, przekształcenie $F\colon V \to V'$ wtedy i tylko wtedy różni się od liniowego o przesunięcie, gdy odpowiadające mu przekształcenie $\overline{F} := S'FS^{-1}$ ma tę własność. Wraz z definicją, daje to tezę a) i odwrotną do niej. Dowód pozostałej części jest pozostawiony jako ćwiczenie. ⊟

Wniosek 1. *Niech $\mathbb{A}$ będzie podprzestrzenią afiniczną przestrzeni liniowej V.*

a) Gdy $\mathbf{0} \in \mathbb{A}$, to $\mathbb{A}$ jest podprzestrzenią liniową.

b) Gdy $\mathbb{A}$ jest prostą (tzn. $\dim \mathbb{A} = 1$), to $\mathbb{A} = \mathbb{F}\mathbf{u} + \mathbf{v}$ dla pewnych $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, gdzie $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, jak również $\mathbb{A} = \{\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}\colon \lambda \in \mathbb{F}\}$ dla każdych $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{A}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$). ⊟

Definicja. Powyższy wektor $\mathbf{u}$, wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do proporcjonalności, nazywamy **wektorem kierunkowym** lub **kierunkiem** rozważanej prostej.

Wykorzystajmy przestrzenie liniowe do badania dowolnej przestrzeni afinicznej $(\mathbb{A}, M_{\mathbb{A}})$.

Stwierdzenie 2. *Atlas $M_{\mathbb{A}}$ przestrzeni afinicznej $(\mathbb{A}, M_{\mathbb{A}})$ jest zbiorem wszystkich izomorfizmów afinicznych z $\mathbb{A}$ do $\mathbb{F}^k$. W szczególności, przestrzeń ta jest izomorficzna z $\mathbb{F}^k$.*

Dowód. Niech $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{F}^k$ będzie izomorfizmem i niech w mapach $T, I_{\mathbb{F}^k}$, gdzie $T \in M_{\mathbb{A}}$ obrano dowolnie, odpowiada mu przekształcenie $\overline{F}\colon \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^k$. Wówczas $\overline{F} \in \mathrm{GA}(\mathbb{F}^k)$, bo $\overline{F}$ jest 1-1 (w ślad za F) i różni się od przekształcenia liniowego o przesunięcie (wobec afiniczności F). Stąd $F = \overline{F}T \in M_{\mathbb{A}}$.

Odwrotnie, gdy $S \in M_{\mathbb{A}}$, to S jest izomorfizmem, bo w mapach S, $I_{\mathbb{F}^k}$ odpowiada mu przekształcenie $I_{\mathbb{F}^k} \in \mathrm{GA}(\mathbb{F}^k)$. □

Stwierdzenie 3. *a) Wśród podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{A}$, zawierających dany zbiór $X \neq \emptyset$, istnieje najmniejsza (tzn. zawarta w każdej innej). Jej obrazem przy izomorfiźmie S przestrzeni $\mathbb{A}$ na przestrzeń liniową, zaczepionym w punkcie zbioru X, jest* $\mathrm{lin}(S(X))$.

b) Niepuste przecięcie rodziny podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{A}$ jest podprzestrzenią.

Dowód. Skoro $\mathbf{0} \in S(X)$, to $\mathrm{lin}(S(X))$ jest na podstawie wniosku 1a) najmniejszą podprzestrzenią afiniczną, która zawiera $S(X)$. Teza a) wynika więc ze stwierdzenia 3 w p.1 i tego, że $Y \subset Z \Leftrightarrow S(Y) \subset S(Z)$ dla $Y, Z \subset \mathbb{A}$ (wobec bijektywności S). Rozumowanie dla b) jest analogiczne: badamy obraz rozważanych podprzestrzeni przy mapie, zaczepionej w ich punkcie wspólnym – jeśli taki punkt istnieje. ⊟

Definicja. a) Najmniejszą podprzestrzeń, o której mowa w a), nazywamy **powłoką afiniczną zbioru** X i oznaczamy $\mathrm{af}(X)$.

b) Zbiór X nazywamy **afinicznie niezależnym**, jeśli $x \notin \mathrm{af}(X \setminus \{x\})$ dla $x \in X$.

Zadania. (Nadal, $\mathbb{A}$ i $\mathbb{A}'$ są przestrzeniami afinicznymi nad $\mathbb{F}$, wymiaru k i l, odp.)

1. a) Niech $F \in \mathcal{A}(\mathbb{A}, \mathbb{A}')$ i $a \in \mathbb{A}$. Utwórzmy przekształcenie $J_a\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ takie, że w pewnej mapie, zaczepionej w a, odpowiada mu symetria $-I_{\mathbb{F}^k}$ przestrzeni $\mathbb{F}^k$, i analogicznie utwórzmy $J_{a'}\colon \mathbb{A}' \to \mathbb{A}'$, gdzie $a' := F(a)$. Udowodnić, że $FJ_a = J_{a'}F$.

b) Przy $F = I_{\mathbb{A}}$ wywnioskować, że wyżej przekształcenie J_a jest jedyne, i że w każdej mapie, zaczepionej w a, odpowiada mu symetria $-I_{\mathbb{F}^k}$. Ponadto, $J_a \circ J_a = I_{\mathbb{A}}$.

Uwaga 1. Przekształcenie J_a nazywamy **symetrią środkową** przestrzeni $\mathbb{A}$, o **środku** w a. Zbiór $X \subset \mathbb{A}$ nazywamy **symetrycznym względem punktu** a, zaś a jego **środkiem symetrii**, jeśli $J_a(X) = X$. Z zadania 1 wynika, że przekształcenie afiniczne F przeprowadza zbiór symetryczny względem a na symetryczny względem $a' := F(a)$. (Istotnie, gdy $J_a(X) = X$, to $J_{a'}(F(X)) = FJ_a(X) = F(X)$.) □

2. Udowodnić, że jeśli w pewnej mapie $S \in M_{\mathbb{A}}$ przekształceniu $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ odpowiada przesunięcie, to jest tak w każdej mapie. Przekształcenia F o tej własności nazywamy **przesunięciami** przestrzeni $\mathbb{A}$; dowieść, że tworzą one grupę przekształceń.

3. a) Przez różne punkty $a, b \in \mathbb{A}$ przechodzi dokładnie jedna prosta; oznaczamy ją ab. Jest ona równa $\mathrm{af}\{a, b\}$, a gdy $\mathbb{A}$ jest przestrzenią liniową, to $ab = \{\lambda a+(1-\lambda)b\colon \lambda \in \mathbb{F}\}$.
b) Symetria J_a względem punktu a przeprowadza prostą ab w siebie.

4. Niech $2_{\mathbb{F}} \neq 0_{\mathbb{F}}$ (lub, ogólniej, $\#\mathbb{F} > 2$). Niepusty zbiór $\mathbb{A}_0 \subset \mathbb{A}$ wtedy i tylko wtedy jest podprzestrzenią w $\mathbb{A}$, gdy $ab \subset \mathbb{A}_0$ dla każdych $a, b \in \mathbb{A}_0$. (Wskazówka: użyć mapy zaczepionej w $a_0 \in \mathbb{A}_0$ i skorzystać ze stwierdzenia 3a) i zadania[1] 8a) z §III.1.3.)

5. Proste K, L w przestrzeni afinicznej nazwiemy **równoległymi**, jeśli w pewnej jej mapie S, wektor kierunkowy prostej $S(K)$ jest nim zarazem dla prostej $S(L)$. Dowieść, że:
a) bez zmiany sensu można w tej definicji zastąpić słowo „pewnej" przez „każdej";
b) przekształcenie afiniczne przeprowadza proste równoległe na równoległe.

6. a) Dla $a_0, ..., a_n \in \mathbb{A}$ zachodzi $\dim(\mathrm{af}\{a_0, ..., a_n\}) \leq n$.
b) Dla $X \subset \mathbb{A}$ i $F \in \mathcal{A}(\mathbb{A}, \mathbb{A}')$ zachodzi $F(\mathrm{af}(X)) = \mathrm{af}(F(X))$.

Zadanie uzupełniające 1. Niech przestrzeń afiniczna $\mathbb{A}$ nad ciałem $\mathbb{F}$ będzie sumą mnogościową skończenie wielu swych podprzestrzeni. Udowodnić, że gdy ciało $\mathbb{F}$ jest nieskończone, to któraś z tych podprzestrzeni jest równa $\mathbb{A}$. Czy istotne jest to, że $\#\mathbb{F} = \infty$?

Zadanie uzupełniające 2. Dla $X, Y \subset \mathbb{A}$ dowieść, że $\mathrm{af}(X \cup Y) = \mathrm{af}(\mathrm{af}(X) \cup Y)$.

3. Układy odniesienia; przypadek podprzestrzeni przestrzeni liniowej.

Definicja. Układ punktów $(a_i)_{i=0}^k$ przestrzeni $\mathbb{A}$ jest **układem odniesienia w** $\mathbb{A}$, jeśli $k = \dim \mathbb{A}$ i $\mathrm{af}\{a_0, ..., a_k\} = \mathbb{A}$. Przestrzeń $\mathbb{F}^k$ ma wyróżniony układ odniesienia, nazywany **standardowym**; jest nim $(\mathbf{e}_i)_{i=\mathbf{0}}^k$, gdzie $\mathbf{e}_0 := \mathbf{0}_k$, a $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^k$ to baza standardowa przestrzeni liniowej $\mathbb{F}^k$.

Uwaga 1. a) Obraz układu odniesienia w $\mathbb{A}$, przy izomorfiźmie $S\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$, jest układem odniesienia w przestrzeni $\mathbb{A}'$. (Korzystamy z zadania 6b) w p.2.)

b) Gdy wyżej $\mathbb{A}'$ jest przestrzenią liniową i $S(a_0) = \mathbf{0}$, to $(a_i)_{i=0}^k$ jest układem odniesienia w $\mathbb{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(S(a_i))_{i=1}^k$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{A}'$. (Wynika to ze stwierdzenia 3a) w p.2, bo warunek $\mathrm{af}\{a_0, ..., a_k\} = \mathbb{A}$ okazuje się równoważny temu, by $\mathrm{lin}\{\mathbf{0}, S(a_1), ..., S(a_k)\} = \mathbb{A}'$ –a więc temu, by układ $(S(a_i))_{i=1}^k$ był bazą dla $\mathbb{A}'$.)

---

[1]Brzmi ono: gdy V i V' są przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{F}$ i $\#\mathbb{F} > 2$, to a) zbiór $X \subset V$ jest podprzestrzenią liniową wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{0} \in X$ i $\lambda\mathbf{v} + (1-\lambda)\mathbf{w} \in X \ \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X, \ \lambda \in \mathbb{F}$, oraz b) przekształcenie $L : V \to V'$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ i $L(\lambda\mathbf{v} + (1-\lambda)\mathbf{w}) = \lambda L(\mathbf{v}) + (1-\lambda)L(\mathbf{w}) \ \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \ \lambda \in \mathbb{F}$.

Stwierdzenie 1. *Niech $(a_i)_{i=0}^k$ będzie układem odniesienia w $\mathbb{A}$, a $(a'_i)_{i=0}^k$ układem punktów w $\mathbb{A}'$. Wówczas istnieje jedyne przekształcenie afiniczne $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ takie, że $F(a_i) = a'_i$ $\forall i$. Przekształcenie to jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $(a'_i)_{i=0}^k$ jest układem odniesienia w $\mathbb{A}'$.*

Dowód. Oznaczmy przez $S : \mathbb{A} \to V$ i $S' : \mathbb{A}' \to V'$ izomorfizmy afiniczne na przestrzenie liniowe V i V', odpowiednio, i zażądajmy, by $S(a_0) = \mathbf{0}$ i $S'(a'_0) = \mathbf{0}$. Wiemy, że $(S(a_i))_{i=1}^k$ jest bazą w V. Istnieje więc jedyne takie przekształcenie liniowe $L : V \to V'$, że $L(S(a_i)) = S'(a'_i)$ dla $i = 1, ..., k$. Za szukane przekształcenie $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ można obrać (wyłącznie) przekształcenie $(S')^{-1}LS$. Jest ono bijekcją, gdy jest nią L, tzn. gdy $(S'(a'_i))_{i=1}^k$ jest bazą przestrzeni V'. Ostatni warunek jest równoważny temu, by $(a'_i)_{i=0}^k$ było układem odniesienia w $\mathbb{A}'$. (Por. ponownie uwagę 1.) □

Uwaga 2. Dla układu odniesienia $(a_i)_{i=0}^k$ w $\mathbb{A}$ istnieje więc jedyna mapa $S \in M_{\mathbb{A}}$ taka, że $S(a_i) = \mathbf{e}_i$ dla $i = 0, ..., k$. Mapę tę nazwiemy **wyznaczoną** przez ten układ, a ciąg $S(a) \in \mathbb{F}^k$ – **ciągiem współrzędnych kartezjańskich** punktu $a \in \mathbb{A}$ w tym układzie odniesienia (lub też: w mapie S). Każda mapa $S \in M_{\mathbb{A}}$ jest wyznaczona przez jedyny układ odniesienia, a mianowicie, przez $(S^{-1}(\mathbf{e}_i))_{i=0}^k$. (Jest to układ odniesienia, bo S^{-1} jest izomorfizmem i $(\mathbf{e}_i)_{i=0}^k$ jest układem odniesienia w $\mathbb{F}^k$.)

Do końca tego punktu zakładamy, że $\mathbb{A}$ i $\mathbb{A}'$ są podprzestrzeniami afinicznymi pewnych przestrzeni wektorowych $\widetilde{\mathbb{A}}$ i $\widetilde{\mathbb{A}'}$, odpowiednio. (Dotyczy to też zadań.) Przez $T_{\mathbb{A}}$ oznaczamy podprzestrzeń kierunkową podprzestrzeni $\mathbb{A}$, tzn. tę podprzestrzeń liniową przestrzeni $\widetilde{\mathbb{A}}$, względem której $\mathbb{A}$ jest warstwą. Podobne znaczenie ma $T_{\mathbb{A}'}$.

Stwierdzenie 2. *$(a_i)_{i=0}^k$ jest układem odniesienia w $\mathbb{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(a_i - a_0)_{i=1}^k$ jest bazą przestrzeni $T_{\mathbb{A}}$.*

Dowód. Wzór $\mathbb{A} \ni a \mapsto a - a_0$ zadaje zaczepiony w a_0 izomorfizm afiniczny $S : \mathbb{A} \to T_{\mathbb{A}}$. (Jest to bowiem obcięcie do $\mathbb{A}$ izomorfizmu $I_{\widetilde{\mathbb{A}}} - a_0 : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$, przeprowadzającego $\mathbb{A}$ na $T_{\mathbb{A}}$; korzystamy ze stwierdzenia 1b) w p.2, stwierdzenia 3b) w p.1 i zależności (1) na końcu §1.1.) Odnosząc uwagę 1b) do tego izomorfizmu, otrzymujemy tezę. □

Stwierdzenie 3. *Niech $(a_i)_{i=0}^k$ będzie układem odniesienia w $\mathbb{A}$, a $(a'_i)_{i=0}^k$ układem punktów w $\mathbb{A}'$. Wówczas:*

a) każdy punkt $a \in \mathbb{A}$ ma jedyne przedstawienie $a = a_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i(a_i - a_0)$, gdzie $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{F}$ i działania wykonujemy w $\widetilde{\mathbb{A}}$;

b) wyżej, $(\lambda_i)_{i=1}^k$ jest ciągiem współrzędnych kartezjańskich punktu a w układzie $(a_i)_{i=0}^k$;

c) przekształcenie F, o którym mowa w stwierdzeniu 1, jest zadane wzorem $a_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i(a_i - a_0) \mapsto a'_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i(a'_i - a'_0)$, dla $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{F}$.

Dowód. Teza a) wynika ze stwierdzenia 2, bo $a - a_0 \in T_{\mathbb{A}}$.

Ad c). Rozważmy przesunięcia $S\colon \mathbb{A} \to T_{\mathbb{A}}$ i $S'\colon \mathbb{A}' \to T_{\mathbb{A}'}$, zadane wzorami $S(a) = a - a_0$ i $S'(a') := a' - a'_0$. Wzór na przekształcenie F, użyty w dowodzie stwierdzenia 1, sprowadza się do podanego w c).

Ad b). Gdy w c) przyjąć $\mathbb{A}' = \mathbb{F}^k$ i $a'_i = \mathbf{e}_i$ $(i = 0, ..., k)$, to otrzymamy równość $F(a_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i(a_i - a_0)) = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$ dla mapy F, wyznaczonej przez układ $(a_i)_{i=0}^k$. ⊟

Uwaga 3. a)* W wielu polskich podręcznikach, układ odniesienia nazywany jest **bazą punktową**. Gdy $\mathbb{A}$ jest warstwą przestrzeni wektorowej, informację o takim układzie $(a_i)_{i=0}^k$ można przekazać, wskazując punkt a_0 i wektory $\mathbf{v}_i := a_i - a_0 \in T_{\mathbb{A}}$. W tym kontekście mowa jest o **układzie bazowym** $(a_0; \mathcal{V})$, w którym $a_0 \in \mathbb{A}$ i $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ jest bazą przestrzeni kierunkowej $T_{\mathbb{A}}$, por. stwierdzenie 2.

b) Część b) stwierdzenia 1 oznacza, że ciągiem współrzędnych kartezjańskich punktu a w układzie odniesienia $(a_i)_{i=0}^k$ jest ciąg $[a - a_0]_{\mathcal{V}}$ wpółrzędnych wektora $a - a_0$ w bazie $\mathcal{V} = (a_i - a_0)_{i=1}^k$ przestrzeni kierunkowej $T_{\mathbb{A}}$.

Stwierdzenie 4. *Gdy $X \subset \mathbb{A}$ i $p_0 \in X$, to*

$$\mathrm{af}(X) = \{p_0 + \textstyle\sum_{i=1}^s \lambda_i(p_i - p_0)\colon s \in \mathbb{N}, p_1, ..., p_s \in X, \lambda_1, ..., \lambda_s \in \mathbb{F}\}, \text{ a także}$$
$$\mathrm{af}(X) = \{\textstyle\sum_{i=0}^s \lambda_i p_i\colon s \in \mathbb{N}, \lambda_0, ..., \lambda_s \in \mathbb{F}, p_1, ..., p_s \in X \text{ i } \sum_{i=0}^s \lambda_i = 1\}.$$

Dowód. Ponownie, rozpatrzmy izomorfizm $S\colon \mathbb{A} \to T_{\mathbb{A}}$, zadany wzorem $S(a) := a - p_0$. Wobec stwierdzenia 3a) w p.2, przeprowadza on $\mathrm{af}(X)$ na zbiór $\mathrm{lin}(S(X))$, tzn. na $\{\sum_{i=1}^s \lambda_i(p_i - p_0)\colon s \in \mathbb{N}, p_1, ..., p_s \in X, \lambda_1, ..., \lambda_s \in \mathbb{F}\}$. A że $S(\mathrm{af}(X)) = \mathrm{af}(X) - p_0$, to wynika stąd pierwsza równość tezy. Druga wynika zaś z pierwszej i tego, że $p_0 + \sum_{i=1}^s \lambda_i(p_i - p_0) = \sum_{i=0}^s \lambda_i p_i$ gdy $\sum_i \lambda_i = 1$. □

Definicja. Kombinację $\sum_{i=0}^s \lambda_i p_i$ nazywamy **afiniczną** lub **barycentryczną**, jeśli $\sum_i \lambda_i = 1$. Ze stwierdzenia 3a) wynika, że jeśli $(a_i)_{i=0}^k$ jest układem odniesienia w $\mathbb{A}$ i $a \in \mathbb{A}$, to a jednoznacznie zapisuje się jako kombinacja barycentyczna $\sum_{i=0}^k \lambda_i a_i$. Jej współczynniki $\lambda_0, ..., \lambda_k$ to **współrzędne barycentryczne** punktu a w tym układzie.

Stwierdzenie 5. *Gdy $2_{\mathbb{F}} \neq 0_{\mathbb{F}}$ (lub, ogólniej, $\#\mathbb{F} > 2$), to następujące warunki są równoważne dla przekształcenia $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$:*

a) przekształcenie F jest afiniczne;

b) F zachowuje kombinacje afiniczne, tzn. $F(\sum_{i\in I} \lambda_i a_i) = \sum_{i\in I} \lambda_i F(a_i)$ dla każdych skończonych układów $\{a_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{A}$ i $\{\lambda_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{F}$ takich, że $\sum_i \lambda_i = 1$;

c) F zachowuje kombinacje afiniczne każdych dwóch punktów,

d) istnieje punkt $a_0 \in \mathbb{A}$ i przekształcenie liniowe $L\colon T_{\mathbb{A}} \to T_{\mathbb{A}'}$ takie, że $F(a) = F(a_0) + L(a - a_0)$ dla wszystkich $a \in \mathbb{A}$.

Dowód zawarty jest w poniższym zadaniu 1. (Przyjmujemy założenia stwierdzenia.)

Zadanie 1. Niech a_0, a'_0, S i S' będą jak w dowodzie stwierdzenia 1.

i) Dowieść, że każde z przesunięć $S, S^{-1}, S', (S')^{-1}$ zachowuje kombinacje afiniczne.

ii) Wywnioskować, że F zachowuje kombinacje afiniczne wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje je przekształcenie $L := S'FS^{-1}$.

iii) Odnotować, że przekształcenie F jest afiniczne wtedy i tylko wtedy, gdy L jest liniowe, i w oparciu o to i o zadanie z odnośnika w p.2 udowodnić twierdzenie.

Zadanie 2. Udowodnić, że przekształcenia L z części d) stwierdzenia 2 spełnia warunek $F(a)-F(b) = L(a-b)$ dla wszystkich $a, b \in \mathbb{A}$, wobec czego jest jedyne i nie zależy od a_0.

Definicja. Przekształcenie $L \in \mathcal{L}(T_{\mathbb{A}}, T_{\mathbb{A}'})$, o kórym mowa wyżej, nazywane jest **pochodną** lub **częścią liniową** przekształcenia afinicznego F; oznaczamy je dF. [2]

Zadanie 3. Niech przekształcenie $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ będzie afiniczne i niech $(a_i)_{i=0}^k$ i $(a'_i)_{i=0}^l$ będą układami odniesienia w $\mathbb{A}$ i $\mathbb{A}'$, odpowiednio. Oznaczmy przez $\mathcal{V}$ bazę $(a_i - a_0)_{i=1}^k$ przestrzeni $T_{\mathbb{A}}$, a przez $\mathcal{V}'$ bazę $(a'_i - a'_0)_{i=1}^l$ przestrzeni $T_{\mathbb{A}'}$. Dowieść, że gdy $\mathbf{x}$ jest ciągiem współrzędnych punktu $a \in \mathbb{A}$ w układzie $(a_i)_{i=0}^k$, a $\mathbf{x}'$ ciągiem współrzędnych punktu $F(a)$ w układzie $(a'_i)_{i=0}^k$, to $\mathbf{x}' = [F(a_0)-a'_0]_{\mathcal{V}'}+[dF]_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}}\mathbf{x}$. (Mowa o współrzędnych kartezjańskich. Wskazówka: uwaga 3b), odniesiona do $\mathbf{x}'$ i $\mathbf{x}$, i zadanie 2.)

