GAL II* - propozycje zadań przygotowawczych do egzaminu

Adrian Langer, Henryk Toruńczyk

8 czerwca 2012

Przedstawiony wybór zadań w znacznej mierze składa się składa się z zadań zamieszczanych w notatkach do wykładu, wywieszanych w katalogu WYK; towarzyszący takim zadaniom znak §X.Y.Z.n koduje numer pliku X, pragrafu Y, punktu Z, numeru zadania n. Zaglądanie do źródła może być pomocne, bo mogą tam się znajdywać wskazówki, czasem w postaci sąsiednich zadań. Niekiedy za wskazówkę służy tylko §X.Y.Z – a to wtedy, gdy zadanie nie jest powtórzeniem wcześniejszego. Jesteśmy gotowi udzielać dodatkowych wskazówek na mailowe zapytania. Dużo zadań było omawianych na ćwiczeniach w którejś z grup ćwiczeniowych, więc rozmowy z kolegami też mogą być celowe.

Na egzaminie obok zadań teoretycznych, o podobnym charakterze jak poniższe, bedą zadania rachunkowe, podobne do tych w zwykłych potokach.

Wybór, oraz zamieszczanie odsyłaczy §X.Y.Z, ma na celu również ułatwienie przygotowania się do egzaminu ustnego, i tym też podyktowane jest zamieszczanie odniesień §$X.Y.Z$ do wyłożonego materiału. Wiele zadań było zaproponowanych przez Stefana Jackowskiego dla potrzeb podobnego wyboru, przygotowanego w ub.r.

§ 1. Operatory, ich wielomiany charakterystyczne i diagonalizacja

1. (por. dowód twierdzenia 1 w §V.5.1.) Dowieść, że endomorfizm k–wymiarowej przestrzeni liniowej V jest złożeniem k endomorfizmów L_i takich, że $\mathrm{rk}(L_i - I_V) \leq 1\ \forall i$.

2. Niech $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ będzie przestrzenią odwzorowań nieskończenie wiele razy różniczkowalnych a $D : C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ operatorem różniczkowania. Sprawdź, że następujące podprzestrzenie $V_i < C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ są D-niezmiennicze oraz zbadaj czy jeśli tak, to operator D jest na nich diagonalizowalny (tzn. ma bazę złożoną z wektorów własnych), a także oblicz jego wyznacznik i ślad (w przypadku gdy V_i jest skończenie wymiarowa):

1. V_1 - przestrzeń funkcji wielomianowych
2. V_2 - podprzestrzeń rozpięta przez funkcje $\sin 2x,\ \cos 2x$
3. V_3 - podprzestrzeń rozpięta przez funkcje $e^x,\ e^{2x},\ldots,e^{100x}$

4.** V_4 - podprzestrzeń rozpięta przez funkcje f takie, że $D(D(f)) = f$

3. * Nieskończone ciało $\mathbb{F}$ jest podciałem ciała $\widetilde{\mathbb{F}}$. Udowodnić, że jeśli dwie macierze kwadratowe, o wyrazach w $\mathbb{F}$, są podobne nad $\widetilde{\mathbb{F}}$, to są podobne nad $\mathbb{F}$. (Dla $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \widetilde{\mathbb{F}} = \mathbb{C}$ udowodniono to w §VI.1.6. Pomocne mogą być wyniki z semestru I, por. wniosek 3 w §I.2.2 i wniosek 1 w §II.3.4.)

4. Dla rzeczywsitych parametrów a, b niech $F_{a,b} : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ będzie odwzorowaniem danym wzorem $F_{a,b}(f) := f(ax + b)$. Sprawdzić, że jest to odwzorowanie liniowe oraz zbadać, dla jakich wartości parametrów a, b jest ono izomorfizmem. Dla dowolnego n podać przykład niezmienniczej podprzestrzeni n-wymiarowej oraz zbadać, czy operator $F_{a,b}$ jest na niej diagonalizowalny (w zależności od parametrów). Dla dowolnych parametrów a, b podać przykłady wektorów własnych przekształcenia $F_{a,b}$.