Zadanie 4. Niech $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{A}$. Dowieść równoważności warunków:

a) układ $(a_i)_{i=0}^n$ jest afinicznie niezależny;

b) żaden z punktów a_i nie jest kombinacją afiniczną pozostałych;

c) wektory $a_1 - a_0, ..., a_n - a_0$ przestrzeni $T_{\mathbb{A}}$ tworzą układ liniowo niezależny;

d) wektory $(a_0, 1), ..., (a_n, 1)$ przestrzeni $\widetilde{\mathbb{A}} \times \mathbb{F}$ tworzą układ liniowo niezależny.

Zadania ze zbioru Kostrykina: w §II.6.1, zadania 8,10–14,16–20,24,26,31–34. („Płaszczyznę" należy rozumieć jako „podprzestrzeń", a przestrzenie afiniczne –jako warstwy w przestrzeniach liniowych. „Współrzędne afiniczne" to układy bazowe.)

4. Euklidesowe przestrzenie afiniczne.

Definicja. a) Gdy $G = \mathrm{OA}(\mathbb{R}^k)$, to zamiast o G–zgodności przekształceń mówimy o ich **euklidesowej zgodności**. Przypomnijmy, że $\mathrm{OA}(\mathbb{R}^k)$ jest grupą, złożoną z przekształceń $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ postaci $L + \mathbf{u}$, gdzie $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$ i $L\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ jest izometrią liniową.

b) k–**wymiarową afiniczną przestrzenią euklidesową** nazywamy każdą parę $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$, gdzie $\mathbb{E}$ jest zbiorem mocy continuum, a $\mathcal{E}$ jest euklidesowo zgodnym atlasem bijekcji $\mathbb{E} \to \mathbb{R}^k$.

c) Gdy $\mathbb{E}$ jest wektorową przestrzenią euklidesową, to rozpatrujemy na niej atlas wyznaczony przez dowolną izometrię liniową $\mathbb{E} \to \mathbb{R}^k$, gdzie przestrzeń $\mathbb{R}^k$ wyposażona jest w standardowy iloczyn skalarny. (Wybór tej izometrii nie gra roli – dlaczego?)

[2] W rachunku różniczkowym, pochodną w punkcie $a \in \mathbb{R}^k$ przekształcenia $F\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ definiuje się jako przekształcenie liniowe, „dostatecznie bliskie" przekształceniu $\mathbb{R}^k \ni \mathbf{v} \mapsto F(a+\mathbf{v})-F(a)$. Gdy F różni się o przesunięcie od przekształcenia liniowego L, to pochodna ta nie zależy od a i jest równa L.

Uwaga 1. Niech $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$ będzie euklidesową przestrzenią afiniczną. Dana mapa $S \in \mathcal{E}$ wyznacza, jak każda bijekcja $\mathbb{E} \to \mathbb{R}^k$, pewien afinicznie zgodny atlas $M_{\mathbb{A}}$ na $\mathbb{E}$. Atlas ten zawiera $\mathcal{E}$ i jest niezależny od wyboru mapy $S \in \mathcal{E}$ – co wynika stąd, że dla $S, T \in \mathcal{E}$ mamy $TS^{-1} \in \mathrm{OA}(\mathbb{R}^k) \subset \mathrm{GA}(\mathbb{R}^k)$. Atlas $M_{\mathbb{A}}$ nazywamy **atlasem afinicznym** przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$, zaś atlas $\mathcal{E}$ –jej **atlasem euklidesowym**. Euklidesową przestrzeń afiniczna można więc też traktować jako przestrzeń afiniczną (z wyznaczonym przez $\mathcal{E}$ atlasem $M_{\mathbb{A}}$). Pozwala to mówić o przekształceniach afinicznych pomiędzy przestrzeniami euklidesowymi i o (afinicznych) podprzestrzeniach takich przestrzeni. (Odpowiednik tej uwagi pozostanie słuszny dla dowolnej przestrzeni, wyposażonej w G–zgodny atlas, gdzie G jest podgrupą grupy $\mathrm{GA}(\mathbb{F}^k)$.)

Atlas euklidesowy umożliwia zdefiniowanie nowych pojęć. Oto kilka z nich.

Przykład 1. Niech $o, p, q \in \mathbb{E}$. Obierzmy mapę $S \in \mathcal{E}$, zaczepioną w o, i niech $\alpha := \angle\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ oznacza miarę kąta pomiędzy wektorami $\mathbf{u} := S(p)$ i $\mathbf{v} := S(q)$ w przestrzeni unitarnej $\mathbb{R}^k$ (ze standardowym iloczynem skalarnym). Wartość α nie zależy od wyboru S. Istotnie, gdy przy pomocy innej mapy $S' \in \mathcal{E}$ zaczepionej w o zdefiniujemy $\mathbf{u}', \mathbf{v}'$ i α', to $\mathbf{u}' = U(\mathbf{u})$ i $\mathbf{v}' = U(\mathbf{v})$ dla $U = S'S^{-1}$ będącego liniową izometrią, wobec czego $\alpha = \alpha'$. (Liniowość U wynika stąd, że $U(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ i $U \in \mathrm{OA}(\mathbb{R}^k)$.)

Definicja. a) Liczbę α nazywamy **miarą kąta** *poq* i oznaczamy $\angle\{poq\}$.

b) **Odległość** $d(p, q)$ **punktów** $p, q \in \mathbb{E}$ definijemy jako liczbę $\|S(p) - S(q)\|$, gdzie $S \in \mathcal{E}$ jest dowolną mapą euklidesową, zaś $\| \ \|$ oznacza standardową normę w $\mathbb{R}^k$. (Liczba ta nie zależy od S; dlaczego?)

Definicja. Niech $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$ i $(\mathbb{E}', \mathcal{E}')$ będą afinicznymi przestrzeniami euklidesowymi wymiarów k i l, odpowiednio, a $X \subset \mathbb{E}$ będzie niepustym zbiorem. Przekształcenie $F\colon X \to \mathbb{E}'$ nazywamy **zanurzeniem izometrycznym**, gdy $d(F(x_1), F(x_2)) = d(x_1, x_2)\ \forall x_1, x_2 \in X$. Gdy ponadto $F(X) = \mathbb{E}'$, to F nazywamy **izometrią**.

Uwaga 2. a) Złożenie zanurzeń izometrycznych też nim jest, i tak samo dla izometrii.

b) Każda mapa atlasu $\mathcal{E}$ jest izometrią na przestrzeń $\mathbb{R}^k$ (ze standardową odległością).

Twierdzenie 1. *Przy oznaczeniach Definicji, zanurzenie izometryczne* $F\colon X \to \mathbb{E}'$ *jednoznacznie przedłuża się do afinicznego zanurzenia izometrycznego* $\widetilde{F}\colon \mathrm{af}(X) \to \mathbb{E}'$.

Dowód. Obierzmy $x_0 \in X$ i mapy $S \in \mathcal{E}, S' \in \mathcal{E}'$, zaczepione w x_0 i $F(x_0)$, odpowiednio. Przekształcenie $G\colon S(X) \to \mathbb{R}^l$, zadane wzorem $S(X) \ni x \mapsto S'FS^{-1}(x)$, spełnia warunek $G(\mathbf{0}_k) = \mathbf{0}_l$ i jest zanurzeniem izometrycznym (bo są nimi F, S i S'). Na podstawie twierdzenia 2 w §V.5.1, G przedłuża się jednoznacznie do liniowego zanurzenia izometrycznego $\widetilde{G}\colon \mathrm{lin}(S(X)) \to \mathbb{R}^l$. Za $\widetilde{F}$ możemy więc obrać (tylko) przekształcenie $S\widetilde{G}(S')^{-1}$, patrz stwierdzenie 3a) w p.2. ⊟

Wniosek 1. *Każde zanurzenie izometryczne* $\mathbb{E}$ *w* $\mathbb{E}'$ *jest afiniczne.* □

Wniosek 2. *Zanurzenie izometryczne z* $\mathbb{R}^k$ *w* $\mathbb{R}^l$ *(ze standardowymi metrykami) jest postaci* $\mathbb{R}^k \ni \mathbf{v} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{u} \in \mathbb{R}^l$*, gdzie* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^l$ *i kolumny macierzy* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$ *tworzą układ ortonormalny. Implikacja odwrotna też jest prawdziwa.*

Dowód. Z wniosku 1 wynika, że zanurzenie izometryczne jest powyższej postaci dla pewnej macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$. Jednak z wraz z tym przekształceniem, również i $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{v}$ jest zanurzeniem – wobec czego macierz $\mathbf{A}$ ma wymienione własności, patrz §V.3.2. ⊟

Wniosek 3. *Zanurzenie izometryczne (odp. izometria)* $\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ *istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy* $\dim \mathbb{E} \leq \dim \mathbb{E}'$ *(odp.* $\dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{E}'$*). Zanurzeniu takiemu odpowiada w mapach euklidesowych przekształcenie postaci opisanej we wniosku 2.* ⊟

Uwaga 3. * Nietrudno zdefiniować zespolone odpowiedniki euklidesowych przestrzeni afinicznych, oraz ich zanurzenia izometryczne i izometrie. Odpowiedniki twierdzenia 1 i dalszych wniosków nie są jednak prawdziwe; patrz ćwiczenie po wniosku 1 w §V.5.1). ⊟

Definicja. Układ punktów $(p_i)_{i=0}^n$ euklidesowej przestrzeni afinicznej nazwiemy **ortonormalnym** lub **prostokątnym**, gdy $d(p_0, p_i) = 1$ i $\angle\{p_i p_0 p_j\} = \pi/2$ dla $1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j$.

Uwaga 4. Dla punktów $p_0, ..., p_k \in \mathbb{E}$ równoważne są warunki:
a) układ $(p_i)_{i=0}^k$ jest ortonormalny i $k = \dim \mathbb{E}$;
b) $(p_i)_{i=0}^k$ jest układem odniesienia, a wyznaczona niego mapa afiniczna jest euklidesowa.

Istotnie, gdy zachodzi b), to dla pewnej mapy euklidesowej S jest $p_i = S^{-1}(\mathbf{e}_i)\ \forall i$. Z definicji następującej po przykładzie 1 wynika więc, że układ $(p_i)_{i=1}^k$ spełnia warunek a), bo spełnia go układ $(\mathbf{e}_i)_{i=0}^k$. Odwrotnie, gdy $(p_i)_{i=0}^k$ jest jak w a), zaś S_0 jest dowolną mapą euklidesową, zaczepioną w p_0, to układ $(S_0(p_i))_{i=1}^k$ jest ortonormalną bazą przestrzeni $\mathbb{R}^k$, podobnie jak $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^k$. Istnieje więc izometria liniowa $T\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ taka, że $T(S_0(p_i)) = \mathbf{e}_i \forall i$. Tym samym dla $S := TS_0$ zachodzi $S \in \mathcal{E}$ (bo $S_0 \in \mathcal{E}$ i $T \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^k)$), i S jest mapą afiniczną wyznaczoną przez układ $(p_i)_{i=0}^k$ (bo $S(p_i) = \mathbf{e}_i\ \forall i$).

Zadanie 1. a) Niech $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, a L będzie obrotem liniowym płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, różnym od identyczności. Dowieść, że przekształcenie $L + \mathbf{u}$ ma punkt stały i w dowolnej mapie euklidesowej, zaczepionej w tym punkcie, odpowiada mu obrót liniowy.

b) Dowieść podobnej tezy przy L będącym odbiciem prostej $\mathbb{R}$ względem zera.

c) Dowieść, że każda izometria przestrzeni euklidesowo-afinicznej $\mathbb{R}^k$ zapisuje się w pewnej mapie euklidesowej jako suma ortogonalna przekształceń, z których wszystkie poza być może jednym są przesunięciami prostych lub obrotami liniowymi płaszczyzn, a pozostałe (jeśli istnieje) jest liniowym odbiciem prostej. (Wskazówka: zapisać izometrię w postaci $L + \mathbf{u}$, gdzie $L \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^k)$ i $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$; do L zastosować wniosek 1 w §VI.3.3, a $\mathbf{u}$ rozbić na składowe w rozważanej we wniosku sumie prostej płaszczyzn i prostych.)

e) Wywnioskować, że zmieniająca orientację izometria płaszczyzny $\mathbb{E}^2$ jest **symetrią z poślizgiem**, tzn. w pewnej (euklidesowej) mapie odpowiada jej przekształcenie $(x_1, x_2) \mapsto (-x_1, x_2 + c)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$. Podobnie, zachowująca orientację izometria 3-wymiarowej przestrzeni $\mathbb{E}^3$ jest **ruchem śrubowym**, tzn. w pewnej mapie odpowiada jej przekształcenie, będące złożeniem obrotu wokół osi $\mathbb{R}\mathbf{e}_3$ z przesunięciem wzdłuż tej osi, lub jest przesunięciem. (Jest to **twierdzenie Chaslesa**.) Opisać też pozostałe izometrie przestrzeni $\mathbb{E}^2$ i $\mathbb{E}^3$.

Zadania ze zbioru Kostrykina: w §II.6.3, zadania 1^*, 2^*, 6–18, 23–26.

5. ** Co otrzymujemy dla liniowej zgodności: zadanie i komentarz.

Zadanie uzupełniające 1.** Nazwijmy bijekcje $S, T\colon A \to \mathbb{F}^k$ **liniowo zgodnymi**, gdy $TS^{-1} \in \mathrm{GL}(\mathbb{F}^k)$. Zmieńmy definicje z p.1, używając zgodności liniowej zamiast afinicznej. Otrzymamy klasę przestrzeni z wyróżnionymi atlasami i klasę przekształceń między nimi. (Pierwsze odpowiadają przestrzeniom afinicznym, a drugie przekształceniom afinicznym.) Udowodnić, że każdą z otrzymanych przestrzeni $(A, M_{\mathbb{A}})$ można wyposażyć w jednoznacznie wyznaczoną strukturę przestrzeni wektorowej tak, by wszystkie te przekształcenia stały się liniowe.

Uwaga 1. ** Zadanie to uzasadnia stwierdzenie ze wstępu do rozdziału II, iż teorię skończenie–wymiarowych przestrzeni liniowych można opisć używając jedynie przekształceń liniowych pomiędzy przestrzeniami współrzędnych. Możliwość ta nie jest jednak nęcąca: przestrzenie liniowe często w matematyce spotykamy i zastąpienie ich „przestrzeniami z liniowo zgodnymi atlasami" nie jest celowe.

Uwaga 2. ** Również teorię liniowych przestrzeni euklidesowych (odp. unitarnych) można ująć, posługując się atlasami „ortogonalnie zgodnymi" (odp. „unitarnie zgodnymi"). Teoria przestrzeni afinicznych tym więc wybiega poza to, co omawiano w poprzednich rozdziałach, że dopuszcza zgodność map względem grup nieco szerszych, niż liniowe, bo zawierających też przesunięcia. O ile przedtem badaliśmy (choć nie było to tak formułowane) własności niezmiennicze wględem grup liniowych, wymienionych w §1, to obecne zajęcie się przestrzeniami afinicznymi oznacza badanie własności niezmienniczych względem podgrup grup afinicznych $\mathrm{GA}(\mathbb{F}^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

§ 3. Funkcje kwadratowe na przestrzeniach afinicznych

Jak zawsze przy badaniu funkcji kwadratowych zakładamy, że w ciele skalarów $2_{\mathbb{F}} \neq 0_{\mathbb{F}}$. Ponadto, nie wymieniamy już atlasu przestrzeni afinicznej i dla prostoty mówimy, że przestrzenią tą jest zbiór $\mathbb{A}$ (zamiast: para $(\mathbb{A}, M_{\mathbb{A}})$). Oczywiście, domyślnie atlas $M_{\mathbb{A}}$ nadal istnieje i wielokrotnie wykorzystujemy mapy, czyli należące do $M_{\mathbb{A}}$ bijekcje $\mathbb{A} \to \mathbb{F}^k$.

Przy mnożeniu przez macierz, ciąg skalarów czy zmiennych utożsamiamy z macierzą o jednej kolumnie. Rozważane wielomiany kilku zmiennych są zawsze stopnia ≤ 2.

1. Afiniczna równoważność wielomianów kwadratowych

Definicje i oznaczenia. a) Wielomian $p = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + c$ będziemy krótko zapisywać $\mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^t\mathbf{x} + c$, gdzie $\mathbf{A} := (a_{ij})_{i,j=1}^{k}$, $\mathbf{b} := (b_i)_{i=1}^{k}$ i $\mathbf{x} := (x_i)_{i=1}^{k}$. Formę $\mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x}$ nazywamy **częścia główną** wielomianu p, a jej rząd i (gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) sygnaturę nazywamy **rzędem i sygnaturą wielomianu** p i oznaczamy $\mathrm{rk}(p)$ i $\sigma(p)$.

b) Niech $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ i $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$. Jeśli $\det(\mathbf{C}) \neq 0$, a po zastąpieniu w wielomianie p każdej ze zmiennych x_i przez $\sum_{j=1}^{k} c_{ij}y_j + v_i$ otrzymamy wielomian p' zmiennych $y_1, ..., y_k$, to powiemy, że **podstawienie $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{v}$ przeprowadza** p w p'. Podstawienie takie nazwiemy **afinicznym**, a gdy $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ –**liniowym**.

Nazwy zmiennych możemy zmieniać, i nierzadko będziemy traktować p' nadal jako wielomian zmiennych $x_1, ..., x_k$ (by nie wprowadzać ich zbyt wiele). Z rezultatów z §VII.1 wynika, że sformułowaną zależność można równoważnie wyrazić tak:

$$\mathbf{C} \text{ jest macierzą nieosobliwą i } p'(\mathbf{y}) = p(\mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{v}) \text{ dla wszystkich } \mathbf{y} \in \mathbb{F}^k \tag{2}$$

Gdy więc utożsamić wielomian p z odpowiadającą mu funkcją wielomianową, to podstawieniu $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{v}$ odpowiada złożenie p z izomorfizmem $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{v}$. Dlatego niekiedy mówimy o podstawieniu $\mathbf{x} = F(\mathbf{y})$, gdzie $F \in \mathrm{GA}(\mathbb{F}^k)$; piszemy też $p' = p \circ F$.

Uwaga 1. Bywa, że podstawienie $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{v}$ łatwiej jest wykorzystać w równoważnej postaci $\mathbf{y} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{v}$. Na przykład, podstawienie $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = 2x_2$ w oczywisty sposób przeprowadza $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ w y_1^2, podczas gdy przy użyciu zapisu $x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2$, $x_2 = \frac{1}{2}y_2$ nie jest to tak widoczne.

Definicja. Wielomiany $p, p' \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_k]$ są **afinicznie** (odp.: **liniowo**) **równoważne**, jeśli pewne podstawienie afiniczne (odp. liniowe) przeprowadza p w p'.

Uwaga 2. a) Zmiana kolejności zmiennych jest podstawieniem liniowym.

b) Tak afiniczna, jak i liniowa równoważność wielomianów są relacjami równoważności. (Wynika to stąd, że $\mathrm{GA}(\mathbb{F}^k)$ jest grupą.)

c) Afinicznie rownoważne wielomiany mają ten sam stopień. $\boxminus$

Twierdzenie 1. *Gdy podstawienie $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}+\mathbf{v}$ przeprowadza wielomian $p \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_k]_2$ w p' , to macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}'$ ich części głównych pozostają w zależności $\mathbf{A}' = \mathbf{C}^t\mathbf{A}\mathbf{C}$.*

Dowód. Zapiszmy p w postaci $\mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}^t\mathbf{x}+c$, gdzie $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^k$, $c \in \mathbb{F}$, $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ i $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$. Podstawienie $\mathbf{x} = \mathbf{z}+\mathbf{v}$ przeprowadza p w wielomian $(\mathbf{z}+\mathbf{v})^t\mathbf{A}(\mathbf{z}+\mathbf{v}) + \mathbf{b}^t(\mathbf{z}+\mathbf{v}) + c = \mathbf{z}^t\mathbf{A}\mathbf{z}+(2\mathbf{v}^t\mathbf{A}+\mathbf{b}^t)\mathbf{z}+(\mathbf{v}^t\mathbf{A}\mathbf{v}+\mathbf{b}^t\mathbf{v}+c)$, o tej samej macierzy $\mathbf{A}$ części głównej. Natomiast podstawienie $\mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ zmienia tę macierz w żądany sposób (patrz §VII.1.3). $\square$

Wniosek 1. *Części główne afinicznie równoważnych wielomianów kwadratowych są liniowo równoważne; mają one więc ten sam rząd, a przy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ i tę samą sygnaturę.*

2. Upraszczanie wielomianów kwadratowych podstawieniem afinicznym

Lemat 1. *Niech $p = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + c$, gdzie $\lambda_1, ..., \lambda_r \neq 0$ i $r \leq k$. Wówczas przesunięcie $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{v}$, o odpowiedni wektor $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$, przeprowadza p w wielomian $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 + \sum_{i=r+1}^{k} b_i y_i + c'$, dla pewnego skalara c'.*

Dowód. Mamy $p = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (x_i^2 + \frac{b_i}{\lambda_i} x_i) + \sum_{i=r+1}^{k} b_i x_i + c$. „Uzupełnianie do pełnego kwadratu" w daje $x_i^2 + \frac{b_i}{\lambda_i} x_i = (x_i + v_i)^2 - v_i^2$ dla $v_i := \frac{b_i}{2\lambda_i}$, skąd $p = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (x_i + v_i)^2 + \sum_{i=r+1}^{k} b_i x_i + (c - \sum_{i=r+1}^{k} \lambda_i v_i^2)$. Można więc przyjąć $\mathbf{v} := (v_1, ..., v_r, 0, ..., 0)$. $\square$

Twierdzenie 1. *Dany wielomian kwadratowy $p \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_k]$ jest afinicznie równoważny wielomianowi jednej z dwóch następujących postaci (niżej, $\lambda_!, ..., \lambda r, c \in \mathbb{F}$):*

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + x_k, \quad \text{gdzie } \ 1 \leq r \leq k-1 \ \text{ oraz } \lambda_1, ..., \lambda_r \neq 0 \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + c, \quad \text{gdzie } \ 1 \leq r \leq k \ \text{ oraz } \lambda_1, ..., \lambda_r \neq 0 \tag{4}$$

Dowód. Szukane podstawienie otrzymamy jako złożenie podstawień opisanych niżej.

a) Diagonalizujemy część główną wielomianu p podstawieniem liniowym. (Patrz tw. Lagrange'a w §VII.1.3.) Wobec twierdzenia z p.1, otrzymamy wielomian, którego część kwadratowa jest postaci $\lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_r x_r^2$, gdzie $1 \leq r \leq k$ i $\lambda_1, ..., \lambda_r \neq 0$.

b) Korzystając z lematu, przeprowadzamy otrzymany wielomian w wielomian p' o tej samej części kwadratowej, lecz o części liniowej postaci $\sum_{i=r+1}^{k} b_i x_i + c$.

c) Jeśli $b_i = 0$ dla $i = r+1, ..., k$, to p' jest postaci (4). Jeśli nie, zmieniamy kolejność zmiennych, uzyskując $b_k \neq 0$, po czym stosujemy podstawienie $y_k = \sum_{i=r+1}^{k} b_i x_i + c$ oraz $y_i = x_i$ dla $i < k$. Przeprowadza ono p' w wielomian $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 + y_k$, postaci (3). (Macierz podstawienia jest niesobliwa, bo jest dolnie trójkątna, z przekątną $(1, 1, ..., 1, b_k)$.)