5. a) Dla dowolnego operatora $A : V \to V$ niech $A^* : V^* \to V^*$ oznacza odpowiadający mu operator dualny na przestrzeniach funkcjonałów. Znaleźć związek między wartościami własnymi, podprzestrzeniami niezmienniczymi oraz wielomianami charakterystycznymi operatorów A i A^*.

b) (por. §V.3.3.13.) Wykazać, że jeśli V jest przestrzenią unitarną, to izomorfizm $V \simeq V^*$ (odp.$\bar{V} \simeq V^*$ w przypadku zespolonym), zadany przez iloczyn skalarny, jest podobieństwem operatora A^h i A^*. Tu, $\bar{V}$ oznacza przestrzeń, różniącą się od V mnożeniem przez skalary; jest ono w $\bar{V}$ zdefiniowane wzorem $\lambda\mathbf{v} := \bar{\lambda}\mathbf{v}$, gdzie po prawej jest iloczyn w V.

6. (Por. §VI.4.3.1.) Niech $W \leqslant V$ będzie podprzestrzenią niezmienniczą operatora $A : V \to V$. Pokazać, że zachodzi równość: $\chi_A(\lambda) = \chi_{A|W}(\lambda)\chi_{A/W}(\lambda)$ gdzie $A/W : V/W \to V/W$ oznacza operator wyznaczony przez A na przestrzeniach warstw.

7. (§VI.1.5.2.) Niech $A : V \to V$ będzie izomorfizmem. Wyrazić wielomian charakterystyczny $\chi_{A^{-1}}$ w terminach wielomianu χ_A.

8. (§VI.1.5.3.) Niech $L \in \mathcal{L}(V)$, gdzie V jest przestrzenią nad $\mathbb{C}$, skończonego wymiaru. Oznaczmy przez $V_\mathbb{R}$ tę samą przestrzeń, ale z ciałem skalarów ograniczonym do $\mathbb{R}$, zaś przez $L_\mathbb{R} \in \mathcal{L}(V_\mathbb{R})$ – operator, wyznaczony przez L. Jaki jest związek między χ_L a $\chi_{L_\mathbb{R}}$?

9. (§VI.4.2.4.) Niech $p \in \mathbb{F}[x]$ i $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$, przy czym wielomian $\chi_\mathbf{A}$ rozkłada się nad $\mathbb{F}$ na czynniki liniowe i $n_\mathbb{F} \neq 0_\mathbb{F}$ $\forall n$. Dowieść równoważności warunków:

a) $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$;

b) $(D^j p)(\lambda) = 0$ dla $\lambda \in \operatorname{spec}(\mathbf{A})$ i $0 \leq j \leq m_\lambda - 1$ (m_λ to rozmiar największej klatki, odpowiadającej wartości λ; por);

c) wielomian p jest podzielny przez $q := \prod_{\lambda \in \operatorname{spec}(\mathbf{A})}(x - \lambda)^{m_\lambda}$.

Wywnioskować, że macierz $\mathbf{A}$ jest diagonalizowalna (nad $\mathbb{F}$) wtedy i tylko wtedy, gdy $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ dla pewnego wielomianu $p \in \mathbb{F}[x]$ bez pierwiastków wielokrotnych.

10. (Por. §VI.4.3.9) Dla dowolnego operatora $A : V \to V$ w przestrzeni nad ciałem algebraicznie domknietym istnieje flaga, której wszystkie podprzestrzenie są A-niezmiennicze. (*Flaga* to ciąg podprzestrzeni $V = V_k \supset V_{k-1} \supset ... \supset V_0$ taki, że $\dim V_i = i\ \forall i$.)

11. (§VI.4.3.9 a) Udowodnić, że każda kwadratowa macierz rzeczywista ma podprzestrzeń niezmienniczą wymiaru 1 lub 2.

b) Uogólnić a) na przemienną rodzinę macierzy rzeczywistych.

c)* Udowodnić, że jeśli $k \times k$–macierz rzeczywista ma podprzestrzeń niezmienniczą wymiaru n, to ma i podprzestrzeń niezmienniczą wymiaru $k - n$.

12. Niech $q \in \mathbb{H}$ będzie dowolnym kwaternionem i rozważmy operatory lewego i prawego mnożenia ${}_qM : \mathbb{H} \to \mathbb{H},\ \ {}_qM(q') := qq'$ oraz $M_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H},\ \ M_q(q') := q'q$. Dla jakich q zachodzi równość $M_q =_q M$? Zbadać, dla jakich q są one $\mathbb{C}$-liniowe, gdy $\mathbb{H}$ traktowac jako przestrzeń zespoloną jak w poprzednim zadaniu. Obliczyć wielomiany charakterystyczne obu operatorów.

13. (Ćwiczenie w §VI.4.1.) Niech operator $L \in \mathcal{L}(V)$ i baza $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_4$ przestrzeni V mają następujące własności: $L(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2, L(\mathbf{v}_4) = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3$ oraz $L(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$ dla $i = 2, 3$. W zależności od wartości parametrów a, b, c wyznaczyć macierz Jordana tego operatora.

14. (§VI.3.2.2.) Dla operatora L dowieść równoważności warunków:

a) operator L jest normalny i $\mathrm{spec}(L) \subset [0, \infty)$;

b) operator L jest samosprzężony i dodatnio półokreślony (tzn. dla wszystkich wektorów $\mathbf{v}$ jest $\langle L(\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, L(\mathbf{v})\rangle \geq 0$);

c) w pewnej bazie ortonormalnej, operator L ma macierz diagonalną, z (wyłącznie) nieujemnymi wyrazami na przekątnej;

d) $L = K^2$ dla pewnego samosprzężonego operatora K, który też jest dodatnio półokreślony;

e) $L = K^h K$ dla pewnego operatora K.

15. (VI.4.3.5.) Udowodnić, że gdy $\{L_i\}_{i\in I}$ jest rodziną przemiennych operatorów diagonalizowalnych, to istnieje baza przestrzeni, diagonalizująca każdy z nich. Wywnioskować, że gdy dwie przemienne macierze nad $\mathbb{C}$ są diagonalizowalne i mają tylko rzeczywiste, nieujemne wartości własne, to ich iloczyn też jest jest taki.

16. (por. §VI.2.3 i VI.4.3.5.) Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem algebraicznie domkniętym. Udowodnić, że jeśli macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ są przemienne i $\mathbf{A}$ ma n różnych wartości własnych, to $\mathbf{B} = p(\mathbf{A})$ dla pewnego wielomianu $p \in \mathbb{F}[x]$.

17. (§VI.4.2.3.) Dowieść, że macierz zespolona, której wszystkie wartości własne są dodatnie, jest kwadratem pewnej macierzy o tejże własności.

* Dowieść, że można wyżej zastąpić „pewnej” przez „jedynej”.

18. (por. §VI.4.2.3.) Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0, a macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ niech będzie odwracalna. Udowodnić, że $\mathbf{A} = \mathbf{X}^k$ dla pewnej macierzy $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$. Czy założenie odwracalności jest istotne?

19. (por. §VI.4.2.3.) Z dokładnością do podobieństwa, ile jest rozwiązań równania $X^3 = X^2$ w $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$?

20. (§VI.3.2.3.) Dowieść, że gdy operator L jest normalny, to $\ker(L)^\perp = \ker(L^h)$ i $\operatorname{im}(L)^\perp = \operatorname{im}(L^h)$.

21. (§VI.3.2.5.) Dowieść, że gdy L jest operatorem samosprzężonym, to:
a) liczba $a := \sup\{\langle L(\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle : \|\mathbf{v}\| = 1\}$ jest jego największą wartością własną;
b) liczba $b := \inf\{\langle L(\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle : \|\mathbf{v}\| = 1\}$ jest jego najmniejszą wartością własną;
c) jeśli $\langle L(\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle = \lambda\|\mathbf{v}\|^2$ i $\lambda \in \{a, b\}$, to $\mathbf{v}$ jest wektorem własnym operatora L.

22. (VI.3.4.1.) Udowodnić następujące **twierdzenie Krasnosielskiego**: operator liniowy $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k)$ wtedy i tylko wtedy jest unitarny, gdy dla pewnego $n < k$ zachowuje n–wymiarową miarę w $\mathbb{R}^k$ (tzn. $\mu_n(R) = \mu_n(L(R))$ dla każdego równoległościanu rozpiętego na n wektorach).
b) Czy unitarny jest każdy operator $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k)$, zachowujący k–wymiarową miarę?