Uwaga 1. Łącząc (3) i (4) i „gubiąc" r możemy twierdzenie zapisać tak: badany wielomian p można podstawieniem afinicznym przeprowadzić w wielomian postaci

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 + \varepsilon x_k + c, \quad \text{gdzie } \varepsilon \in \{0, 1\} \text{ oraz } \varepsilon \lambda_k = \varepsilon c = 0 \neq \lambda_1. \tag{5}$$

Zadanie uzupełniające w p.5 wykaże, że p wyznacza jednoznacznie ε i c (lecz nie λ_i!).

Uwaga 2. Z wniosku z p. 1 wynika, że wyżej:

a) liczba r niezerowych współczynników λ_i jest równa rzędowi wielomianu p, oraz

b) gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, to wśród współczynników λ_i jest s dodatnich i t ujemnych, gdzie $(s,t) = \sigma(p)$.

Uwaga 3. Gdy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, to można w (5) uzyskać, by $\lambda_i \in \{0,1\}$ dla każdego i. (Wystarcza w tym celu dokonać dodatkowych podstawień $y_i = \sqrt{\lambda_i} x_i$ dla i takich, że $\lambda_i \neq 0$.) Podobnie, przy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ można uzyskać, by $\lambda_i \in \{0, 1, -1\}$.

Definicja. Niech $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. Wielomian postaci (5), z $\{\lambda_i\}_{i=1}^k \subset \{0,1\}$ gdy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, zaś z $\{\lambda_i\}_{i=1}^k \subset \{0,1,-1\}$ gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, nazywamy **afinicznie kanonicznym**.

Zadanie uzupełniające 1. Niech podstawienie $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{v}$ przeprowadza wielomian $p \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_k]_2$ w p'. Niech dalej $\widetilde{\mathbf{A}}, \widetilde{\mathbf{A}'} \in \mathcal{M}_{k+1}$ będą rozszerzonymi macierzami wielomianów p i p', odpowiednio (patrz koniec punktu 2 w §VII.2).

a) Wykazać, że $\widetilde{\mathbf{A}'} = (\widetilde{\mathbf{C}})^t \widetilde{\mathbf{A}} \widetilde{\mathbf{C}}$, gdzie $\widetilde{\mathbf{C}}$ jest macierzą powstałą z $\mathbf{C}$ przez dopisanie $(0, ..., 0, 1) \in \mathbb{F}^{k+1}$ i $(v_1, ..., v_k, 1)$ jako ostatniego wiersza i kolumny, odpowiednio.

b) Wywnioskować, że $\mathrm{rk}(\widetilde{\mathbf{A}}) = \mathrm{rk}(\widetilde{\mathbf{A}'})$, a gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, to także $\sigma(\widetilde{\mathbf{A}}) = \sigma(\widetilde{\mathbf{A}'})$.

Zadania ze zbioru Kostrykina: znaleźć wielomiany, w które przesunięcie $\mathbf{y} = \mathbf{x} + O'$ przeprowadza wielomiany z zadań 18 i 19 w §II.6.4.

3. Więcej o przypadku rzeczywistym: podstawienia euklidesowe.

Definicja. Niech $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ oraz $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$. Podstawienie $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{v}$ nazwiemy **euklidesowym**, jeśli $\mathbf{C}^t\mathbf{C} = \mathbf{I}$.

Latwo widzieć, że odwrotność i złożenie takich podstawień też nim jest.

Twierdzenie 1 (o postaci euklidesowo–kanonicznej wielomianu kwadratowego)**.** *Rzeczywisty wielomian kwadratowy k zmiennych można podstawieniem euklidesowym przeprowadzić w wielomian następującej postaci (niżej, $\lambda_1, ..., \lambda_r, \varepsilon, c \in \mathbb{F}$):*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 + \varepsilon x_k + c, \quad \text{gdzie } \varepsilon\lambda_k = \varepsilon c = 0 \neq \lambda_1. \tag{6}$$

Dowód. Powtórzymy dowód twierdzenia 1 z p.2, zwracając uwagę na to, by używać podstawień euklidesowych. Przy oznaczeniach wcześniejszego dowodu, w kroku a) wystarcza skorzystać z twierdzenia 1 w §VII.2.3, by uzyskać ortogonalną macierz podstawienia. W kroku b) użyto podstawienia przesunięcia, a więc euklidesowego. Istotnej zmiany wymaga tylko krok c); opiszemy ją poniżej.

Niech $p' = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=r+1}^{k} b_i x_i + c$, gdzie $r < k$ i $b_k \neq 0$. Unormujmy wektor $(b_{r+1}, ..., b_k) \in \mathbb{R}^{k-r}$, uzyskując wektor $\mathbf{v}_k = \frac{1}{\varepsilon}(b_{r+1}, ..., b_k)$ długości 1. Następnie, rozszerzmy $\{\mathbf{v}_k\}$ do ortonormalnej bazy $\{\mathbf{v}_{r+1}, ..., \mathbf{v}_k\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^{k-r}$. Przyjmijmy $\mathbf{C} = \operatorname{diag}(1, ..., 1, \mathbf{B})$, gdzie $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{k-r}$ jest klatką o wierszach $\mathbf{v}_{r+1}, ..., \mathbf{v}_k$. Oczywiście, macierze $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ są ortogonalne. Podstawienie $\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$ jest więc euklidesowe i w oczywisty sposób przeprowadza wielomian p' w $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 + \varepsilon y_k + c$. Pozostaje pozbyć się stałej c, podstawiając nową zmienną za $y_k + c/\varepsilon$. $\square$

Stwierdzenie 1. *Przy oznaczeniach twierdzenia, liczby $\lambda_1, ..., \lambda_k$ wyznaczone są jednoznacznie z dokładnością do kolejności, jako pierwiastki wielomianu charakterystycznego macierzy $\mathbf{A}$ części głównej rozważanego wielomianu (z uwzględnieniem krotności).*

Dowód. Zgodnie z lematem 1 w p.1, każde podstawienie $\mathbf{x} = \mathbf{Cy} + \mathbf{v}$ zmienia wielomian p na taki, którego część główna ma macierz $\mathbf{D} = \mathbf{C}^t\mathbf{AC}$. Gdy $\mathbf{C}^t = \mathbf{C}^{-1}$, to macierze $\mathbf{D}$ i $\mathbf{A}$ są podobne, i jeśli $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_k)$, to $\chi_{\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{D}} = \prod_i (\lambda_i - x)$. $\square$

Uwaga 1. Postaci (5) i (6) różnią się tylko warunkiem na ε. W §5.4 udowodnimy, że liczba $|\varepsilon|$ w (6) jest wyznaczona jednoznacznie. Jest tak i z liczbą c, patrz uwaga 1 w p.1.

Definicja. Gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, wielomian postaci (6) nazywamy **euklidesowo kanonicznym**.

Zadania ze zbioru Kostrykina: Przeprowadzić podstawieniem afinicznym (odp. euklidesowym) wielomiany z zadań 23 i 24 (odp. 21) w §II.6.4 w wielomian postaci kanonicznej.

4. Funkcje stopnia ≤ 2 na przestrzeniach afinicznych.

Niech $u\colon \mathbb{A} \to \mathbb{F}$ będzie funkcją na przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$.

Definicja. Wielomian $p \in \mathbb{F}[x_1, .., x_k]$ **odpowiada funkcji** u **w mapie** $S\colon \mathbb{A} \to \mathbb{F}^k$, jeśli $u(a) = p(S(a))$ dla każdego punktu $a \in \mathbb{A}$ (czyli, jeśli $u = p \circ S$). Mówimy też, że p **odpowiada** u **w układzie odniesienia** $(a_i)_{i=0}^k$, wyznaczającym mapę S.

Uwaga 1. a) Gdy $\mathbb{A}$ jest warstwą w przestrzeni wektorowej, to taki wielomian p, o ile istnieje, jest wyznaczony warunkiem, by dla wektorów $\mathbf{v}_i := a_i - a_0$ i dowolnych skalarów λ_i $(i = 1, ..., k)$ spełniona była tożsamość $p(\lambda_1, ..., \lambda_k) = u(a_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i)$.

b) Jeśli funkcji u w mapie S odpowiada wielomian p, to w innej mapie T odpowiada jej wielomian p', otrzymany z p podstawieniem $\mathbf{x} = F(\mathbf{y})$, gdzie $F := ST^{-1} \in \operatorname{GA}(\mathbb{F}^k)$. Istotnie, z równości $u = p \circ S$ i $p' = p \circ (ST^{-1})$ wynika, że $p' \circ T = u$. $\square$

c) Jak wiemy z §VII.1.1, w danej mapie funkcji u odpowiadać może tylko jeden wielomian stopnia ≤ 2.

Definicja. Funkcja u jest jest **stopnia** n, co oznaczamy $\deg(u) = n$, jeśli w pewnej mapie odpowiada jej wielomian stopnia n, lecz nie odpowiada jej wielomian niższego stopnia. (Tu zawsze będzie $n \leq 2$.) Gdy $\deg(u) = 2$, funkcję u nazywamy **kwadratową**. Funkcja **wielomianowa** to taka, która jest stopnia n dla pewnego $n \in \{-\infty, 0, 1, 2, ...\}$.

Uwaga 2. a) Wyżej, można „pewnej" zastąpić przez „każdej", por. uwagi 2c) w p.1 i 1b).

b) Rząd i (gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) sygnatura wielomianu, odpowiadającego funkcji kwadratowej u w danej mapie, nie zależą od mapy. Oznaczamy je przez $\mathrm{rk}(u)$ i $\sigma(u)$, odpowiednio.

Uwaga 3. Możemy „odwrócić" uwagę 1b) i stwierdzić, że:

a) Jeśli wielomian p odpowiada danej funkcji w mapie S, to wielomian p', powstały z p w wyniku podstawienia afinicznego $\mathbf{x} = F(\mathbf{y})$, odpowiada jej w mapie $T := F^{-1}S$.

b) Wyznaczający tę mapę T układ odniesienia $(b_i)_{i=0}^n$ jest (z definicji) zadany tym, że $b_i = T^{-1}(\mathbf{e}_i)\ \forall i$. Oznacza to, że i–ty punkt b_i jest równy $S^{-1}F(\mathbf{e}_i)$, więc <u>ciąg $S(b_i)$ współrzędnych kartezjańskich punktu b_i, w „wyjściowej" mapie S, jest równy $F(\mathbf{e}_i)$</u>.

Zadanie 1. a) Funkcje $\mathbb{A} \to \mathbb{F}$ stopnia $\leq n$ tworzą przestrzeń liniową.

b) Złożenie takiej funkcji z przekształceniem afinicznym $\mathbb{A}' \to \mathbb{A}$ też jest stopnia $\leq n$.

<u>Zadanie uzupełniające 1.</u> Niech $\mathbb{A}$ będzie warstwą w przestrzeni liniowej. Dowieść, że:

a) Funkcja $u\colon \mathbb{A} \to \mathbb{F}$ jest kwadratowa wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $T_{\mathbb{A}} \ni \mathbf{v} \mapsto u(a+\mathbf{v}) - u(b-\mathbf{v})$ jest afiniczna i różna od stałej, dla każdych $a, b \in \mathbb{A}$.

b) Gdy funkcja $u : \mathbb{A} \to \mathbb{F}$ jest kwadratowa i $p_a(\mathbf{v}) := u(a+\mathbf{v}) + u(a-\mathbf{v}) - 2u(a)$ dla $a \in A$ i $\mathbf{v} \in T_{\mathbb{A}}$, to $p_a\colon T_{\mathbb{A}} \to \mathbb{F}$ jest formą kwadratową, niezależną od punktu a.

5. Środki symetrii funkcji kwadratowych.

<u>Definicja.</u> Punkt a przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$ jest **środkiem symetrii funkcji** $u\colon \mathbb{A} \to \mathbb{F}$, jeśli równość $u(x) = u(x')$ zachodzi dla każdej pary punktów $x, x' \in \mathbb{A}$, symetrycznej względem a. (Równoważnie: jeśli $u \circ J_a = u$, gdzie $J_a\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ oznacza symetrię względem a.) **Środkiem symetrii wielomianu** k zmiennych nazywamy środek symetrii wyznaczonej przez ten wielomian funkcji $\mathbb{F}^k \to \mathbb{F}$.

Środków symetrii, funkcji czy wielomianu, może być wiele lub nie być wcale.

Uwaga 1. Z uwagi 1 w §2.2 wynika, że gdy $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ jest przekształceniem afinicznym i obraz $F(a)$ punktu $a \in \mathbb{A}$ jest środkiem symetrii danej funkcji $u\colon \mathbb{A}' \to \mathbb{F}$, to a jest środkiem symetrii złożenia $u \circ F$. Jeśli F jest bijekcją, to implikacja odwrotna też ma miejsce, bo poprzednią można odnieść do F^{-1}.

Lemat 1. *Niech $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^t\mathbf{x} + c$. Do tego, by punkt $\mathbf{d} \in \mathbb{F}^k$ był środkiem symetrii wielomianu p potrzeba i wystarcza, by $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^t)\mathbf{d} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$.*

<u>Dowód.</u> Oba warunki oznaczają równość wielomianów $p(\mathbf{d}+\mathbf{x})$ i $p(\mathbf{d}-\mathbf{x})$. ⊟

Uwaga 2. * Przy tych oznaczeniach, wielomian $\sum_{j=1}^k (a_{ij} + a_{ji})x_j + b_i$ nazywamy i–tą **pochodną cząstkową** wielomianu p i oznaczamy $\partial_i p$. (Bierze się to stąd, że $(\partial_i p)(\mathbf{d})$ jest przy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ pochodną w punkcie d_i wielomianu zmiennej x_i, otrzymanego przez przyjęcie $x_j = d_j$ dla $j \neq i$.) Tak więc punkt $\mathbf{d} \in \mathbb{F}^k$ wtedy i tylko wtedy jest środkiem

symetrii wielomianu $p \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_k]_2$, gdy $(\partial_i p)(\mathbf{d}) = 0$ dla $i = 1, ..., k$ – czyli gdy $\mathbf{d}$ jest tzw. **punktem krytycznym** dla p. (Punkty takie mogą nie istnieć.)

Wniosek 1. *Niech M oznacza zbiór środków symetrii wielomianu $p = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^2 + \varepsilon x_k + c$, gdzie $\varepsilon\lambda_k = 0$. Gdy $\varepsilon \neq 0$, to $M = \emptyset$, a gdy $\varepsilon = 0$, to $M = \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k \colon \lambda_i v_i = 0 \ \forall i\}$ i $p(M) = \{c\}$.* $\square$

Zadania uzupełniające.

1. Gdy wielomiany $p = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^2 + \varepsilon x_k + c$ i $p' = \sum_{i=1}^k \lambda'_i x_i^2 + \varepsilon' x_k + c'$ są afinicznie równoważne i $\varepsilon\lambda_k = 0 = \varepsilon'\lambda'_k$, to $\varepsilon = 0 \Rightarrow (\varepsilon' = 0$ i $c = c')$.

2. Dla wielomianu $p = \mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^t\mathbf{x} + c$ udowodnić wzór Taylora: $p(\mathbf{x}+\mathbf{v}) = p(\mathbf{x}) + \sum_i (\partial_i p)(\mathbf{x}) v_i + \mathbf{v}^t\mathbf{A}\mathbf{v}$.

§ 4. Hiperpowierzchnie algebraiczne niskich stopni.

1. Zbiory i opisujące je równania.

Niech X będzie podzbiorem przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$, a $S \colon \mathbb{A} \to \mathbb{F}^k$ pewną jej mapą. Jeśli funkcja $f \colon \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}$ spełnia warunek

$$X = \{a \in \mathbb{A} \colon f(S(a)) = 0\}, \tag{7}$$

to powiemy, że zbiór X jest **w mapie S zadany równaniem** $f(\mathbf{x}) = 0$. Warunek (7) jest równoważny temu, by $S(X) = f^{-1}(0)$, a także temu, by $X = (f \circ S)^{-1}(0)$.

Uwaga 1. Równanie $f(\mathbf{x}) = 0$, zadające X w danej mapie, możemy oczywiście zastąpić przez proporcjonalne do niego $\lambda f(\mathbf{x}) = 0$, gdzie $\lambda \neq 0$.

Uwaga 2. Niech X i X' będą podzbiorami przestrzeni $\mathbb{A}$ i $\mathbb{A}'$, odpowiednio.

a) Jeśli izomorfizm $F \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ przeprowadza X na X' i zbiór X' jest w pewnej mapie S' zadany równaniem $f'(\mathbf{x}) = 0$, to zbiór X jest zadany tymże równaniem w mapie $S := S' \circ F$. (Jest tak, bo $S(X) = S'(X')$ i $S'(X') = (f')^{-1}(0)$.)

b) Odwrotnie, jeśli zbiory X i X' są zadane wspólnym równaniem w mapach S i S', odpowiednio, to izomorfizm $(S')^{-1} \circ S : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ przeprowadza X na X'. (Jest tak, bo $S(X) = S'(X')$, jako zbiory zer wspólnej funkcji.)

c) Gdy w mapie S_1 zbiór X jest zadany równaniem $f_1(\mathbf{x}) = 0$, to w mapie S_2 jest zadany równaniem $f_2(\mathbf{x}) = 0$, gdzie $f_2 := f_1 \circ S_1 \circ S_2^{-1}$. $\boxminus$

Definicja. Niech $\mathbb{A}$ i $\mathbb{A}'$ będą przestrzeniami afinicznymi nad tym samym ciałem. Powiemy, że **zbiór $X \subset \mathbb{A}$ jest afinicznie równoważny** zbiorowi $X' \subset \mathbb{A}'$, jeśli istnieje izomorfizm afiniczny $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ taki, że $F(X) = X'$.

Gdy $\mathbb{A}$ i $\mathbb{A}'$ są euklidesowymi przestrzeniami afinicznymi i za F można obrać izometrię, to powiemy, że zbiory X i X' są **euklidesowo równoważne**.

Wniosek 1. *Podzbiory X, X' przestrzeni afinicznej wtedy i tylko wtedy są afinicznie równoważne, gdy w pewnych mapach zadane są tym samym równaniem.*

Tak samo jest z euklidesową równoważnością w euklidesowych przestrzeniach afinicznych (mapy mają wtedy być euklidesowe). □

Zadanie 1. Hiperpłaszczyzna w przestrzeni afinicznej może w każdej mapie być zadana równaniem liniowym, i to równanie liniowe jest przez mapę i hiperpłaszczyznę wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do proporcjonalności. Zaś przy odpowiednim wyborze mapy, równaniem jest $x_1 = 0$.

Zadanie 2. Niech u będzie funkcją kwadratową na przestrzeni afinicznej.

a) Gdy $u^{-1}(0)$ zawiera hiperpłaszczyznę, to u jest iloczynem dwóch funkcji afinicznych. (Wskazówka: obrać mapę, w której równaniem hiperpłaszczyzny jest $x_1 = 0$.)

b) Gdy $u^{-1}(0)$ jest hiperpłaszczyzną, to $u = \lambda v^2$, gdzie v jest funkcją afiniczną i $\lambda \in \mathbb{F}$.

2. Zbiory algebraiczne i kwadryki.

Definicja. a) Podzbiór X przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$ jest **hiperpowierzchnią (algebraiczną) stopnia** $\leq n$, gdy $X = u^{-1}(0)$ dla pewnej funkcji wielomianowej $u\colon \mathbb{A} \to \mathbb{F}$ stopnia $\leq n$. (Dla nas ważny będzie tylko zakres $n \leq 2$.)

b) Gdy hiperpowierzchnia X jest stopnia $\leq n$, lecz nie $\leq n-1$, to powiemy, że jest **stopnia** n i piszemy $\deg(X) = n$.

Uwaga 1. Hiperpowierzchnię stopnia n można w każdej mapie zadać równaniem stopnia n, lecz nie niższego. Wynika to z uwagi 3a) w §3.4, odniesionej do powyższej funkcji u.

„Hiperpowierzchnia" w $\mathbb{R}$ jest zbiorem skończonym, w $\mathbb{R}^2$ jest na ogół krzywą, a i w $\mathbb{R}^3$ może być punktem czy zbiorem pustym czy prostą, którym daleko do „powierzchni" lub do „hiper". Niekiedy więc za [Borsuk] używam sugestywnej nazwy **twór** stopnia n.

Przecięcie hiperpowierzchni może nie być hiperpowierzchnią. Z tego względu większe znaczenie mają ich skończone przecięcia, zwane **zbiorami algebraicznymi**. Tu jednak skupimy uwagę na hiperpowierzchniach, i to stopnia ≤ 2.

Definicja. **Kwadryką** w przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$ nazywamy zbiór zer $u^{-1}(0)$ funkcji kwadratowej $u\colon \mathbb{A} \to \mathbb{F}$.

Uwaga 2. a) Kwadryka jest hiperpowierzchnią stopnia ≤ 2 i w każdej mapie można ją zadać równaniem kwadratowym.

b) Hiperpowierzchnia stopnia 1 w $\mathbb{A}$ jest kwadryką (bo $u(x) = 0 \Leftrightarrow u^2(x) = 0$).

c) Jedyną hiperpowierzchnią stopnia 0 jest zbiór pusty, a jedyną stopnia $-\infty$ jest przestrzeń $\mathbb{A}$; są one zbiorami zer funkcji 1 i 0, odpowiednio. Zbiór pusty jest kwadryką gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, lecz nie gdy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$; zaś $\mathbb{A}$ nie jest kwadryką gdy $\#\mathbb{F} > 2$. (Dlaczego?) ⊟

Zadania.

1. Dla tworu (=hiperpowierzchni) X stopnia $\leq n$ w przestrzeni $\mathbb{A}$ dowieść, że:

a) Gdy $\dim \mathbb{A} = 1$, to $X = \mathbb{A}$ lub X liczy nie więcej, niż n punktów.

b) Gdy $\mathbb{A}'$ jest przestrzenią afiniczną i przekształcenie $F\colon \mathbb{A}' \to \mathbb{A}$ jest afiniczne, to $F^{-1}(X)$ jest tworem stopnia $\leq n$ w $\mathbb{A}'$; por. zadanie 1b) w §3.4. Stąd $\mathbb{A}_0 \cap X$ jest tworem stopnia $\leq n$ w każdej podprzestrzeni $\mathbb{A}_0 \subset \mathbb{A}$.

c) Każda prosta w $\mathbb{A}$, zawierająca więcej niż n punktów zbioru X, jest w X zawarta. (Będziemy z tej ważnej własności korzystać bez powoływania się na zadanie.)

2. Czy spirala $\{(t\cos t, t\sin t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ jest podzbiorem jakiegokolwiek zbioru algebraicznego w $\mathbb{R}^2$, dodatniego stopnia ?

3. a) Suma skończenie wielu hiperpowierzchni w $\mathbb{F}^k$ jest hiperpowierzchnią, i tak samo jest dla zbiorów algebraicznych.

b) Gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, to można wyżej zastąpić słowo „suma" przez „przecięcie".

c) Czy wolno takiej zmiany dokonać, gdy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$?

4. a) Podprzestrzeń przestrzeni afinicznej jest zbiorem algebraicznym i w każdej mapie można ją zadać jako zbiór rozwiązań pewnego układu równań liniowych.

b) Hiperpowierzchnia stopnia 1 w przestrzeni afinicznej jest w niej hiperpłaszczyzną.

Zadanie uzupełniające 1. Dowieść, że przecięcie dwóch hiperpowierzchni X, Y w $\mathbb{R}^k$ jest hiperpowierzchnią stopnia $\leq 2\sup(\deg(X), \deg(Y))$. Czy można wyżej zastąpić prawą stronę przez $\sup(\deg(X), \deg(Y))$? Jak jest przy $\mathbb{R}^k$ zastąpionym przez $\mathbb{C}^k$?

2. * Dowieść, że gdy przestrzeń afiniczna $\mathbb{A}$ jest sumą skończenie wielu zbiorów algebraicznych, a ciało skalarów jest nieskończone, to któryś z tych zbiorów jest równy $\mathbb{A}$. Można korzystać z tego, że *pierścień* $\mathbb{F}[x_1, ..., x_k]$ *nie ma dzielników zera.*

3. Wyznaczanie klasy proporcjonalności funkcji kwadratowej przez jej zbiór zer.

W tym i następnym punkcie zakładamy, że $\mathbb{A}$ jest przestrzenią afiniczną nad ciałem $\mathbb{F}$ takim, że $2_\mathbb{F} \neq 0_\mathbb{F}$ i $\#\mathbb{F} > 5$. (Prócz ciał charakterystyki 2 wyłącza to $\mathbb{Z}_3$ i $\mathbb{Z}_5$.)

Zasadniczą cechą tworów, czy ogólniej zbiorów algebraicznych, jest to, że pewne ich własności mogą być wynioskowane z własności wyznaczających je wielomianów. W odniesieniu do kwadryk, umożliwia to następujące

Twierdzenie 1. *Niech* $u, w\colon \mathbb{A} \to \mathbb{F}$ *będą takimi funkcjami kwadratowymi, że* $\emptyset \neq u^{-1}(0) \subset w^{-1}(0)$. *Jeśli zbiór* $u^{-1}(0)$ *nie jest podprzestrzenią, to* $w = \lambda u$ *dla pewnego skalara* λ.

Dla uproszczenia zapisu dowodu założymy niżej, że $\dim \mathbb{A} \geq 2$, co nie jest istotne. Potrzebna jest następująca własność tworów płaskich:

Lemat 1. *Niech X będzie tworem stopnia ≤ 2 na płaszczyźnie afinicznej.*

a) Jeśli $\#X > 1$ i X jest podzbiorem sumy dwóch prostych, to zawiera prostą.

b) Jeśli X zawiera prostą, to jest prostą lub płaszczyzną lub (mnogościową) sumą dwóch prostych.

Dowód. Ad a). Jeśli $\#X > 4$, to X zawiera tę z rozważanych dwóch prostych, z którą ma więcej niż 2 punkty wspólne. Pozostaje więc skorzystać z zadania uzupełniającego 1 z końca tego punktu.

Ad b). Gdy $\deg(X) = 2$, to stosuje się zadanie 2 z p.1. $\boxminus$

Dowód twierdzenia. Jeśli zbiór $u^{-1}(0)$ nie jest podprzestrzenią afiniczną, to pewna prosta L przecina go w dokładnie 2 punktach. (Patrz zadania 1c) w p.2 i 4 w §2.2.) Obierzmy inny jeszcze punkt $a_0 \in L$ i przyjmijmy $h(x) := u(a_0)w(x) - w(a_0)u(x)$. Wykażemy, że funkcja $h\colon \mathbb{A} \to \mathbb{F}$ jest zerowa, więc za λ można wziąć $w(a_0)/u(a_0)$.

Przypuśćmy, wbrew temu, że $a \in \mathbb{A}$ i $h(a) \neq 0$. Możemy zakładać, że $\mathbb{A}$ jest płaszczyzną (gdy nie jest, zastępujemy $\mathbb{A}$ przez $\mathbb{A}' := \mathrm{af}(a \cup L)$ i obcinamy u, w i h do $\mathbb{A}'$).

Odnotujmy, że $h^{-1}(0) \supset u^{-1}(0) \cup \{a_0\}$, skąd funkcja h, stopnia ≤ 2, zeruje się w 3 punktach prostej L: w dwóch należących do $u^{-1}(0)$ i w a_0. Tym samym twór $h^{-1}(0)$ zawiera prostą L; a że nie jest całą płaszczyzną $\mathbb{A}$ (bo $h(a) \neq 0$), to jest na mocy części b) lematu podzbiorem sumy dwóch prostych: prostej L i pewnej prostej L'.

Jednak $u^{-1}(0) \subset h^{-1}(0)$ i z lematu wynika, że $u^{-1}(0)$ jest jednym ze zbiorów L, L' lub $L \cup L'$ –co niemożliwe, bo żaden z nich nie przecina L w dokładnie dwóch punktach. $\boxminus$

Zadanie 1. Wykorzystaliśmy (wskazać gdzie) to, że gdy L_0, L, L' są prostymi i $L_0 \subset L \cup L'$, to $L_0 = L$ lub $L_0 = L'$. Udowodnić tę własność prostych.

Uwaga 1. Dla $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5\}$ twierdzenie 1 jest fałszywe; patrz niżej.

Zadania uzupełniające. Dowieść, że:

1. Gdy X jest niepustą kwadryką na płaszczyźnie afinicznej nad ciałem $\mathbb{F}$ i $\#X > 1$, to $\#X \geq \#\mathbb{F} - 1$. Rozumować następujaco: przez wybór odpowiedniej mapy przejść do przypadku, gdy $\mathbb{A} = \mathbb{F}^2$ i $(0,0), (1,0) \in X$ i dowieść, że wtedy

i) $X = \{(x,y) \in \mathbb{F}^2 \colon ax^2 + bxy + cy^2 - ax + dy = 0\}$, dla pewnych $a, b, c, d \in \mathbb{F}$;

ii) gdy $a \neq 0$, to dla wszystkich wartości $t \in \mathbb{F}$, poza najwyżej trzema, prosta $x = ty$ zawiera punkt z $X \setminus \{(0,0)\}$; zaś gdy $a = 0$, to $\mathbb{F} \times \{0\} \subset X$.

2. Gdy $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5\}$, to a) kwadryka $x_1^2 + x_2^2 = 1$ w $\mathbb{F}^2$ liczy tylko 4 punkty, i b) teza twierdzenia 1 jest fałszywa.

3. Teza twierdzenia 1 jest słuszna gdy $u^{-1}(0)$ jest hiperpłaszczyzną.

4. a) Dla danych $k(k+3)/2$ punktów k–wymiarowej przestrzeni afinicznej istnieje kwadryka, która je wszystkie zawiera. (Wskazówka: warunek $p(a) = 0$ jest równaniem

liniowym względem współczynników wielomianu p.)

b)** Gdy $k = 2$, to kwadryka ta jest jedyna lub 4 z 5 punktów leży na prostej. (Wskazówka: pomocny może być lemat 1 i rozwiązanie zadania 1.)

4. Środki kwadryk, walce i stożki.

Dla skrócenia dowodów, przyjmujemy niżej pewne zbędne założenia, w tym milcząco to, że $2_{\mathbb{F}} \neq 0_{\mathbb{F}}$ i $\#\mathbb{F} > 5$. „Środek symetrii" (zbioru czy funkcji) skracamy do „środek".

Twierdzenie 1. *Niepusta kwadryka $u^{-1}(0)$, nie będąca podprzestrzenią, ma ten sam zbiór środków, co wyznaczająca ją kwadratowa funkcja $u\colon \mathbb{A} \to \mathbb{F}$.*

Dowód. Niech a będzie środkiem zbioru $X := u^{-1}(0)$, i niech w pewnej mapie S, zaczepionej w a, funkcji u odpowiada wielomian p. Wówczas punkt $S(a) = \mathbf{0}$ jest środkiem zbioru $S(X) = p^{-1}(0)$, skąd $p(\mathbf{v}) = 0 \Rightarrow p(-\mathbf{v}) = 0$. Na podstawie twierdzenia z p.3 istnieje więc skalar λ taki, że $p(-\mathbf{x}) = \lambda p(\mathbf{x})$. Stosując to dwukrotnie otrzymujemy $\lambda^2 = 1$. Jednak wielomian kwadratowy p nie ma tej własności, że $p(-\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x})$. Zatem $\lambda = 1$ i $S(a)$ okazuje się być środkiem wielomianu p, zaś a – funkcji u. □

Definicja. a) Zbiór $X \subset \mathbb{A}$ jest **stożkiem**, jeśli istnieje taki punkt $a \in X$, że każda przechodząca przez a prosta bądź leży w X, bądź przecina X tylko w punkcie a. Punkt a nazywamy **wierzchołkiem** stożka. (Może być ich wiele.)

b) Zbiór $X \subset \mathbb{A}$ jest **walcem**, a prosta $L \subset \mathbb{A}$ jego **tworzącą**, jeśli $L \subset X$ i każda prosta równoległa do L jest albo w zbiorze X zawarta, albo z nim rozłączna.

c) **Podstawą walca** X nazywamy jego część wspólną z dowolną hiperpłaszczyzną, która w jednym punkcie przecina pewną jego tworzącą. Zamiast o „walcu o podstawie X_0" mówimy też o „walcu **nad** zbiorem X_0". Walec ma wiele podstaw, a może też mieć wiele nierównoległych tworzących (np. gdy jest płaszczyzną w $\mathbb{R}^3$).

Przykład 1. Gdy funkcja $f\colon \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}$ nie zależy od zmiennej x_i, to zbiór zadany w $\mathbb{F}^k$ równaniem $f(\mathbf{x}) = 0$ jest walcem. Jedną z jego podstaw jest zbiór zadany w hiperpłaszczyźnie $\{\mathbf{u} \in \mathbb{F}^k\colon u_i = 0\}$ wyjściowym równaniem $f(\mathbf{x}) = 0$ (teraz f traktujemy jako funkcję zmiennych $x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_k$). Tworzącymi są przechodzące przez podstawę proste, równoległe do $\mathbb{F}\mathbf{e}_i$.

Uwaga 1. Izomorfizmy afiniczne (w tym mapy atlasu) przeprowadzają proste na proste, zachowując ich równoległość; przeprowadzają więc one zbiór, będący walcem czy stożkiem, na zbiór też mający tę własność. Będziemy z tego wielokrotnie korzystać.

Uwaga 2. a) Gdy punkt a jest wierzchołkiem stożka X, to jest jego środkiem –bo dla każdego punktu $x \in X$, punkt $J_a(x)$ leży na prostej ax, zawartej w X.

b) Odwrotnie, gdy X jest jest kwadryką i punkt $a \in X$ jest jej środkiem, to X jest stożkiem o wierzchołku w a. Wynika to stąd, że dla $x \in X \setminus \{a\}$ prosta ax jest w X

zawarta, bo przecina X w 3 różnych punktach a, x i $J_a(x)$.

c) Kwadryka jest więc stożkiem wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera pewien swój środek.

Twierdzenie 2. *Niech niepusty zbiór $X \subset \mathbb{A}$ będzie w mapie S zadany równaniem $p(\mathbf{x}) = 0$, gdzie $p = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 + \varepsilon x_k + c$ i $\varepsilon\lambda_k = 0 \neq \lambda_1$. (Tu, $k := \dim \mathbb{A}$.) Jeśli X nie jest podprzestrzenią, to:*

a) X jest walcem wtedy i tylko wtedy, gdy p nie zależy od którejś ze zmiennych x_i.

b) X ma środek tylko jeśli $\varepsilon = 0$, a wtedy zbiór środków jest w mapie S zadany układem równań $\lambda_i x_i = 0$ $(i = 1, ..., k)$. Zbiór środków jest więc niepusty i zawarty w X, gdy $\varepsilon = 0$ i $c = 0$, zaś rozłączny z X, gdy $c \neq 0$. (Mają tu miejsce równoważności.)

c) X jest stożkiem wtedy i tylko wtedy, gdy $\varepsilon = c = 0$.

Dowód. Bycie walcem czy stożkiem, posiadanie środka etc. przysługują zbiorowi X wtedy i tylko wtedy, gdy przysługują jego obrazowi przy izomorfiźmie S. Możemy więc zastąpić $\mathbb{A}$ przez $\mathbb{F}^k$, a X przez zbiór $S(X)$, równy $p^{-1}(0)$.

a). Niech $p^{-1}(0)$ będzie walcem, a $\mathbf{w} \in \mathbb{F}^k$ kierunkiem jego tworzącej. Wielomian $p'(\mathbf{x}) := p(\mathbf{x} + \mathbf{w})$ zeruje się we wszystkich punktach zbioru $p^{-1}(0)$, skąd $p' = \lambda p$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{F}$. (Korzystamy z definicji tworzącej i twierdzenia 1.) Tym samym proporcjonalny do p jest też wielomian $p' - p$, równy $\sum_i \lambda_i(2x_i w_i + w_i^2) + \varepsilon w_k$; jest on więc zerowy, bo jest stopnia ≤ 1, a p – stopnia 2. A że ponadto $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, to $\lambda_k = 0 = \varepsilon$ (gdy $\mathbf{w} \in \mathbb{F}\mathbf{e}_k$) lub $\lambda_j = 0$ (gdy $w_j \neq 0$ i $j < k$), tzn. p nie zależy od x_k lub od x_j, odpowiednio. Prawdziwość implikacji odwrotnej uzasadniono w przykładzie 1.

Część b) wynika z wniosku 1 w §3.5 i twierdzenia 1, a c) – z b) i uwagi 2c). □

Uwaga 3. * Znajdywanie środków czy tworzących kwadryki $X \subset \mathbb{F}^k$ nie wymaga sprowadzenia jej równania do postaci opisanej w stwierdzeniu. W odniesieniu do środków wynika to wprost z lematu 1 w §3.5 i twierdzenia 1, a w odniesieniu do tworzących – z poniższego zadania.

Zadania uzupełniające. (W zad.1 użyteczny może byc wzór Taylora z zad. uz. 2 z §3.5.)

1. Niech niepusty zbiór $X \subset \mathbb{F}^k$, nie będący podprzestrzenią afiniczną, będzie zadany równaniem $\mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^t\mathbf{x} + c = 0$, gdzie $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^k$ i $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$. Dowieść, że:

a) Jeśli $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ i $\mathbf{v}$ jest **kierunkiem asymptotycznym** dla X, tzn. $\mathbf{v}^t\mathbf{A}\mathbf{v} = 0$, to żadna prosta o kierunku $\mathbf{v}$ nie przecina zbioru X w dokładnie dwóch punktach. Prosta zawarta w X ma kierunek asymptotyczny. (Wskazówka: wzór Taylora z §3.5.)

b)* Jeśli X jest walcem, to wektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ wtedy i tylko wtedy jest kierunkiem jego tworzącej, gdy $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ i $\mathbf{b}^t\mathbf{v} = 0$. (Wskazówka: dowód twierdzenia 2a).)

2. Przy założeniach twierdzenia 2, niech wielomian p zależy od dokładnie r zmiennych. Dowieść, że $r = \sup\{\dim(\mathbb{A}_0) \colon \mathbb{A}_0$ jest podprzestrzenią i $\mathbb{A}_0 \cap X$ nie jest walcem$\}$. Wywnioskować, że liczba r zależy tylko od kwadryki X, nie zaś od wyboru mapy, w której kwadryka jest zadana wielomianem p opisanej w twierdzeniu postaci.

3. a) Czy prosta, zawierająca różne środki kwadryki, jest jej tworzącą?
   b) Czy dwie podstawy tego samego walca są afinicznie równoważne?

Zadania ze zbioru Kostrykina: od 15 do 19 w §II.6.4. W zadaniu 6.4.22 wskazać środki.

§ 5. Kwadryki w rzeczywistych przestrzeniach afinicznych.

Celem naszym jest klasyfikacja kwadryk w rzeczywistej przestrzeni afinicznej. Twierdzenia klasyfikacyjne sformułujemy i udowodnimy już w najbliższym punkcie, lecz uzupełniać je będziemy i potem. M. in. w punkcie 3 omówimy związane nim własności kwadryk w przestrzeni dwu– lub trzy–wymiarowej. Zajmować się będziemy zarówno klasyfikacją afiniczną, jak i euklidesową (gdy przestrzeń jest euklidesowa). Wyłaczywszy zadanie 2, ciałem skalarów jest $\mathbb{R}$.

1. Afiniczna i euklidesowa klasyfikacja kwadryk w przestrzeni $\mathbb{R}^k$.

Lemat 1. *Wielomian kwadratowy $p_0 \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_k]$ można podstawieniem afinicznym przeprowadzić w proporcjonalny do wielomianu p jednej z następujących postaci:*

($\emptyset$)	$-\sum_{i=1}^{t} x_i^2 - 1$	*gdzie* $1 \le t \le k$;
(HE)	$\sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} x_i^2 - 1$	*gdzie* $1 \le s \le s+t \le k$;
(S)	$\sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} x_i^2$	*gdzie* $1 \le s \le s+t \le k$ *i* $s \ge t \ge 0$;
(P)	$\sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} x_i^2 - x_k$	*gdzie* $1 \le s \le s+t \le k-1$ *i* $s \ge t \ge 0$.

Dowód. Na podstawie uwagi 1 w §3.2 możemy założyć, że $p_0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 + \varepsilon x_k + c$, gdzie $\varepsilon\lambda_k = \varepsilon c = 0$; mnożąc p_0 przez stałą uzyskujemy ponadto, że $\varepsilon, c \in \{0, -1\}$.

Niech $\mu := -1$ jeśli $c = 0$ i liczba ujemnych współczynników λ_i przewyższa liczbę dodatnich, i niech $\mu := 1$ w przeciwnym razie. Wielomian μp_0, po uporządkowaniu zmiennych i zastąpieniu x_k przez μx_k, jest postaci opisanej w lemacie, lecz z wyrazami $\pm|\lambda_i|x_i^2$ w miejsce $\pm x_i^2$ $(i = 1, ..., s+t)$. Pozostaje dokonać dodatkowych podstawień $\sqrt{|\lambda_i|}x_i = y_i$ dla $i = 1, ..., s+t$. □

Definicja. Zaliczmy do **kanonu afinicznego równań kwadratowych** w $\mathbb{R}^k$ każde równanie $p(\mathbf{x}) = 0$, gdzie p jest jednym z wielomianów wymienionych w lemacie 1. Gdy wielomian p jest postaci ($\emptyset$), to równanie też nazwiemy „postaci ($\emptyset$)".

Zadanie 1. Równania postaci ($\emptyset$) są jedynymi spośród równań kanonicznych, które wyznaczają zbiór pusty, a $x_1^2 + \cdots + x_s^2 = 0$ jedynymi, które wyznaczają podprzestrzeń afiniczną. (Wskazówka: dla pozostałych równań wskazać prostą, na której są tylko dwa rozwiązania.)

Twierdzenie 1 (o klasyfikacji kwadryk, wersja rzeczywista afiniczna)**.** *Kwadryka w rzeczywistej przestrzeni afinicznej jest w pewnej mapie zadana równaniem afiniczne kanonicznym. Kwadryka niepusta wyznacza to równanie jednoznacznie.*

Dowód. Badaną kwadrykę X można w pewnej mapie S opisać równaniem afinicznie–kanonicznym $p(\mathbf{x}) = 0$. Wynika to (jak?) z lematu 1, wziętego wraz z uwagą 3a) w §3.4.

By dla $X \neq \emptyset$ dowieść jedyności wielomianu p, obierzmy pomocniczo taką funkcję kwadratową $u\colon \mathbb{A} \to \mathbb{F}$, że $X = u^{-1}(0)$. Pokażemy, że u jednoznacznie wyznacza p, co zakończy dowód. Rozpatrzymy do tego kilka przypadków.

a) X jest podprzestrzenią. Z zadania wynika, że wtedy $p = \sum_{i=1}^{s} x_i^2$ dla pewnej liczby $s \leq k$. A że $\dim(X) = \dim S(X) = \dim\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k\colon \sum_{i=1}^{s} v_i^2 = 0\} = k - s$, to X wyznacza s, a przez to i p.

Jeśli a) nie zachodzi, to $p \circ S = \lambda u$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$, na podstawie twierdzenia z §4.3. Stąd $\sigma(p) = \sigma(\lambda u)$ (patrz uwaga 2b) w §3.4) i przy $(s_0, t_0) := \sigma(u)$ otrzymujemy $\sigma(p) = (s_0, t_0)$ jeśli $\lambda > 0$, zaś $\sigma(p) = (t_0, s_0)$ jeśli $\lambda < 0$. Daje to dalsze przypadki, w których odwołujemy się do twierdzenia 2 z §4.4:

b) Gdy X nie jest stożkiem, lecz ma pewien środek a, to p jest postaci (HE) i $p(S(a)) = -1$. Równość $p \circ S = \lambda u$ wyznacza więc znak λ (jest przeciwny, niż znak $u(a)$), co wraz z powyższymi ustaleniami co do sygnatury $\sigma(p)$ wielomianu p, określa ją (a przez to i p) jednoznacznie.

c) W pozostałym przypadku wielomian p jest postaci (S) gdy X ma środek, zaś (P) gdy go nie ma. Teza wynika więc stąd, że tylko jeden wielomian postaci (S) ma sygnaturę równą (s_0, t_0) lub (t_0, s_0), i tak samo dla wielomianów postaci (P). $\square$

Uwaga 1. a) Twierdzenie wyznacza listę kwadryk w $\mathbb{R}^k$, taką, że każda kwadryka w k–wymiarowej rzeczywistej przestrzeni afinicznej jest afinicznie równoważna z dokładnie jedną z nich. (Patrz wniosek 1 w §4.1.) Dla $k = 2, 3$ listy te wypiszemy w p.2.

b) Podany dowód wskazuje, jak równanie kanoniczne kwadryki $u^{-1}(0)$ zależy od tego, czy funkcja kwadratowa u ma środek, jaką ma sygnaturę, i jaki jest znak $u(a)$ dla dowolnego jej środka a. Bardziej „geometryczny" dowód, wraz z interpretacją liczb s i t w równaniu kanonicznym, dadzą zadania uzupełniające 4 i 5 w p.3.

Pytanie (kombinatoryczne). Przy zadanym k, ile jest kwadryk na liście?

Zajmijmy się jeszcze euklidesową klasyfikacją kwadryk:

Twierdzenie 2 (o redukcji, wersja euklidesowa)**.** *Niepusta kwadryka w euklidesowej przestrzeni afinicznej jest w pewnej mapie euklidesowej zadana równaniem powstałym z równania afiniczne kanonicznego przez zastąpienie wyrażeń x_i^2 wyrażeniami $(\frac{x_i}{a_i})^2$ dla $i = 1, ..., s+t$, gdzie $a_1, ..., a_{s+t}$ są liczbami dodatnimi. (Tu, s i t to liczby występujące w postaciach (S), (HE), (P).)*

Równania kwadryk, opisane w twierdzeniu 2, nazywane są **euklidesowo kanonicznymi**; znalezienie zaś mapy, o której w twierdzeniu mowa, to **sprowadzenie kwadryki na osi główne**.

Tabele w p.2 mogą pomóc wyjaśnić, jak równania jednego kanonu generują równania drugiego. Zaś w p.4 wyjaśnimy, na ile równanie euklidesowo – kanoniczne kwadryki jest jednoznaczne.

Dowód twierdzenia 2. Wystarcza powtórzyć początkową część dowodu twierdzenia 1, lecz w miejsce lematu 1 wykorzystać

Lemat 2. *Każdy wielomian kwadratowy $p_0 \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_k]$ można euklidesowym podstawieniem przeprowadzić w proporcjonalny do otrzymanego z wielomianu jednej z postaci (∅),(S), (HE), (P) przez zastąpienie wyrażeń x_i^2 wyrażeniami $(\frac{x_i}{a_i})^2$, dla pewnych $a_i > 0$ $(i = 1, ..., s + t)$.*

Dowód lematu 2. Stosuje się dowód lematu 1, lecz a) w miejsce uwagi 1 z §3.2 używamy twierdzenia 1 z §3.3, i b) rezygnujemy z końcowych podstawień $y_i = \sqrt{|\lambda_i|}x_i$, a po prostu przyjmujemy $a_i := 1/\sqrt{|\lambda_i|}$ dla $i = 1, ..., s + t$. □

Uwaga 2. Niech X będzie kwadryką w euklidesowej przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}$. W pewnej mapie euklidesowej S jest ona zadana równaniem euklidesowo kanonicznym; niech zbiór X' będzie w tej mapie zadany równaniem otrzymanym przez zmianę współczynników a_i na 1. Wtedy $X = F(X')$, gdzie przekształcenie $F\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ jest w mapie S zadane wzorem $(x_1, ..., x_k) \mapsto (a_1x_1, ..., a_kx_k)$, przy czym przyjmujemy $a_i = 1$ dla $i > s + t$. Ponieważ własności przekształcenia F łatwo jest badać, uwaga ta wskazuje na rolę kwadryk, które w mapie euklidesowej zadane są równaniem kanonu afinicznego.

Zadanie 2. a) Każda kwadryka w $\mathbb{C}^k$ jest w pewnej mapie afinicznej zadana równaniem jednej z dwóch postaci: $\sum_{i=1}^r x_i^2 = c$, gdzie $c \in \{0, 1\}$ i $1 \le r \le k$, lub $\sum_{i=1}^r x_i^2 = x_k$, gdzie $1 \le r \le k - 1$. Spośród tych równań, tylko $x_1^2 = 0$ wyznacza podprzestrzeń.

b) Kwadryka w $\mathbb{C}^k$ zawsze jest niepusta, a jej równanie, wymienione w a), jest jedyne. (Wskazówka: dowód twierdzenia 1.)

Zadanie uzupełniające 1. (Dotyczy związku z rozkładem biegunowym).

a) Dowieść, że wśród równań euklidesowo–kanonicznych jedynie równania postaci (HE) przy $s = k$ zadają ograniczony podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^k$.

b) Przemyśleć poniższe rozumowanie. Gdy $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k)$ jest operatorem nieosobliwym, to kwadryka $X \subset \mathbb{R}^k$, zadana równaniem $\|L(\mathbf{x})\|^2 = 1$, jest ograniczona i jej środkiem jest $\mathbf{0}$. W pewnej liniowej mapie euklidesowej jest więc ona zadana równaniem $\sum_{i=1}^k (x_i/a_i)^2 = 1$ i może przekształceniem $F(x_1, \ldots x_k) = (x_1/a_1, \ldots x_k/a_k)$ być przekształcona na sferę $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k\colon \sum_{i=1}^k x_i^2 = 1\}$. Wtedy $U := LF^{-1}$ jest operatorem izometrii liniowej, co daje rozkład biegunowy $L = UF$.

2. Kanony równań kwadratowych w $\mathbb{R}^2$ i w $\mathbb{R}^3$.

Dla $k = 2, 3$ wypiszemy teraz kanony (afiniczny i euklidesowy) równań kwadratowych i nazw odpowiadających im zbiorów w $\mathbb{R}^k$. Dla skrócenia zapisu, niektóre równania zmienimy, dodając do obu stron 1 lub x_k, tak, by lewe strony równań były równe $\sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} x_i^2$, a prawe 1 lub 0 lub x_k; przy tym gdy prawa strona jest równa 0, to $s \geq t$ i $s+t \leq k$, a gdy jest równa x_k, to $s \geq t$ i $s+t \leq k-1$. Poza umieszczonymi na końcu równaniami postaci ($\emptyset$), lewe strony uporządkowano według malejących wartości $s+t$, a gdy te są równe – według malejących wartości s.

Kanony równań kwadratowych w $\mathbb{R}^2$ i nazwy zadanych nimi tworów:

Nr	Równanie k. afinicznego	Nazwa tworu	Równanie k. euklidesowego
1	$x_1^2 + x_2^2 = 1$	**elipsa**	$(\frac{x_1}{a_1})^2 + (\frac{x_2}{a_2})^2 = 1$
2	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	punkt	$(\frac{x_1}{a_1})^2 + (\frac{x_2}{a_2})^2 = 0$
3	$x_1^2 - x_2^2 = 1$	**hiperbola**	$(\frac{x_1}{a_1})^2 - (\frac{x_2}{a_2})^2 = 1$
4	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	2 przecinające się proste	$(\frac{x_1}{a_1})^2 - (\frac{x_2}{a_2})^2 = 0$
5	$x_1^2 = 1$	2 proste równoległe	$(\frac{x_1}{a_1})^2 = 1$
6	$x_1^2 = 0$	prosta	$(\frac{x_1}{a_1})^2 = 0$
7	$x_1^2 = x_2$	**parabola**	$(\frac{x_1}{a_1})^2 = x_2$
8,9	$-\sum_{i=1}^{t} x_i^2 = 1,\ t = 1, 2$	zbiór pusty	$-\sum_{i=1}^{t}(\frac{x_j}{a_i})^2 = 1,\ t = 1, 2$

Kanony równań kwadratowych w $\mathbb{R}^3$ i nazwy zadanych nimi tworów:

Nr	R-nie k. afinicznego	Nazwa tworu	Równanie k. euklidesowego
1	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$	**elipsoida**	$(\frac{x_1}{a_1})^2 + (\frac{x_2}{a_2})^2 + (\frac{x_3}{a_3})^2 = 1$
2	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	punkt	$(\frac{x_1}{a_1})^2 + (\frac{x_2}{a_2})^2 + (\frac{x_3}{a_3})^2 = 0$
3	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$	**hiperboloida 1-powłokowa**	$(\frac{x_1}{a_1})^2 + (\frac{x_2}{a_2})^2 - (\frac{x_3}{a_3})^2 = 1$
4	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	stożek eliptyczny	$(\frac{x_1}{a_1})^2 + (\frac{x_2}{a_2})^2 - (\frac{x_3}{a_3})^2 = 0$
5	$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$	**hiperboloida dwupowłokowa**	$(\frac{x_1}{a_1})^2 - (\frac{x_2}{a_2})^2 - (\frac{x_3}{a_3})^2 = 1$
6	$x_1^2 + x_2^2 = 1$	walec eliptyczny (t.j. nad elipsą)	$(\frac{x_1}{a_1})^2 + (\frac{x_2}{a_2})^2 = 1$
7	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	prosta	$(\frac{x_1}{a_1})^2 + (\frac{x_2}{a_2})^2 = 0$
8	$x_1^2 + x_2^2 = x_3$	**paraboloida eliptyczna**	$(\frac{x_1}{a_1})^2 + (\frac{x_2}{a_2})^2 = x_3$
9	$x_1^2 - x_2^2 = 1$	walec hiperboliczny	$(\frac{x_1}{a_1})^2 - (\frac{x_2}{a_2})^2 = 1$
10	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	2 płaszczyzny przecinające się	$(\frac{x_1}{a_1})^2 - (\frac{x_2}{a_2})^2 = 0$
11	$x_1^2 - x_2^2 = x_3$	**paraboloida hiperboliczna**	$(\frac{x_1}{a_1})^2 - (\frac{x_2}{a_2})^2 = x_3$
12	$x_1^2 = 1$	2 płaszczyzny rozłączne	$(\frac{x_1}{a_1})^2 = 1$
13	$x_1^2 = 0$	płaszczyzna	$(\frac{x_1}{a_1})^2 = 0$
14	$x_1^2 = x_3$	walec paraboliczny	$(\frac{x_1}{a_1})^2 = x_3$
15-17	$-\sum_{i=1}^{t} x_i^2 = 1, t \leq 3$	zbiór pusty	$-\sum_{i=1}^{t}(\frac{x_i}{a_i})^2 = 1,\ t \leq 3$

W każdym wierszu tabeli, za równaniem kanonu afinicznego umieszczono przyjętą nazwę tworu, zadanego tym równaniem w jakiejkolwiek mapie. W myśl twierdzeń 1 i 2 z p.1, prowadzi to do nadania każdej kwadryce w rzeczywistej przestrzeni afinicznej dokładnie jednej nazwy. Oba równania ze wspólnego wiersza zadają kwadrykę o tej samej nazwie, bo drugie powstaje z pierwszego przez podstawienie liniowe.

Definicja. Za [ABB], niepustą kwadrykę nazwiemy
parabolidą, gdy nie ma ona środka,
hiperboliczno–eliptyczną, gdy ma środek, lecz nie jest stożkiem.

Uwaga 1. Jak odnotowano w dowodzie tw. 1 w p.2, równanie występujące w tabeli określa stożek, twór hiperboliczno–eliptyczny lub paraboloidę w zależności od tego, czy po prawej stronie równania jest 0, 1 czy x_k. Walce są określone równaniami, które w pierwszej tabeli zależą od jednej zmiennej, a w drugiej – od jednej lub dwóch. Podstawy walców można rozpoznać, korzystając z przykładu 1 w §4.4. Wytłuszczono w tabelach nazwy tworów **nieosobliwych**, tzn. tych, które są niepuste i nie są walcem ani stożkiem. (Przyczyn nazwania ich nieosobliwymi nie umiemy tu wyrazić.)

Zadanie uzupełniające 1. Jaki twór w $\mathbb{R}^2$ opisuje równanie $(ax+by+c)(a'x+b'y+c')=d$, zależnie od $a, a', ..., d$? A równanie $(ax+by+cz+d)(a'x+b'y+c'z+d')=e$ w $\mathbb{R}^3$?

Zadania ze zbioru Kostrykina: od 20 do 24 i od 27 do 29 w §II.6.4

3. Podstawowe własności i rozróżnienie afiniczne kwadryk w $\mathbb{R}^2$ i w $\mathbb{R}^3$.

Dla $k=2,3$ podamy teraz czysto „wizualny” dowód twierdzenia o klasyfikacji afinicznej kwadryk w $\mathbb{R}^k$. Kwadrykę na rzeczywistej płaszczyźnie afinicznej nazwiemy **krzywą** stopnia 1 lub 2, przy czym punkt i zbiór pusty uznajemy za krzywą zdegenerowaną. Do elipsy, paraboli i hiperboli stosuje się też nazwę **stożkowa**.

Dowód twierdzenia 2 w p.1 dla $k=2$. Rozważmy wpierw stożkowe; są one w tabeli zadane równaniami 1,3,7. Wśród nich, tylko parabola nie ma środka. Elipsa ma na podstawie twierdzenia 2b) w §4.4 jeden środek, i hiperbola też; lecz dla hiperboli rozłączna z nią prosta przechodząca przez ten środek istnieje, a dla elipsy nie. (Latwy rachunek pozostawiony jest jako ćwiczenie.) Te własności rozróżniają stożkowe afinicznie.

Każdą z pozostałych krzywych odróżnia afinicznie od innych własność uwidoczniona w nazwie (np. ta, że zbiór jest pusty, że jest prostą, że jest sumą dwóch prostych przecinających się itp.). To dowodzi, że w $\mathbb{R}^2$ różne równania kanonu afinicznego zadają zbiory afinicznie nierównoważne. □

Dla $k=3$ też wykorzystamy afinicznie niezmiennicze własności kwadryk, tym razem położonych w $\mathbb{R}^3$. Przestrzeń $\mathbb{R}^3$ wyposażamy w standardową funkcję odległości, odgrywającą pomocniczą rolę w klasyfikacji afinicznej, lecz zasadniczą w euklidesowej.

Zadanie 1. Niech $\phi\colon [0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją, i niech

$$X := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \phi(\sqrt{x^2+y^2},z)=0\}$$

Wówczas dla każdego $s\in\mathbb{R}$ przecięcie zbioru X płaszczyzną $z=s$ jest sumą wszystkich okręgów, które leżą w tej płaszczyźnie i przecinają zbiór $\{(r,0,z):\ \ \phi(r,z)=0\}$.

Zasadne jest więc nazwanie zbioru X **powierzchnią obrotową** otrzymaną przez obrót, wokół osi z, zbioru X_0, zadanego w płaszczyźnie rz warunkami $\phi(r,z)=0,\ r\geq 0$. (Interpretujemy ją jako wirującą wokół osi z.) Tak samo otrzymujemy równania powierzchni obrotowych, otrzymanych przez obroty krzywych wokół innych osi prostokątnego układu $Oxyz$ (który dalej oznaczamy $Ox_1x_2x_3$).

Omówimy niektóre powierzchnie w $\mathbb{R}^3$, afinicznie równoważne obrotowym.

1. Równanie $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ zadaje w $\mathbb{R}^3$ **sferę** o środku w $\mathbf{0}$ i promieniu 1, czyli zbiór punktów odległych od $\mathbf{0}$ o 1. Wynika to stąd, że $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ jest kwadratem odległości punktu (x_1,x_2,x_3) od $\mathbf{0}$.

Elipsoidę, zadaną w $\mathbb{R}^3$ równaniem $(x_1/a_1)^2+(x_2/a_2)^2+(x_3/a_3)^2=1$, otrzymujemy przekształcając sferę zgodnie z uwagą 2 w p.1.

2. Równanie $x_1^2+x_2^2-x_3^2=1$ zadaje w $\mathbb{R}^3$ powierzchnię otrzymaną z hiperboli $r^2-x_3^2=1$ przez obracanie jej wokół osi x_3, a równanie $x_1^2-x_2^2-x_3^2=1$ – powierzchnię otrzymaną z hiperboli $x_1^2-r^2=1$ przez obracanie jej wokół osi x_1. Gdy wirującą płaszczyznę zatrzymać w położeniu $x_2=0$, w obu przypadkach widzimy na niej tę samą obracaną hiperbolę $x_1^2-x_3^2=1$. Obie powierzchnie nazywamy **hiperboloidami obrotowymi**. Są one wynikiem obrotu hiperboli wokół jej osi symetrii, przy czym w pierwszym przypadku oś jest rozłączna z hiperbolą, a w drugim nie. Powoduje to różnicę kształtu obu hiperboloid. Tylko jedna z nich jest rozłączna z pewną płaszczyzną, przechodzącą przez środek hiperboloidy, i tę nazywamy **dwupowłokową**, a drugą – **jednopowłokową**. Każdą hiperboloidę otrzymujemy przekształcając jedną z tych hiperboloid obrotowych jak opisano w uwadze 2 z p.1.

3. Równanie $x_1^2+x_2^2=x_3$ zadaje w $\mathbb{R}^3$ powierzchnię obrotową powstałą z obracania paraboli $r^2=x_3$ wokół osi x_3; jest to **paraboloida obrotowa**. Przez niezależne „rozciągnięcie" lub „skrócenie" osi x_1 i x_2 otrzymujemy z niej **paraboloidę eliptyczną** o równaniu $(x_1/a_1)^2+(x_2/a_2)^2=x_3$. Nazwa wiąże się z tym, że niepuste przecięcia tej paraboloidy płaszczyznami $x_3=c$ są elipsami (lub punktem); jest to jedyna paraboloida w $\mathbb{R}^3$, mająca płaskie przekroje eliptyczne. (Por. dalej zadanie uz.1.)

4. Równanie $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ zadaje w $\mathbb{R}^3$ powierzchnię obrotową powstałą przez obrót wokół osi x_3 tworu o równaniu $r^2-x_3^2=0$, będącego sumą dwóch prostych

przecinających się w $\mathbf{0}$. W wyniku obrotu otrzymujemy **stożek obrotowy**. Gdy jedną lub obie osi x_1 i x_2 poddamy jednokładości, to przekształcimy go na **stożek eliptyczny**, którego przekroje płaszczyznami $x_3 = c \neq 0$ są elipsami.

Zbadajmy też pewną powierzchnię nie powstającą w wyniku obrotu.

5. Gdy w płaszczyźnie $x_2 = 0$ narysujemy parabolę $x_3 = x_1^2$ i w każdym jej punkcie $(t, 0, t^2)$ zawiesimy wierzchołkiem parabolę $x_3 = -x_2^2 + t^2$, umieszczoną w płaszczyźnie $x_1 = t$, to suma wymienionych parabol utworzy zbiór zadany równaniem $x_3 = x_1^2 - x_2^2$, nazywany **paraboloidą hiperboliczną**. Jego przekroje płaszczyznami $x_1 = c$ czy $x_2 = c$ są parabolami, a przekroje płaszczyznami $x_3 = c$ są dla $c \neq 0$ hiperbolami.

Definicja. Nazwijmy podzbiór przestrzeni afinicznej **prostokreślnym**, jeśli przez każdy jego punkt przechodzi prosta, w tym zbiorze zawarta. Każdy walec i każdy różny od punktu stożek jest więc prostokreślny. Istnieją też inne prostokreślne kwadryki:

Twierdzenie 1. *Gdy X jest paraboloidą hiperboliczną lub hiperboloidą jednopowłokową, to przez każdy punkt $p \in X$ przechodzą co najmniej dwie proste, zawarte w X.*

*Dodatek *: Istnieją dwie rodziny prostych zawartych w X, takie, że każdy punkt $p \in X$ leży na dokładnie jednej prostej każdej z rodzin oraz, ponadto, jeśli dwie proste należą do wspólnej rodziny, to są skośne, a jeśli jeśli należą do różnych, to nie są skośne.*

Dowód. Badane tu własności zachowują się przy izomorfizmach afinicznych. Można więc założyć, że X jest podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^3$, zadanym w standardowym układzie współrzędnych równaniem afinicznie kanonicznym. Rozpatrzymy dwa przypadki.

a) Zbiór X jest zadany równaniem $x_1^2 - x_2^2 = x_3$. Wtedy każda płaszczyzna $P_c := \{(x_1, x_2, x_3)\colon x_1 - x_2 = c\}$ przecina X wzdłuż prostej K_c, zadanej równaniami $c(x_1 + x_2) = x_3,\ x_1 - x_2 = c$; płaszczyzna zaś Q_c o równaniu $x_1 + x_2 = c$ przecina X wzdłuż prostej L_c, zadanej równaniami $c(x_1 - x_2) = x_3,\ x_1 + x_2 = c$. A że każdy punkt przestrzeni leży na jednej z płaszczyzn P_c i na jednej z płaszczyzn Q_c, więc łatwo widzieć, że rodziny $\{K_c\colon c \in \mathbb{R}\}$ i $\{L_c\colon c \in \mathbb{R}\}$ spełniają żądane warunki.

b) Zbiór X jest zadany równaniem $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$. Wtedy punkt $(1, 0, 0)$ leży w X i w płaszczyźnie $x_1 = 1$, a ta przecina X wzdłuż zbioru $K \cup L$, gdzie K jest prostą, zadaną równaniami $x_2 = x_3,\ x_1 = 1$, a L – równaniami $x_2 = -x_3,\ x_1 = 1$. Oznaczmy przez $\mathcal{K}$ (odp. przez $\mathcal{L}$) rodzinę tych prostych w $\mathbb{R}^3$, które są obrazem prostej K (odp.: L) przy obrocie wokół osi x_3. Obie rodziny składają się z prostych, zawartych w X, bo $K \cup L \subset X$, a opisane obroty przeprowadzają X w X. Dowolny punkt $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in X$ leży na pewnej prostej rodziny $\mathcal{K}$: przecięcie X z płaszczyzną $x_3 = a_3$ jest bowiem okręgiem, skąd pewien obrót wokół osi x_3 przeprowadza punkt $\mathbf{a}$ na punkt przecięcia tej płaszczyzny z prostą K; obrót przeciwny przeprowadza K na prostą $K' \in \mathcal{K}$, przechodzącą przez $\mathbf{a}$. Dla rodziny $\mathcal{L}$ rozumowanie jest analogiczne, a sprawdzenie wymienionych w „dodatku” własności rodzin $\mathcal{K}$ i $\mathcal{L}$ pozostawione jest jako ćwiczenie. (Wskazówka: $K = \{(1,t,t) \colon t \in \mathbb{R}\}$, skąd $\mathcal{K} = \{K_\varphi \colon \varphi \in [0, 2\pi)\}$, gdzie $K_\varphi = \{(\cos\varphi - t\sin\varphi, \sin\varphi + t\cos\varphi, t) \colon t \in \mathbb{R}\}$; podobnie dla $\mathcal{L}$.) ⊟

Geometryczny dowód twierdzenia 2 w p.3 dla $k = 3$. Sprowadza się on do poniższych obserwacji:

a) Definicja stożków odróżnia je afinicznie od pozostałych kwadryk. Na mocy uwagi w p.2, stożki opisują równania 2,4,7,10,13. Stożek eliptyczny jest wśród nich wyróżniony tym, że nie jest punktem i ma tylko jeden środek; zaś każdy z pozostałych stożków jest wyróżniony własnością uwidocznioną w nazwie (tym, że jest płaszczyzną, że jest sumą dwóch płaszczyzn nierównoległych itp.).

b) Paraboloidy, zadane równaniami 8, 11 i 14, różnią się od pozostałych kwadryk tym, że nie mają środka. Paraboloida hiperboliczna jest prostokreślna, a eliptyczna nie jest (nie zawiera ona nawet żadnej prostej, co należy wykazać). Zaś walec paraboliczny różni się od nich obu tym, że jest walcem.

c) Z pozostałych tworów weźmy te, które mają jeden środek: elipsoidę i obie hiperboloidy. Rozróżnia je liczba prostych, rozłącznych z tworem i przechodzących przez jego środek; wynosi ona 0 dla elipsoidy, 1 dla hiperboloidy jednopowłokowej i ∞ dla dwupowłokowej. (Rachunek pozostawiony jest jako ćwiczenie).

d) Pozostają następujące niepuste twory: walec hiperboliczny (ma on zbiór środków będący prostą i jest rozłączny z pewną płaszczyzną przechodzącą przez jego środek), walec eliptyczny (ten przecina każdą płaszczyznę przechodzącą przez jego środek), oraz suma dwóch płaszczyzn równoległych (tu zbiorem środków jest płaszczyzna). Wymienione własności rozróżniaja te twory afinicznie. □

Zadania uzupełniające.

1. Czy paraboloida eliptyczna ma płaskie przekroje hiperboliczne? A paraboloida hiperboliczna i walec paraboliczny, czy mają eliptyczne?

2. Dwa pojazdy, każdy poruszający się ruchem jednostajnym po jednej z dwóch prostych skośnych, połączone są prostoliniową rozciągliwą nicią. Dowieść, że nić zakreśli fragment paraboloidy hiperbolicznej.

3. Dowieść, że w twierdzeniu 1 słowa „co najmniej" można zastąpić przez „dokładnie".

Poniższe zadania dają alternatywny dowód twierdzenia o rozróżnianiu afinicznym w dowolnym wymiarze. Dla podzbioru X przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$ oznaczmy przez M_X zbiór (być może pusty) jego środków symetrii, i przyjmijmy

$$\alpha_X := \sup\{\dim(\mathbb{B}) \colon \mathbb{B} \subset \mathbb{A} \text{ jest podprzestrzenią i } M_X \subset \mathbb{B} \subset X\};$$
$$\beta_X := \sup\{\dim(\mathbb{B}) \colon \mathbb{B} \subset \mathbb{A} \text{ jest podprzestrzenią i } M_X \subset \mathbb{B} \subset \mathbb{A} \setminus X\}.$$

4. Udowodnić, że liczby $\dim(M_X), \alpha_X$ i β_X nie zmienią się, gdy zbiór X zastąpić przez jego obraz przy izomorfizmie afinicznym $\mathbb{A} \to \mathbb{A}'$.

5. * Niech kwadryka X będzie w pewnej mapie zadana równaniem afinicznie kanonicznym $p(\mathbf{x}) = 0$ z p.1, dla zadanych liczb s i t. Udowodnić, że s i t są przez X wyznaczone w następujący sposób:

a) Gdy p jest postaci (S), to $\dim(M_X) = k - s - t$ oraz $\alpha_X = k - s$.

b) Gdy p jest postaci (HE), to $\dim(M_X) = k - s - t$ oraz $\beta_X = k - s$.

c) Gdy p jest postaci (P), to $\alpha_X = k - s - 1$ oraz $\beta_X = k - t - 1$.

(Wskazówka: zadania uzupełniające 2 i 3 w §VII.2.2.)

Problem 1. Zmieńmy definicję liczb α_X i β_X, usuwając żądanie, by $M_X \subset \mathbb{B}$. Wyznaczyć otrzymane liczby α'_X i β'_X przez k, s i t, zależnie od typu (S), (HE) czy (P) kwadryki X.

Zadania ze zbioru Kostrykina: 25, 26 31, 32 *, 33* w §II.6.4.

4. Euklidesowa wersja twierdzenia o rozróżnianiu kwadryk równaniami kanonicznymi.

Gdy chodzi o odróżnianie euklidesowe kwadryk ich równaniami kanonicznymi, sytuacja jest inna niż w przypadku afinicznym. Odnotujmy następujące uwagi:

Uwaga 1. Kwadryka, zadana w $\mathbb{R}^k$ równaniem $(x_1/a_1)^2 + ... + (x_s/a_s)^2 = \varepsilon$, gdzie $\varepsilon \leq 0$, nie zależy od liczb $a_1, ..., a_s$ (zakładamy, że są one niezezrowe) i jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^k$ lub zbiorem pustym.

Poniżej zakładamy, że kwadryki $X, X' \subset \mathbb{R}^k$ zadane są równaniami $p(\mathbf{x}) = 0$ i $p'(\mathbf{x}) = 0$, odpowiednio, przy czym wielomiany p i p' są postaci euklidesowo–kanonicznej (6) z §3.3:

$$p = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 + \varepsilon x_k + c, \text{ gdzie } \varepsilon\lambda_k = \varepsilon c = 0 \neq \lambda_1, \text{ i podobnie dla } p' \tag{8}$$

Uwaga 2. Jeśli p' można otrzymać z p w wyniku wykonania jednej lub kilku następujących operacji:

i) pomnożenia wielomianu przez niezerową stałą,

ii) zmianę znaku współczynnika ε,

iii) permutowania współczynników λ_i, zachowującego warunek $\varepsilon\lambda_k = 0$,

to kwadryki X i X' są euklidesowo równoważne.

Choć równanie euklidesowo–kanoniczne danej kwadryki nie jest jednoznacznie wyznaczone, to uwagi powyższe opisują wszystkie możliwości jego zmian:

Twierdzenie 1 („O rozróżnianiu”, wersja euklidesowa.). *Przy wprowadzonych oznaczeniach, niech kwadryki X i X' będą euklidesowo równoważne. Jeśli $X \neq \emptyset$ i X nie jest podprzestrzenią, to p' otrzymać można z p jak opisano w uwadze 2.*

Dowód. * Zauważmy wpierw, że wielomian p' można podstawieniem euklidesowym przeprowadzić w μp, dla pewnego $\mu \in \mathbb{R}$. Istotnie, dla przekształcenia $F \in \mathrm{OA}(\mathbb{R}^k)$ takiego, że $F(X) = X'$, wielomiany $p' \circ F$ i p mają ten sam zbiór zer X, wobec czego są proporcjonalne na podstawie twierdzenia 1 w §4.2.

Stąd wynika, że $\mu c = c'$ i ciąg (λ'_i) różni się tylko kolejnością od $(\mu\lambda_i)$; patrz stwierdzenie 1 w §3.3 i zad. uz. 1 w §3.5, To zaś, że $\varepsilon' = \pm\mu\varepsilon$, wynika z poniższych dwóch lematów (drugi stosujemy do pary wielomianów p i p'/μ, a pierwszy do każdego z nich):

Lemat 1. * *Dla wielomianu $p \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_k]$ przyjmijmy*

$$\delta(p) := \inf_{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^k} \sup_{\mathbf{v}\in S} |p(\mathbf{a}+\mathbf{v}) - p(\mathbf{a}-\mathbf{v})|, \text{ gdzie } S := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k \colon \|\mathbf{v}\| = 1\}$$

Jeśli wielomian p jest zadany wzorem (8), to $\delta(p) = 2|\varepsilon|$.

Dowód. Z (8) wynika, że $p(\mathbf{a} + \mathbf{v}) - p(\mathbf{a} - \mathbf{v}) = 4\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i v_i + 2\varepsilon v_k$. Ponieważ, na podstawie nierówności CBS, $\sup_{\mathbf{v}\in S} |\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| = \|\mathbf{w}\|$ dla każdego $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^k$, więc $\sup\{|p(\mathbf{a}+\mathbf{v}) - p(\mathbf{a}-\mathbf{v})| \colon \mathbf{v} \in S\} = \sqrt{16\sum_i \lambda_i^2 a_i^2 + 4\varepsilon^2}$. (Gra tu rolę to, że $\varepsilon\lambda_k = 0$.) Oczywiście, prawa strona osiąga dla $a_1 = ... = a_k = 0$ wartość najmniejszą.

Lemat 2. * *Gdy $p, p' \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_k]$ są euklidesowo równoważne, to $\delta(p) = \delta(p')$.*

Dowód. Niech euklidesowy izomorfizm $F \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ ma tę własność, że $p' = p \circ F$. Wówczas F przeprowadza każdą parę punktów $\mathbf{a} + \mathbf{v}, \mathbf{a} - \mathbf{v}$, symetryczną względem $\mathbf{a}$, na parę symetryczną względem $F(\mathbf{a})$ – a więc postaci $F(\mathbf{a}) + \mathbf{w}, F(\mathbf{a}) - \mathbf{w}$; przy tym $\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|$, bo $\|\mathbf{w}\|$ i $\|\mathbf{v}\|$ to odległości od $F(\mathbf{a} + \mathbf{v})$ do $F(\mathbf{a})$ i od $\mathbf{a} + \mathbf{v}$ do $\mathbf{a}$, odpowiednio, a te są równe. Stąd dla $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$:

$$\sup_{\mathbf{w}\in S} |p(F(\mathbf{a})+\mathbf{w})-p(F(\mathbf{a})-\mathbf{w})| \geq \sup_{\mathbf{v}\in S} |p(F(\mathbf{a}+\mathbf{v}))-p(F(\mathbf{a}-\mathbf{v}))| = \sup_{\mathbf{v}\in S} |p'(\mathbf{a}+\mathbf{v})-p'(\mathbf{a}-\mathbf{v})|.$$

Wobec tego $\delta(p') \leq \delta(p)$ i, symetrycznie, $\delta(p) \leq \delta(p')$. □

Zadania uzupełniające. (dotyczące metrycznych własności stożkowych; uzupełnić)

1. a) Na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{E}^2$ niech L będzie prostą, a a punktem spoza L. Dowieść, że zbiór $\{x \in \mathbb{E}^2 \colon d(x, a) = e \cdot \mathrm{dist}(x, L)\}$ jest dla $e > 1$ hiperbolą, dla $e = 1$ parabolą, a dla $e \in (0, 1)$ elipsą. (Liczbę e nazywamy mimośrodem, punkt a ogniskiem, a prostą L – kierownicą otrzymanej stożkowej.)

   b) Dowieść, że każdą stożkową w $\mathbb{E}^2$, nie będącą okręgiem, można tak otrzymać.

2. Stożkowe jako przekroje stożka; kule belgijskie.

3. Metryczne własności elipsy, hiperboli i paraboli; ich biegunowa parametryzacja.

§ 6. Przestrzenie afiniczne, c.d.: twierdzenie o zanurzaniu i konsekwencje.

1. Przestrzeń wektorów swobodnych.

W tym punkcie $(\mathbb{A}, M_{\mathbb{A}})$ jest ustaloną k–wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem $\mathbb{F}$. Dowolny izomorfizm $S\colon \mathbb{A} \to V$, gdzie V to przestrzeń liniowa, pozwala zdefiniować operację $\boxplus$ dodawania wektorów $\mathbf{v} \in V$ do punktów $a \in \mathbb{A}$. (Za S możemy obrać n.p. dowolną mapę.) Przyjmujemy mianowicie:

$$a \boxplus \mathbf{v} := S^{-1}(S(a) + \mathbf{v}) \text{ dla } \ a \in \mathbb{A}, \mathbf{v} \in V$$

Lemat 1. *Oznaczmy V przez $T_{\mathbb{A}}$. Wówczas:*
i) $(a \boxplus \mathbf{v}) \boxplus \mathbf{w} = a \boxplus (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ *dla* $a \in \mathbb{A}$ *i* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbb{A}}$*;*
ii) *dla każdego $a \in \mathbb{A}$, przekształcenie* $\exp_a\colon T_{\mathbb{A}} \to \mathbb{A}$*, zdefiniowane wzorem* $\exp_a(\mathbf{v}) := a \boxplus \mathbf{v}$*, jest izomorfizmem afinicznym. (Stąd jest ono bijektywne.)*

Dowód. Ad i). Skoro S jest bijekcją, to wystarczy porównać wartości S na obu stronach: $S\big((a \boxplus \mathbf{v}) \boxplus \mathbf{w}\big) = S(a \boxplus \mathbf{v}) + \mathbf{w} = (S(a) + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = S(a) + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = S\big(a \boxplus (\mathbf{v} + \mathbf{w})\big)$.

Ad ii). Oczywiście $\exp_a = S^{-1}F$, gdzie F to przesunięcie o $S(a)$. A że $F\colon V \to V$ i S są izomorfizmami, więc $\exp_a$ też nim jest, na podstawie stwierdzenia 1 w §2.1. $\square$

Definicja. a) Gdy przestrzeń wektorowa $T_{\mathbb{A}}$ i operacja $\boxplus$ dodawania wektorów z $T_{\mathbb{A}}$ do punktów przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$ mają własności i) i ii), to parę $(T_{\mathbb{A}}, \boxplus)$ nazywamy **przestrzenią wektorów swobodnych** dla $\mathbb{A}$. Operację $\boxplus$ możemy też oznaczać $+$, bo możliwość pomylenia jej z dodawaniem w $T_{\mathbb{A}}$ czy w $\mathbb{F}$ jest znikoma; patrz też dalej w p.2. Słowo „swobodnych" niekiedy opuszczamy, bo innych wektorów tu nie rozpatrujemy.

b) Dla danych punktów $a, b \in \mathbb{A}$ warunek ii) jednoznacznie określa wektor $\mathbf{v} \in T_{\mathbb{A}}$ taki, że $a \boxplus \mathbf{v} = b$. Wektor ten oznaczamy $\mathbf{v}(a, b)$ i nazywamy **wektorem (swobodnym) od** a **do** b. Dla $a, b, c \in \mathbb{A}$ otrzymujemy z (i) i ii):

i)$'$ $a \boxplus \mathbf{v}(a, b) = b$ oraz $\mathbf{v}(a, b) + \mathbf{v}(b, c) = \mathbf{v}(a, c)$
ii)$'$ bijekcja $\mathbb{A} \ni x \mapsto \mathbf{v}(a, x) \in T_{\mathbb{A}}$ jest afiniczna (bo jest równa $\exp_a^{-1}$).

Dalsze badanie przestrzeni afinicznych oprzemy jedynie na istnieniu przestrzeni wektorów swobodnych, niekoniecznie wprowadzonej tak, jak opisano przed lematem 1. [3]

Przykład 1. a) Gdy $\mathbb{A}$ jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni wektorowej (czyli jest w niej warstwą), to za $T_{\mathbb{A}}$ możemy przyjąć jej podprzestrzeń kierunkową, jak w §2.3.

b) W szczególności, gdy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ i zbiór $\mathbb{A} := \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k : \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b}\}$ rozwiązań układu równań $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jest niepusty, to jest on podprzestrzenią afiniczną przestrzeni $\mathbb{F}^k$, a $T_{\mathbb{A}} := \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k : \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ jest przestrzenią wektorów swobodnych dla $\mathbb{A}$. $\boxminus$

[3] W większości podręczników, już definicja przestrzeni afinicznych wykorzystuje wektory swobodne.

Uwaga 1. Gdy w $i)'$ przyjmiemy $a = b = c$, to otrzymamy $\mathbf{v}(a, a) = \mathbf{0}$; podobnie, z i) oraz ii) wynika że $a + \mathbf{0} = a$. (Istotnie, na podstawie ii) istnieje jedyny wektor $\mathbf{u} \in T_{\mathbb{A}}$ taki, że $a \boxplus \mathbf{u} = a$; biorąc $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{u}$ w i) otrzymujemy $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.)

Uwaga 2. Może się zdarzyć, że $T_{\mathbb{A}} = \mathbb{A}$. Niekiedy wygodnie jest jednak założyć, że $T_{\mathbb{A}} \cap \mathbb{A} = \emptyset$, czy, jak w następnym punkcie, że $T_{\mathbb{A}} \cap (\mathbb{F} \times \mathbb{A}) = \emptyset$. Można to zawsze osiągnąć, zastępując $T_{\mathbb{A}}$ przez przestrzeń $T'_{\mathbb{A}} := \{p\} \times T_{\mathbb{A}}$, dla odpowiednio dobranego elementu p. Gdy w oczywisty sposób zmienimy też operację $\boxplus$, otrzymamy parę $(T'_{\mathbb{A}}, \boxplus')$ spełniającą żądany warunek i tak bliską wyjściowej, by z jej własności móc wnioskować o $(T_{\mathbb{A}}, \boxplus)$. (Wnioskowanie jest na tyle proste, że nie będziemy o nim mówić.)

Zadanie 1. * Niech $\mathbb{E}$ będzie euklidesową przestrzenią afiniczną a $(T_{\mathbb{E}}, \boxplus)$ jej przestrzenią wektorów. Wówczas na $T_{\mathbb{E}}$ można wprowadzić taki iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle$, że dla każdego $a \in \mathbb{E}$ przekształcenie $\exp_a \colon T_{\mathbb{E}} \to \mathbb{E}$ jest izometrią.

2. Zanurzenie w rozszerzoną przestrzeń punktów materialnych.

Niech $\mathbb{A}$ będzie przestrzenią afiniczną nad $\mathbb{F}$, a $(T_{\mathbb{A}}, \boxplus)$ pewną jej przestrzenią wektorów.

Definicja. a) Przez $\mathbb{F}^*$ oznaczmy zbiór $\mathbb{F} \setminus \{0\}$. Parę $(\lambda, a) \in \mathbb{F}^* \times \mathbb{A}$ nazwiemy **punktem materialnym**, o **masie** $\lambda \neq 0$ i skupionym w a. Przyjmijmy $\widetilde{\mathbb{A}} := (\mathbb{F}^* \times \mathbb{A}) \cup T_{\mathbb{A}}$, gdzie składniki po prawej uważamy za rozłączne; patrz uwaga 2 w p.1.

b) Ustalmy punkt $a_0 \in \mathbb{A}$ i zdefniujmy bijekcję $\pi \colon \widetilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{F} \times T_{\mathbb{A}}$ wzorami:

$$\pi(\lambda, a) = (\lambda, \lambda \mathbf{v}(a_0, a)) \text{ dla } (\lambda, a) \in \mathbb{F}^* \times \mathbb{A}, \quad \text{oraz } \pi(\mathbf{v}) = (0, \mathbf{v}) \text{ dla } \mathbf{v} \in T_{\mathbb{A}}.$$

W $\widetilde{\mathbb{A}}$ rozważać będziemy działania przeciągnięte: $x + y := \pi^{-1}(\pi(x) + \pi(y))$ i $\lambda \cdot x := \pi^{-1}(\lambda \pi(x))$ dla $x, y \in \widetilde{\mathbb{A}}$ i $\lambda \in \mathbb{F}$. (Po prawej są działania przestrzeni liniowej $\mathbb{F} \times T_{\mathbb{A}}$.)

Twierdzenie 1. *Zbiór $\widetilde{\mathbb{A}}$ jest z powyższymi działaniami przestrzenią liniową wymiaru $n = \dim \mathbb{A} + 1$, której $T_{\mathbb{A}}$ jest podprzestrzenią liniową. Ponadto, przekształcenie $j \colon \mathbb{A} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ zadane wzorem $j(a) = (1, a)$ jest afiniczne i ma następujące własności:*

a) dla $a \in \mathbb{A}$ i $\mathbf{u} \in T_{\mathbb{A}}$ zachodzi $j(a \boxplus \mathbf{u}) = j(a) + \mathbf{u}$, gdzie po lewej jest dodawanie wektorow swobodnych do punktów, a po prawej – dodawanie wektorów przestrzeni $\widetilde{\mathbb{A}}$.

b) $j(\mathbb{A})$ jest warstwą w $\widetilde{\mathbb{A}}$ względem $T_{\mathbb{A}}$, rozłączną z $T_{\mathbb{A}}$.

Dowód. Sprowadza się on do dwóch obserwacji.

i) Działania w $\widetilde{\mathbb{A}}$ zdefiniowano tak, by przy bijekcji π odpowiadały im działania przestrzeni liniowej $\mathbb{F} \times T_{\mathbb{A}}$ – co oznacza, że $\widetilde{\mathbb{A}}$ staje się przestrzenią liniową, a $\pi \colon \widetilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{F} \times T_{\mathbb{A}}$ izomorfizmem liniowym. W szczególności, $\dim \widetilde{\mathbb{A}} = \dim(\mathbb{F} \times T_{\mathbb{A}}) = n + 1$.

ii) Równość a) jest konsekwencją (dla $\lambda = 1$) dowodzonej niżej równości $(+)_3$. A że ponadto $\mathbb{A} = \{a_0 \boxplus \mathbf{v} \colon \mathbf{v} \in T_{\mathbb{A}}\}$, to $j(\mathbb{A}) = \{(1, a_0) + \mathbf{v} \colon \mathbf{v} \in T_{\mathbb{A}}\}$, co jest warstwą względem $T_{\mathbb{A}}$ w $\widetilde{\mathbb{A}}$. Warstwa ta jest rozłączna z $T_{\mathbb{A}}$, bo z założenia $T_{\mathbb{A}} \cap (\mathbb{F}^* \times \mathbb{A}) = \emptyset$. $\square$

Twierdzenie 2. *Działania w $\widetilde{\mathbb{A}}$ nie zależą od wyboru punktu a_0, bo (niżej, $a, b \in \mathbb{A}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{F}^*$ i $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in T_{\mathbb{A}}$):*

mnożenie przez skalar μ jest w $\widetilde{\mathbb{A}}$ określone wzorami $0 \cdot x = \mathbf{0}$ ($x \in \widetilde{\mathbb{A}}$) oraz

$(*)$ $\quad \mu \cdot (\lambda, a) = (\mu\lambda, a), \quad \mu \cdot \mathbf{u} =$*iloczyn μ przez $\mathbf{u}$ w przestrzeni $T_{\mathbb{A}}$,*

zaś dodawanie w $\widetilde{\mathbb{A}}$ – wzorami

$(+)_1$ $\quad (\lambda, a) + (\mu, b) = \Big(\lambda + \mu, a \boxplus \frac{\mu}{\lambda+\mu}\mathbf{v}(a, b)\Big)$ *gdy $\lambda + \mu \in \mathbb{F}^*$;*

$(+)_2$ $\quad (\lambda, a) + (-\lambda, b) = \lambda\mathbf{v}(b, a)$;

$(+)_3$ $\quad (\lambda, a) + \mathbf{u} = (\lambda, a \boxplus \frac{1}{\lambda}\mathbf{u})$;

$(+)_4$ $\quad \mathbf{u} + \mathbf{w} =$*suma $\mathbf{u}$ i $\mathbf{w}$ w przestrzeni wektorowej $T_{\mathbb{A}}$.*

Dowód. W dowodzie wykorzystywać będziemy to, że $\pi : \widetilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{F} \times T_{\mathbb{A}}$ jest izomorfizmem (liniowym). Każdorazowo, przez L oznaczymy wartość lewej, a przez P – prawej strony dowodzonej równości; zaś to, że $L = P$ wywnioskujemy stąd, że $\pi(L) = \pi(P)$.

By dowieść, że $\mu\cdot(\lambda, a) = (\mu\lambda, a)$ zauważamy, że $\pi(L) = \mu\cdot\pi(\lambda, a) = \mu\cdot(\lambda, \mathbf{v}(a_0, a)) = (\mu\lambda, \mu\lambda\mathbf{v}(a_0, a)) = \pi(P)$, skąd $L = P$. Dalsza część $(*)$, a także równości $(+)_4$ oraz $0 \cdot x = \mathbf{0}$, wynikają łatwo z definicji. Równości $(+)_3$ dowodzimy tak:

$$\pi(L) = \pi(\lambda, a) + \pi(\mathbf{u}) = (\lambda, \lambda\mathbf{v}(a_0, a)) + (\mathbf{0}, \mathbf{u}) = (\lambda, \lambda(\mathbf{v}(a_0, a) + \tfrac{1}{\lambda}\mathbf{u})) = \pi(P).$$

(Przypomnijmy, że $\mathbf{v}(a_0, a) + \frac{1}{\lambda}\mathbf{u} = \mathbf{v}(a_0, a \boxplus \frac{1}{\lambda}\mathbf{u})$; patrz $i')$ w p.1.) A że $\widetilde{\mathbb{A}}$ jest przestrzenią liniową, więc z $(+)_3$ i $(*)$ wynika też $(+)_2$. (Dlaczego?).

Na koniec, by dowieść $(+)_1$ zauważamy jak wyżej, że $\pi(L) = (\lambda + \mu, \lambda\mathbf{v}(a_0, a) + \mu\mathbf{v}(a_0, b)$. Ale, patrz $i)'$ w p.1, $\mathbf{v}(a_0, b) = \mathbf{v}(a_0, a) + \mathbf{v}(a, b)$ i $\mathbf{v}(a_0, a \boxplus \mathbf{u}) = \mathbf{v}(a_0, a) + \mathbf{u}$ dla $\mathbf{u} \in T_{\mathbb{A}}$. Otrzymujemy więc $\lambda\mathbf{v}(a_0, a) + \mu\mathbf{v}(a_0, b) = (\lambda + \mu)(\mathbf{v}(a_0, a) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\mathbf{v}(a, b))$ i dalej $\pi(L) = \Big(\lambda + \mu, (\lambda + \mu)\mathbf{v}(a_0, a \boxplus \frac{\mu}{\lambda+\mu}\mathbf{v}(a, b))\Big) = \pi(P)$. □

Uwaga 1. a) W zastosowaniach twierdzenia 1 będziemy utożsamiać każdy punkt $a \in \mathbb{A}$ z jednostkowym (tzn. o masie 1) punktem materialnym $j(a)$, a przez to $\mathbb{A}$ z $j(\mathbb{A})$. Teza a) zapewnia więc, że wynik $a \boxplus \mathbf{v}$ dodania wektora swobodnego $\mathbf{v}$ do punktu a jest równy ich sumie $a + \mathbf{v}$ w przestrzeni $\widetilde{\mathbb{A}}$, zaś b) – że $\mathbb{A}$ jest podzbiorem przestrzeni $\widetilde{\mathbb{A}}$, zanurzonym jako niezerowa warstwa względem podprzestrzeni liniowej $T_{\mathbb{A}}$.

b) To, wraz ze wzorem $(+)_2$, uzasadnia oznaczanie punktu $a \boxplus \mathbf{v}$ przez $a + \mathbf{v}$, a wektora $\mathbf{v}(a, b) \in T_{\mathbb{A}}$ przez $b - a$. Odtąd tak czynimy i przyjmujemy, że $\mathbb{A} \subset \widetilde{\mathbb{A}}$, jak opisano wyżej. Utożsamienie punktu $a \in \mathbb{A}$ i wektora $j(a) = (1, a) \in \widetilde{\mathbb{A}}$ pozwala też pisać λa zamiast (λ, a), bo $(\lambda, a) = \lambda(1, a)$.

Uwaga 2. a) Dla $x \in \widetilde{\mathbb{A}}$ przyjmijmy $m(x) = 0$ jeśli $x \in T_{\mathbb{A}}$ i $m(x) = \lambda$ gdy $x = (\lambda, a) \in \mathbb{F}^* \times \mathbb{A}$. Funkcja $m\colon \widetilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{F}$ jest liniowa, bo jest równa złożeniu izomorfizmu $\pi\colon \widetilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{F} \times T_{\mathbb{A}}$ z rzutowaniem na oś $\mathbb{F}$. Przy tym $m^{-1}(0) = T_{\mathbb{A}}$ i $m^{-1}(1) = j(\mathbb{A})$.

b) Bez ograniczeń na współczynniki $\lambda_i \in \mathbb{F}$ i punkty $a_i \in \mathbb{A}$, kombinacja $x = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i a_i$ jest dobrze określonym elementem przestrzeni $\widetilde{\mathbb{A}}$, przy czym $m(x) = \sum_i \lambda_i$. Gdy więc suma $\lambda := \sum_i \lambda_i$ jest równa 0, to x jest wektorem z $T_{\mathbb{A}}$, a gdy $\lambda = 1$, to jest jednostkowym punktem materialnym, który utożsamiamy z punktem przestrzeni $\mathbb{A}$, w którym jest skupiony. Ogólniej, gdy $\lambda \neq 0$, to $\sum_i \lambda_i a_i$ jest punktem materialnym o masie λ, skupionym w punkcie $b := \sum_i (\lambda_i/\lambda) a_i \in \mathbb{A}$.

c) Działania na kombinacjach $\sum_i \lambda_i a_i$ podlegają prawom przestrzeni liniowej: ich dodawanie jest przemienne, łączne i rozdzielne względem mnożenia przez skalary.

Definicja. Nazwijmy kombinację $\sum_{i=0}^{s} \lambda_i a_i$ punktów $a_i \in \mathbb{A}$ **barycentryczną** (lub: **afiniczną**), gdy $\sum_i \lambda_i = 1$. Wynik jest dobrze określonym punktem zbioru $\mathbb{A}$ i udowodnimy niżej, że nie zależy on od wyboru pary $(T_{\mathbb{A}}, \boxplus)$ w powyższej konstrukcji. Punkt ten nazywany bywa **środkiem ciężkości** układu punktów materialnych (λ_i, a_i) (czy też: punktów a_i, z masami λ_i).

3. Wykorzystanie twierdzenia o zanurzaniu.

W tym i następnym punkcie rozważamy przestrzenie afiniczne $\mathbb{A}, \mathbb{A}', \ldots$ nad $\mathbb{F}$, i dla każdej z nich ustalamy przestrzeń wektorów $T_{\mathbb{A}}, T_{\mathbb{A}'}, \ldots$. Dla uproszczenia zakładamy też, że $\#\mathbb{F} > 2$. Przestrzenie $\mathbb{A}$ i $T_{\mathbb{A}}$ traktujemy jako zanurzone w przestrzeni liniowej $\widetilde{\mathbb{A}}$ w sposób opisany w p.2 w twierdzeniu i uwadze 1, i podobnie dla $\mathbb{A}'$ i $T_{\mathbb{A}'}$ etc.

Uwaga 1. Nadanie sensu kombinacjom afinicznym i potraktowanie przestrzeni $\mathbb{A}$ jako warstwy w $\widetilde{\mathbb{A}}$ względem $T_{\mathbb{A}}$ uwidacznia, że wyniki z §2.3: stwierdzenia 2-5 i następujące po nich zadania, są prawdziwe dla każdej przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$, po wyborze jej przestrzeni wektorów $(T_{\mathbb{A}}, \boxplus)$. Będziemy z tych wyników niżej korzystać.

Przykład 1. Dzięki zanurzeniom $\mathbb{A} \hookrightarrow \widetilde{\mathbb{A}}$ i $\mathbb{A}' \hookrightarrow \widetilde{\mathbb{A}}'$, afiniczność przekształcenia $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ można scharakteryzować jak to ujęto w w §2.3 (w stwierdzeniu 5 i zadaniu 2). W szczegóności, określona jest część liniowa $dF \in \mathcal{L}(T_{\mathbb{A}}, T'_{\mathbb{A}})$ przekształcenia afinicznego $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$, będąca jedynym przekształceniem takim, że $F(a) = F(a_0) + dF(a - a_0)$ dla wszystkich $a \in \mathbb{A}$ i pewnego (równoważnie: każdego) punktu $a_0 \in \mathbb{A}$.

Uwaga 2. Niech $F\colon \mathbb{A} \to W$ będzie różnowartościowym przekształceniem afinicznym w pewną przestrzeń wektorową. (Np., F może być dowolną mapą.)

a) By wyznaczyć kombinację afiniczną $a = \sum_i \lambda_i a_i$, jak zdefiniowano ją w p.2, utwórzmy kombinację $a' := \sum_i \lambda_i F(a_i)$ przy pomocy działań przestrzeni liniowej W. Ponieważ a jest analogiczną kombinacją w $\widetilde{\mathbb{A}}$, więc zgodnie ze stwierdzeniem 5 z §2.3 zachodzi równość $F(a) = a'$. Oznacza to, że $a = F^{-1}(a')$.

b) W szczególności, otrzymany punkt a nie zależy od wyboru pary $(T_{\mathbb{A}}, \boxplus)$, choć jego *definicja* od tego wyboru zależy. Gdy zaś $\mathbb{A}$ jest warstwą w przestrzeni W, to a wyznaczymy przy pomocy działań w W (bo za F obrać można inkluzję $\mathbb{A} \hookrightarrow W$).

c) Podobnie można badać afiniczną niezależność punktów: wystarczy sprawdzić, czy afinicznie niezależne są ich obrazy przy F (do czego można np. użyć zadania 4 w §2.3).

Definicja. Dla każdego wektora $\mathbf{v} \in T_{\mathbb{A}}$, wzór $a \mapsto a + \mathbf{v}$ zadaje przekształcenie afiniczne $t_{\mathbf{v}}\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ (patrz p.1); nazwiemy je **przesunięciem** lub **translacją** przestrzeni $\mathbb{A}$ o wektor $\mathbf{v} \in T_{\mathbb{A}}$. Zbiór wszystkich przesunięć przestrzeni $\mathbb{A}$ oznaczmy przez $\vec{\mathbb{A}}$.

Uwaga 3. Przesunięcie $t_{\mathbf{v}}$ można też zadać wzorem $a \mapsto a + a_1 - a_0$, gdzie $a_0 \in \mathbb{A}$ jest dowolnym punktem i $a_1 = a_0 + \mathbf{v}$. Ponieważ kombinacje barycentryczne zależą tylko od pary $(\mathbb{A}, M_{\mathbb{A}})$, a nie od wyboru przestrzeni wektorów $(T_{\mathbb{A}}, \boxplus)$, więc zbiór $\vec{\mathbb{A}}$ jest od tego wyboru niezależny. (Definicja $\vec{\mathbb{A}} = \{t_{\mathbf{v}}\colon \mathbf{v} \in T_{\mathbb{A}}\}$ tego nie uwidacznia.)

Zadanie uzupełniające 1. Bijekcja $\Phi\colon T_{\mathbb{A}} \to \vec{\mathbb{A}}$, zadana wzorem $\Phi(\mathbf{v}) = t_{\mathbf{v}}$, pozwala rozpatrzeć w $\vec{\mathbb{A}}$ działania przez nią przeciągnięte z $T_{\mathbb{A}}$. Z działaniami tymi, $\vec{\mathbb{A}}$ staje się oczywiście przestrzenią wektorową, a także przestrzenią wektorów dla $\mathbb{A}$, gdy przyjąć

$$a \vec{\boxplus} t = a \boxplus \Phi^{-1}(t) \text{ dla } a \in \mathbb{A} \text{ i } t \in \vec{\mathbb{A}}.$$

Dowieść, że $t + t' = t \circ t'$, $(\lambda t)(x) = \lambda t(x) + (1-\lambda)x$ i $x \vec{\boxplus} t = t(x)$ dla $t, t' \in \vec{\mathbb{A}}, \lambda \in \mathbb{F}, x \in \mathbb{A}$.

Uwaga 1. * a) Tak więc zdefiniowane działania zależą tylko od pary $(\mathbb{A}, M_{\mathbb{A}})$, a nie od wyboru przestrzeni wektorów $(T_{\mathbb{A}}, \boxplus)$. (Można parę $(\vec{\mathbb{A}}, \vec{\boxplus})$, jednoznacznie wyznaczoną przez $(\mathbb{A}, M_{\mathbb{A}})$, uznać za najbardziej naturalny wybór takiej przestrzeni.)

b) Ważną część wyników pp.2 i 3 możemy teraz heurystycznie podsumować tak: gdy zamiast danej przestrzeni afinicznej $(\mathbb{A}, M_{\mathbb{A}})$ wziąć zbiór $\mathbb{F}^* \times \mathbb{A}$ wszystkich jej punktów materialnych, poszerzony o zbiór $\vec{\mathbb{A}}$ przesunięć przestrzeni $\mathbb{A}$, to w naturalny sposób otrzymamy przestrzeń wektorową $\widetilde{\mathbb{A}}$, zależną tylko od przestrzeni $(\mathbb{A}, M_{\mathbb{A}})$ i „zawierającą" $\mathbb{A}$ jako niezerową warstwę, będącą zbiorem jednostkowych punktów materialnych.

Zadanie uzupełniające 2. Niech $F \in \mathcal{A}(\mathbb{A}, W)$, gdzie W jest przestrzenią liniową. Dowieść, że istnieje jedyne przekształcenie liniowe $\widetilde{F}\colon \widetilde{\mathbb{A}} \to W$ takie, że $\widetilde{F}_{|\mathbb{A}} = F$. (Wskazówka: obrać $a_0 \in \mathbb{A}$ i zauważyć, że $\widetilde{\mathbb{A}} = \mathbb{F}a_0 \oplus T_{\mathbb{A}}$; przyjąć $\widetilde{F}(\lambda a_0 + \mathbf{v}) = \lambda F(a_0) + F(a_0 + \mathbf{v}) - F(a_0)$ dla $\mathbf{v} \in T_{\mathbb{A}}$ i $\lambda \in \mathbb{F}$.)

3. Niech $F \in \mathcal{A}(\mathbb{A}, \mathbb{A}')$ i $G \in \mathcal{A}(\mathbb{A}', \mathbb{A}'')$.

a) Zgodnie z poprzednim zadaniem rozszerzmy F do (jedynego) przekształcenia liniowego $\widetilde{F}\colon \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}'$. Dowieść, że $\widetilde{F}(T_{\mathbb{A}}) \subset T_{\mathbb{A}'}$ i $\widetilde{F}_{|T_{\mathbb{A}}} = dF$.

b) Utwórzmy tak samo $\widetilde{G}$ i $\widetilde{G \circ F}$. Dowieść, że $\widetilde{G \circ F} = \widetilde{G} \circ \widetilde{F}$ i $d(G \circ F) = dG \circ dF$.

4. Dalsze zastosowania twierdzenia o zanurzaniu.

Nadal, $(\mathbb{A}, M_{\mathbb{A}})$ i $(\mathbb{A}', M_{\mathbb{A}'})$ to przestrzenie afiniczne nad ciałem $\mathbb{F}$; dla każdej z nich wybieramy przestrzeń wektorów swobodnych $T_{\mathbb{A}}$ i $T_{\mathbb{A}'}$. Podamy dalsze przykłady wykorzystania tych przestrzeni i kombinacji barycentrycznych, a także wykorzystania zanurzeń $\mathbb{A} \hookrightarrow \widetilde{\mathbb{A}}$ i $\mathbb{A}' \hookrightarrow \widetilde{\mathbb{A}}'$ w przestrzenie punktów materialnych, poszerzone o przesunięcia.

Przykład 1. a) Dowiedziemy, że gdy $a, b, c, d \in \mathbb{A}$ i $\mathbf{v}(b, d) = \mathbf{v}(a, c)$, to proste ad i bc przecinają się. Oto dowód: $d - b = c - a$ daje $a + d = b + c$ (równość w $\widetilde{\mathbb{A}}$), skąd $\frac{1}{2}(a + d) = \frac{1}{2}(b + c) \in ad \cap bc$. (Zakładamy, że $2_{\mathbb{F}} \neq 0_{\mathbb{F}}$.)

b) Dowiedziemy, że gdy $a = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i a_i$ i $\sum_i \lambda_i = 1$, to $\sum_i \lambda_i \mathbf{v}(x, a_i) = \mathbf{v}(x, a)$ dla $x \in \mathbb{A}$ (i, w szczególności, $\sum_i \lambda_i \mathbf{v}(a, a_i) = 0$). Oto dowód: w $\widetilde{\mathbb{A}}$ równość staje się oczywista, bo $\sum_i \lambda_i \mathbf{v}(x, a_i) = \sum_i \lambda_i (a_i - x) = \sum \lambda_i a_i - (\sum_i \lambda_i) x = a - x = \mathbf{v}(x, a)$.

Oboma razy, w dowodzie wygodnie było „wyjść” z $\mathbb{A}$ do $\widetilde{\mathbb{A}}$, by wrócić do $\mathbb{A}$ czy do $T_{\mathbb{A}}$!

Przykład 2. (i definicja). **Homotetię (jednokładność)** przestrzeni $\mathbb{A}$, o środku a_0 i skali $\lambda \in \mathbb{F}$, definiujemy wzorem $a \mapsto a_0 + \lambda(a - a_0)$. Gdy $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ jest przekształceniem afinicznym, zaś $H : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ i $H' \colon \mathbb{A}' \to \mathbb{A}'$ są homotetiami o tej samej skali λ i środkach w a_0 i $F(a_0)$, odpowiednio, to $FH = H'F$. (Wynika to stąd, że F zachowuje kombinacje afiniczne.) W szczególności, gdy $S \in \mathbb{A}$ jest dowolną mapą zaczepioną w punkcie a_0, to $H = S^{-1} G S$, gdzie G jest homotetią przestrzeni $\mathbb{F}^k$, o środku w $\mathbf{0}$ i skali λ, tzn. $G(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ dla $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$. Homotetia o skali -1, zadana wzorem $a \mapsto 2a_0 - a$, jest więc symetrią względem a_0; patrz zadanie 1 w §2.2.

Przykład 3. a) Gdy $\mathbb{A}_0$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{A}$, to jest nią i w $\widetilde{\mathbb{A}}$. Tym samym można mówić o jej **podprzestrzeni kierunkowej** V_0 (w przestrzeni $\widetilde{\mathbb{A}}$); przy tym $V_0 \subset T_{\mathbb{A}}$, bo $\mathbb{A}_0 \subset \mathbb{A}$. Stąd $\mathbb{A}_0 = a_0 + V_0$ dla każdego $a_0 \in \mathbb{A}_0$, i V_0 jest tym warunkiem wyznaczona (bo jest tak w $\widetilde{\mathbb{A}}$).

b) Przeciwnie, gdy V_0 jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $T_{\mathbb{A}}$, to $a_0 + V_0$ jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni $\mathbb{A}$, dla każdego $a_0 \in \mathbb{A}$ (bo jest nią w $\widetilde{\mathbb{A}}$).

Definicja. Zbiory $X, X' \subset \mathbb{A}$ nazywamy:

a) **ściśle równoległymi**, gdy istnieje przesunięcie $t \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ takie, że $t(X) = X'$;

b) **równoległymi**, gdy o t żądamy tylko, by $t(X) \subset X'$ lub $t(X') \subset X$.

Ze względu na postać przesunięć, można te definicje wyrazić i tak: zbiory $X, X' \subset \mathbb{A}$ są ściśle równoległe, gdy $X' = X + \mathbf{v}$ dla pewnego $\mathbf{v} \in T_{\mathbb{A}}$, a są równoległe, gdy $X + \mathbf{u} \subset X'$ dla pewnego $\mathbf{u} \in T_{\mathbb{A}}$ lub $X' + \mathbf{w} \subset X$ dla pewnego $\mathbf{w} \in T_{\mathbb{A}}$.

Uwaga 1. a) Relacja równoległości nie jest przechodnia: łatwo wskazać nierównoległe płaszczyzny w $\mathbb{R}^2$ i prostą równoległą do każdej z nich. Natomiast ścisła równoległość jest relacją równoważności. Obie relacje pokrywają się, gdy X i X' są podprzestrzeniami równego wymiaru. (Wynika to stąd, że dwie podprzestrzenie są równe, gdy są równego wymiaru i jedna jest zawarta w drugiej.)

b) Gdy V_i jest podprzestrzenią kierunkową podprzestrzeni $\mathbb{A}_i$ ($i = 0, 1$), to ścisła równoległość $\mathbb{A}_0$ i $\mathbb{A}_1$ oznacza, że $V_0 = V_1$, a równoległość – że $V_0 \subset V_1$ lub $V_1 \subset V_0$

Zadanie 1. Dowieść, że gdy każda prosta leżąca w podprzestrzeni $\mathbb{A}_0$ jest równoległa do podprzestrzeni $\mathbb{A}_1$, to podprzestrzeń $\mathbb{A}_0$ jest równoległa do $\mathbb{A}_1$.

Stwierdzenie 1. *Niech $F \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ będzie przekształceniem afinicznym. Gdy X i Y są* *równoległymi podzbiorami przestrzeni $\mathbb{A}$, to ich obrazy $F(X)$ i $F(Y)$ są równoległymi podzbiorami przestrzeni $\mathbb{A}'$. Tak samo jest dla ścisłej równoległości.*

Dowód. Gdy $X + \mathbf{v} \subset Y$, to $F(X) + \mathbf{w} \subset F(Y)$ dla $\mathbf{w} := (dF)(\mathbf{v})$ – co wynika stąd, że $F(a + \mathbf{v}) = F(a) + \mathbf{w}$ $(a \in \mathbb{A})$. ⊟

Stwierdzenie 2. *Gdy $\mathbb{A}_0$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{A}$, to przez dany punkt $a \in \mathbb{A}$ przechodzi dokładnie jedna podprzestrzeń, ściśle równoległa do $\mathbb{A}_0$.*

Dowód. Podprzestrzenią tą jest $a_0 + V_0$, gdzie V_0 to podprzestrzeń kierunkowa przestrzeni $\mathbb{A}_0$. (Patrz uwaga 3a) i przykład 3.) □

Przykład 4. Niech $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2 \subset \mathbb{A}$ będą podprzestrzeniami takimi, że $\dim \mathbb{A}_1 + \dim \mathbb{A}_2 = \dim \mathbb{A}$ i $\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2 = \{a_0\}$ dla pewnego $a_0 \in \mathbb{A}$. Oznaczmy przez $V_i \subset T_\mathbb{A}$ podprzestrzeń kierunkową podprzestrzeni $\mathbb{A}_i$; wówczas $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim T_\mathbb{A}$ i $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$ (dlaczego?). Zatem $T_\mathbb{A} = V_1 \oplus V_2$, co pozwala określić rzutowanie P_0 przestrzeni $T_\mathbb{A}$ na V_1, oraz symetrię Q_0 względem V_1, oba wzdłuż V_2. Przekształcenia $P, Q \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, określone wzorami $P(a) = a_0 + P_0(a - a_0)$ i $Q(a) = a_0 + Q_0(a - a_0)$, nazywamy rzutowaniem na $\mathbb{A}_1$, wzdłuż $\mathbb{A}_2$, i symetrią względem $\mathbb{A}_1$, wzdłuż $\mathbb{A}_2$, odpowiednio.

Definicja. Gdy $\mathbb{A}$ jest euklidesową przestrzenią afiniczną, to powyższy rzut czy symetrię nazwiemy **prostopadłymi**, gdy $\angle\{a_1 a_0 a_2\} = \pi/2$ dla każdych $a_1 \in \mathbb{A}_1$ i $a_2 \in \mathbb{A}_2$ (równoważnie: gdy $V_1 \perp V_2$ względem iloczynu skalarnego na $T_\mathbb{A}$ z zadania w p.2).

Zadanie 2. a) Przy oznaczeniach przykładu 4, punkt $P(a)$ jest jedynym punktem wspólnym $\mathbb{A}_1$ z podprzestrzenią ściśle równoległą do $\mathbb{A}_2$ i przechodzącą przez a.

b) W mapie S, zaczepionej w a_0, przekształceniu $P \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ odpowiada rzut liniowy przestrzeni $\mathbb{F}^k$ na podprzestrzeń liniową $S(\mathbb{A}_1)$, wzdłuż $S(\mathbb{A}_2)$, zaś przekształceniu Q odpowiada symetria przestrzeni $\mathbb{F}^k$ względem podprzestrzeni $S(\mathbb{A}_1)$, wzdłuż $S(\mathbb{A}_2)$.

c) Zachodzi też $P(a) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}Q(a)$, czy rownoważnie $Q(a) = 2a - P(a)$ $(a \in \mathbb{A})$.

Zadanie 3. Niech $F \in \mathcal{A}(\mathbb{A}, \mathbb{A})$.

a) Dowieść, że gdy $F \circ F = I_\mathbb{A}$, tzn. przekształcenie jest **inwolutywne**, to jest symetrią względem $\mathbb{A}_1$ wzdłuż $\mathbb{A}_2$, dla pewnych podprzestrzeni $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$. Przy tym, $\mathbb{A}_1 = \{a \in \mathbb{A} \colon F(a) = a\}$ i $\mathbb{A}_2 = \{a \in \mathbb{A} \colon \frac{1}{2}F(a) + \frac{1}{2}a = a_0\}$, dla każdego punktu $a_0 \in \mathbb{A}_1$.

b) Co można powiedzieć o F, gdy $F \circ F = F$, tzn. gdy jest ono **idempotentne**?

Zadanie 4. Niech $\mathbb{A}_1$ i $\mathbb{A}_2$ będą podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{A}$, zaś $V_1, V_2 \subset T_\mathbb{A}$ ich podprzestrzeniami kierunkowymi. Obierzmy punkty $a_i \in \mathbb{A}_i$ $(i = 1, 2)$ i przyjmijmy $s := \dim(V_1 + V_2)$ i $t := \dim(\mathbb{A}_1) + \dim(\mathbb{A}_2)$. Dowieść, że:

a) $\mathrm{af}(\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2) = a_1 + \mathbb{F}(a_1 - a_2) + V_1 + V_2$ i $(a_1 - a_2 \in V_1 + V_2) \Leftrightarrow (\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2) \neq \emptyset)$.

b) Jeśli $\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2 \neq \emptyset$, to $\dim \mathrm{af}(\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2) = s \leq t$ i $\dim(\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2) = t - s \geq \max(0, t - \dim(\mathbb{A}))$. Tak więc wtedy $\dim(\mathrm{af}(\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2)) = \dim \mathbb{A}_1 + \dim \mathbb{A}_2 - \dim(\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2)$.

c) Jeśli $\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2 = \emptyset$, to $\dim(\mathrm{af}(\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2)) = 1 + s = 1 + \dim \mathbb{A}_1 + \dim \mathbb{A}_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$.

Zadanie uzupełniające 1. (kontynuacja zadania uz.1 z p.3.) a) Zdefiniujmy w $\mathbb{A}\times\mathbb{A}$ relację $\sim$ wzorem $(a,b)\sim(a',b')\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a'+b)=\frac{1}{2}(a+b')$. Dowieść, że $\vec{\mathbb{A}}$ można w naturalny sposób utożsamić z $\mathbb{A}\times\mathbb{A}/\sim$, i że działania w $\mathbb{A}\times\mathbb{A}/\sim$, odpowiadające zdefiniowanym w $\vec{\mathbb{A}}$, są zadane wzorami $\lambda[(a,b)]=[a,a+\lambda(b-a)]$ i $[(a,b)]+[(c,d)]=[(a,b+d-c)]$. (Tu $[(x,y)]$ oznacza klasę abstrakcji pary (x,y).)

b) Opisać konstrukcję sumy $[(a,b)]+[(c,d)]$ przy przy pomocy równoległoboków.

5. * **Pierwsze twierdzenia geometrii afinicznej (varia i zadania uzupełniające).**

Niech a,b,a',b' będą współliniowymi punktami przestrzeni $\mathbb{A}$, przy czym $a\neq b$. Wtedy dla pewnego $\lambda\in\mathbb{F}$ zachodzi $b'-a'=\lambda(b-a)$ (czy, używając kombinacji afinicznych, $b'=a'+\lambda(b-a)$). Skalar λ będziemy oznaczać przez $(b'-a')/(b-a)$. Jest on zdefiniowany tylko przy poczynionych założeniach i jest zachowany przez każde przekształcenie afiniczne, przeprowadzające a i b na różne punkty (bo przekształcenia afiniczne zachowują kombinacje afiniczne).

Niech teraz H_0,H_1,H_2 będą parami różnymi i równoległymi hiperpłaszczyznami w $\mathbb{A}$, a L dowolną prostą, która nie jest do nich równoległa; niech przecina ona H_i w punkcie a_i $(i=0,1,2)$. Utwórzmy funkcję afiniczną $f\colon\mathbb{A}\to\mathbb{F}$ taką, że $H_0=f^{-1}(0)$; wówczas $f(H_i)=\{c_i\}$ dla pewnych $c_1,c_2\in\mathbb{F}$ i $i=1,2$. Iloraz $(a_1-a_0)/(a_2-a_0)$ jest więc równy c_1/c_2 i tym samym nie zależy od prostej L. Jest to **twierdzenie Talesa**.

1. Niech $a_i\in\mathbb{A}$ i $b_i\in a_ia_{i+1}\setminus\{a_i,a_{i+1}\}$ dla $i\in\mathbb{Z}_3$, przy czym punkty a_0,a_1,a_2 nie leżą na jednej prostej. Przyjmijmy $\lambda_i:=(b_i-a_i)/(b_i-a_{i+1})$. Udowodnić, że:

a) Jeśli punkty b_0,b_1,b_2 są współliniowe, to $\lambda_0\lambda_1\lambda_2=1$. (**Twierdzenie Menelaosa**).

b) Jeśli proste a_0b_1, a_1b_2 i a_2b_0 przecinają się w jednym punkcie lub są parami równoległe, to $\lambda_0\lambda_1\lambda_2=-1$. (**Twierdzenie Cevy**).

c) Twierdzenia odwrotne są też prawdziwe.

2. Nazwijmy przekształcenie $F:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ **dylatacją**, jeśli jest afiniczne i $dF=\lambda I_{T_\mathbb{A}}$ dla pewnego skalara $\lambda\in\mathbb{F}\setminus\{0\}$.

a) Dowieść, że przekształcenie $F\in\mathcal{A}(\mathbb{A},\mathbb{A})$ jest dylatacją wtedy i tylko wtedy, gdy jest bijektywne i dla każdej prostej $L\subset\mathbb{A}$, proste L i $F(L)$ są równoległe.

b) Dowieść, że dylatacje tworzą grupę przekształceń i każda dylatacja jest przesunięciem lub jednokładnością.

W 17w. B. Pascal udowodnił następujące twierdzenie, w niezwykły sposób wzmacniające twierdzenie Pappusa z 4w. n.e. **Twierdzenie Pascala** orzeka, że gdy na płaskiej krzywej drugiego stopnia rozmieszczonych jest 6 różnych punktów a_i $(i\in\mathbb{Z}_6)$, to punkty przecięcia par przeciwległych „boków” utworzonego sześciokąta leżą na jednej prostej. (Wymienione punkty przecięcia to $a_0a_1\cap a_3a_4$, $a_1a_2\cap a_4a_5$ i $a_2a_3\cap a_5a_0$.) Twierdzenie to należy do tzw. geometrii rzutowej, bo w afinicznej należy jeszcze uwzględnić możliwość, że pewne pary przeciwległych boków są równoległe. Poniższe zadanie dotyczy takiego właśnie przypadku, i to gdy krzywa jest najprostsza z możliwych.

3. Niech wyżej krzywa będzie sumą dwóch prostych, równoległych lub przecinających się. Udowodnić, że jeśli $a_0a_1\|a_3a_4$ i $a_1a_2\|a_4a_5$, to $a_2a_3\|a_5a_0$. (Jest to przypadek **twierdzenia Pappusa**, będącego twierdzeniem Pascala ograniczonym do krzywej będącej sumą dwóch prostych K i L. Można zakładać, że $a_0, a_2, a_4 \in K$ i $a_1, a_3, a_5 \in L$.)

4. Obmyśleć własny lub przemyśleć podany pod
http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Pappus.shtml
dowód ogólnej wersji twierdzenia Pappusa, oparty na tw. Menelaosa. (Podobny dowód twierdzenia Pascala dla okręgu (a więc i ogólnie dla $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) można znaleźć pod
http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Pascal.shtml#proof ;
por. też [Courant–Robbins].)

5. Udowodnić **twierdzenie Desarguesa**: Gdy a, b, c, a', b', c' są różnymi punktami przestrzeni afinicznej, takimi, że $ab\|a'b'$, $bc\|b'c'$ i $ca\|c'a'$, to proste aa', bb' i cc' mają punkt wspólny lub są równoległe.

Twierdzenie 1. *Niech X będzie kwadryką, a $\mathcal{L}$ rodziną prostych; każda prosta $L \in \mathcal{L}$ przecina X w dwóch punktach, których środek oznaczmy przez a_L. Wówczas:*

a) jeśli $\bigcap \mathcal{L} \neq \emptyset$, to wszytkie punkty a_L leżą na wspólnej kwadryce;

b) jeśli $\mathcal{L}$ składa się z prostych równoległych, to wszystkie punkty a_L leżą na wspólnej hiperpłaszczyźnie (zwanej **średnicową** *dla X, odpowiadającą kierunkowi pęku $\mathcal{L}$).*

Twierdzenie okazuje się być konsekwencją wzorów Viety. By uzasadnić a) możemy przez przejście do mapy założyć, że $X = \{\mathbf{x}\colon p(\mathbf{x}) = 0\} \subset \mathbb{F}^k$ i $\mathbf{0} \in \bigcap \mathcal{L}$; tu $p = q(\mathbf{x}) + \ell(\mathbf{x}) + c = 0$, gdzie q jest formą kwadratową, a ℓ – liniową (obie na $\mathbb{F}^k$). Wtedy dla prostej $L = \mathbb{F}\mathbf{v} \in \mathcal{L}$ jest $a_L = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)\mathbf{v}$, gdzie t_i to pierwiastki równania $t^2q(\mathbf{v}) + t\ell(\mathbf{v}) + c = 0$. Stąd $a_L = -\frac{\ell(\mathbf{v})}{2q(\mathbf{v})}\mathbf{v}$; a że prawa strona jest stała na prostej L, to dla $\mathbf{v} = a_L$ otrzymujemy $-\frac{\ell(\mathbf{v})}{2q(\mathbf{v})} = 1$. (Zauważmy, że $q(\mathbf{v}) \neq 0$ gdy $L \in \mathcal{L}$, zgodnie z założeniem i zadaniem uzupełniającym 1 w §4.4.) Zatem $2q(\mathbf{x}) + \ell(\mathbf{x}) = 0$ jest równaniem szukanej kwadryki.

By dowieść b) korzystamy ze wzoru Taylora z zadania uzupełniającego 2 w §3.5. Prosta $L \in \mathcal{L}$ przecina X w punktach $a_i = a_L + t_i\mathbf{v}$, gdzie t_1, t_2 to pierwiastki równania $p(a_L + t\mathbf{v}) = 0$, a $\mathbf{v}$ – ustalony kierunek rozważanego pęku. Z wymienionego wzoru wynika więc, że $t_1 + t_2 = \sum_i (\partial_i p)(a_L)v_i/q(\mathbf{v})$; a że $t_1 = -t_2$ (bo $a_L = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$), to wszystkie punkty a_L spełniają rówanie $\sum_i (\partial_i p)(\mathbf{x})v_i = 0$. Pozostaje dowieść, że jest ono stopnia 1. Jednak wielomian $\sum_i v_i\partial_i p$ jest stopnia ≤ 1, a jego część liniowa ma jako swe współczynniki kolejne współrzędne wektora $[q]\mathbf{v}$ – który jest niezerowy, bo $q(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^t[q]\mathbf{v} \neq 0$. (Tu $[q]$ to macierz formy q; rachunki stają się szczególnie proste gdy założyć, co można, że wielomian p jest postaci afiniczno–kanonicznej). $\boxminus$

Z dowodu wynika, że założenie twierdzenia można osłabić do: „każda prosta $L \in \mathcal{L}$ przecina X i nie ma kierunku asymptotycznego". (a_L jest wtedy środkiem zbioru $X \cap L$.)

6. * Końcowe uwagi

A). W wielu podręcznikach, np. w [ABB] i [Kostr], przestrzeń afiniczną definiuje się nie przy pomocy atlasów, lecz – w ślad za pracami H. Weyla z 1918r. i G. Peany z 1898r. – jako trójkę $(\mathbb{A}, T_{\mathbb{A}}, \boxplus)$, dla której spełniony jest warunek i) z lematu 1 w p.1, a przekształcenie $\exp_a$ z warunku ii) jest bijektywne. Przekształcenia afiniczne $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ definiowane są wówczas jako te, dla których spełniony jest warunek d) stwierdzenia 5 z §2.3. Oba ujęcia prowadzą do tych samych wyników, a różnica między nimi sprowadza się do następującej. W ujęciu „atlasowym", para $(T_{\mathbb{A}}, \boxplus)$ odgrywa tylko pomocniczą rolę i część wysiłku poświeciliśmy sprawdzaniu, czy definiowane pojęcia są niezależne od jej wyboru. W ujęciu drugim, ostatnie pytanie jest bezpodstawne, bo zmiana $(T_{\mathbb{A}}, \boxplus)$ powoduje zmianę przestrzeni. Inna różnica jest czysto psychologiczna: o ile to, czy pewne mapy są zgodne afinicznie (lub euklidesowo), można fizycznie weryfikować i w ten sposób ustalić, czy opisują one przestrzeń afiniczną (lub euklidesową), o tyle niesposób weryfikować założenie, że przestrzeń jest pewną strukturą, na która składają się punkty, wektory i zależności między nimi. (Jest to pewien model przestrzeni i stwierdzić możemy tylko, że nie prowadzi on do błędnych wniosków.) Badanie przestrzeni przy pomocy zgodnych map zostało zapoczątkowane przez Fermata i Kartezjusza i odgrywa nadal ważną rolę m.in. w różniczkowej geometrii i topologii.

B). W ujęciu Weyla, jedynymi wektorami są wektory swobodne; w ujęciu „atlasowym" te ostatnie też grają pewną (pomocniczą) rolę. Tymczasem tam, gdzie przestrzenie afiniczne stosujemy, wektory pojawiają się często, i to wcale nie jako swobodne czy dające się interpretować jako przesunięcia. Mówimy np. o wektorach przyspieszenia czy siły, lub o wektorze normalnym do hiperpłaszczyzny. Powoduje to niemały galimatias, tym większy, gdy badamy przestrzeń afiniczną, która sama jest przestrzenią wektorową, np. przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Czemu więc jedną trójkę skalarów nazywać punktem, a inną wektorem? Czemu np. mówimy o *wektorze*, a nie *punkcie*, normalnym do płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$? Zasadnicze znaczenie ma to, jak badana wielkość zachowuje się przy zmianie mapy. Jeśli mapę zmienimy, składając ją (z lewa) z izomorfizmem $U \in \mathrm{GA}(\mathbb{R}^3)$, to równanie $\sum_i \lambda_i x_i = c$ rozważanej płaszczyzny zmieni się, i współrzędne $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ kierunku prostopadłego do niej też. Okaże się jednak, że zależność nowych współrzędnych od starych wykorzystuje w przypadku kierunku tylko część liniową $\mathbf{A}$ izomorfizmu $U(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{v}$, a w przypadku punktów wykorzystuje ona i $\mathbf{A}$, i $\mathbf{v}$, jak opisano w zadaniu 3 z §2.3. To z tego powodu wielkość, reprezentowaną przez $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, nazywamy wektorem, a nie punktem. Podobnie jest z wektorami prędkości i innymi, i ostatecznie do „wektorów" zaliczone zostają wielkości bardzo różne, których nazwy bywają uściślane („wektor kontrawariantny” czy „kowariantny”, itp.) dla określenia zależności od **A**.

§ 7. Przewodnik

(skopiowany z wywieszki dla potoku „zwykłego”).

Ten rozdział różni się od poprzednich tym, że zawiera dużo pojęć i wyników stosunkowo prostych, w których jednak nietrudno się pogubić. Spróbuję uporządkować omawiane *rezultaty* (pomijam np. definicje) według roli, którą odgrywają.

1. Stworzono tu teorię przestrzeni afinicznych, w tym euklidesowych przestrzeni afinicznych. Jak często przy określaniu dopuszczalnych przestrzeni i przekształceń między nimi (tu: przestrzeni i przekształceń afinicznych) ważne jest ustalenie, że mają one podstawowe własności, jakich od przestrzeni, podprzestrzeni i przekształceń oczekujemy w rozważanej teorii. W naszym przypadku, zajmują się tym stwierdzenia 1 – 3 i wniosek 1 w §2.1, a także stwierdzenie 3 w §2.2. (Warto je porównać z podobnymi, uzyskanymi wcześniej dla przestrzeni i przekształceń liniowych.)

2. Każdą przestrzeń liniową (skończonego wymiaru) można traktować jako afiniczną. Związkami wynikających pojęć afinicznych i liniowych zajmują się stwierdzenia 1, 2 i częściowo stw. 3 w §2.2, a także wniosek 1 tamże.

3. Izomorfizm afiniczny z przestrzeni afinicznej do $\mathbb{F}^k$ (czyli mapa) jest wyznaczona przez odpowiadający jej układu odniesienia, i vice versa. Związek ten ujmuje uwaga 2 w §2.3, a zasadnicze własności układów odniesienia opisane są stwierdzeniem 1 i uwagą 1 w §2.3. Gdy rzecz dzieje się w (afinicznej) podprzestrzeni przestrzeni liniowej, układy te i ich własności opisać można używając struktury liniowej; zajmują się tym dalsze wyniki z §2.3. Są one ważne m.in. dla zadań rachunkowych, bo te na ogół dotyczą przestrzeni liniowych lub sprowadzają się do takich, które ich dotyczą.

4. Wyżej, należy dostrzec wyniki ujęte zadaniami 1 – 4 w §2.2; grają one istotną rolę w dalszych rodziałach, dotyczących kwadryk. Oczywiście, ważna jest też teoria euklidesowych przestrzeni afinicznych z §2.4.

5. Następny §3 dotyczy funkcji kwadratowych na przestrzeniach afinicznych, w tym upraszczania wielomianów kwadratowych podstawieniem afinicznym wzgl. euklidesowym. Wyniki dotyczące podstawiania podsumowane są w §§3.1 –3.3. Gdy zaś chodzi o funkcje kwadratowe, podkreślić trzeba rolę uwag 1 – 3 w §3.4, opisujących, jak zmienia się mapa czy układ odniesienia, gdy przez podstawienie zmieniamy wielomian odpowiadający danej funkcji, oraz jakim wzorem wyrazić należy taki wielomian. (Z tym często mamy do czynienia w zadaniach.) Ze względu na dalsze zastosowania, ważna jest znajomość opisu zbioru środków symetrii funkcji kwadratowej w §3.4.

6. W §4 centralne znaczenie ma twierdzenie 1 w p.3. Warto dostrzec, że ma ono charakter czysto algebraiczny, lecz dowód oparty jest na wykorzystaniu własności odpo-

wiednich obiektów „geometrycznych" (w tym przypadku prostych i płaszczyzn). Twierdzenie to wykorzystano w pp. 4 i 5 do badania środków symetrii kwadryk i rozpoznania walców i stożków, a także w §5. (I tu, i tu możnaby się bez niego obejść, lecz ułatwia ono dowody i jest ciekawe samo przez się.)

7. §5 poświęcony jest klasyfikacji kwadryk, afinicznej i euklidesowej, przy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Wymagana jest znajomość najważniejszych własności kwadryk w $\mathbb{R}^3$ (punkty 2 i 3). Opcjonalny jest dowód twierdzenia 1 w p.4, będącego euklidesową wersją twierdzenia o rozróżnaniu.

8. W §6 wskazane są inne, prócz użycia map, sposoby badania przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$. Jednym jest jest użycie przestrzeni wektorów swobodnych $(T_{\mathbb{A}}, \boxplus)$ i traktowanie $\mathbb{A}$ jako warstwy względem $T_{\mathbb{A}}$ w odpowiedniej przestrzeni liniowej $\widetilde{\mathbb{A}}$. Innym – użycie kombincji afinicznych; wartość tych ostatnich okazuje się być niezależna od użytej mapy czy od przestrzeni $(T_{\mathbb{A}}, \boxplus)$. Ważne przekształcenia afiniczne (przesunięcia, homotetie, rzutowania) możemy dogodnie opisywać bez użycia map. Zanurzenie $\mathbb{A} \hookrightarrow \widetilde{\mathbb{A}}$ umożliwia też wykorzystanie innych wyników §2.3, dotyczących warstw przestrzeni liniowych. M. in., można dzięki temu wprowadzić część liniową przekształcenia afinicznego.