23. (VI.3.4.3). Niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ i $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Dowieść, że gdy $\mathbf{A} = \mathbf{UH}$ jest rozkładem biegunowym, to $\|\mathbf{A}-\mathbf{W}\| > \|\mathbf{A}-\mathbf{U}\|$ dla każdej unitarnej macierzy $\mathbf{W} \neq \mathbf{U}$.

24. (§VI.3.5.4.) Dowieść, że normalność macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ jest równoważna temu, by $\|\mathbf{A}\mathbf{v}\| = \|\mathbf{A}^h\mathbf{v}\|$ dla każdego wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^k$.

§ 2. Formy kwadratowe i dwuliniowe

25. (VII.2.2.3.) Niech $f : V \to \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową i niech $\dim(V) = k$ i $\sigma(f) = (s, t)$. Dowieść, że:
a) Maksimum wymiarów podprzestrzeni, na których forma f jest dodatnio półokreślona, jest równe $k - t$.
b) Maksimum wymiarów podprzestrzeni, na których forma f jest zerowa, jest równe $k - \max(s, t)$.

26. (VII.2.2.5.) Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V, a $f : V \to \mathbb{R}$ formą kwadratową. Dowieść, że:
a) $f_{|W} : W \to \mathbb{R}$ jest formą kwadratową i $\sigma_+(f_{|W}) \leq \sigma_+(f)$, $\sigma_-(f_{|W}) \leq \sigma_-(f)$.
b) $\sigma_+(f) - \sigma_+(f_{|W}) \leq \dim(V) - \dim(W)$, i tak samo dla σ_-.

27. (por. VII.4.3.4.) Niech V będzie przestrzenią z symetryczną, niezdegenerowaną formą dwuliniową. Dowieść, że w przestrzeni dualnej V^* można okreslić iloczyn skalarny tak, żeby baza V^* dualna do dowolnej bazy ortogonalnej w V była ortogonalna.

28. [Uogólnienie ortogonalizacji Grama-Schmidta. Por. twierdzenie Jacobiego z VII.2.1.2] Niech $g : V \to \mathbb{F}$ będzie symetryczną formą dwuliniową, a $\mathbf{B}$ jej macierzą w bazie w bazie $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Załóżmy, że dla każdego $i \le k = \dim V$ forma g na podprzestrzeni $\mathrm{lin}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i\}$ jest niezdegenerowana. Pokazać, że

a) istnieje g–prostopadła baza $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ taka, że dla każdego $1 \le i \le k$,

$$\mathrm{lin}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i\} = \mathrm{lin}\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_i\}$$

oraz wektory $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$ są wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do mnożenia przez skalar.

b) jeżeli dla każdego $1 \le i \le k$, $g(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i) = 1$, to

$$g(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i) = \Delta_{i-1}/\Delta_i,$$

gdzie $\Delta_0 = 1$, zaś Δ_i jest i-tym minorem początkowym macierzy $\mathbf{B}$

c) jeżeli $k = \mathbb{R}$, to $\sigma_+(g) - \sigma_-(g) = k - 2c$, gdzie c jest liczbą zmian znaku minorów Δ_i.

29. (VII.2.4.1.) Niech $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową, a $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ ciągiem wszystkich wartości własnych (z powtórzeniami) jej macierzy w ortonormalnej bazie przestrzeni $\mathbb{R}^k$. Oznaczmy przez $S := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k : \|\mathbf{v}\| = 1\}$ sferę jednostkową. Dowieść, że:

a) $\sup f(S) = \sup_i \lambda_i$ i $\inf f(S) = \inf_i \lambda_i$.

b) Dla $\lambda \in \mathbb{R}$, liczba $\#\{i : \lambda_i \ge \lambda\}$ jest równa maksimum wymiarów podprzestrzeni W takich, że $f_{|W \cap S} \ge \lambda$.

c) Podobnie, liczba $\#\{i : \lambda_i \le \lambda\}$ jest równa maksimum wymiarów podprzestrzeni W takich, że $f_{|W \cap S} \le \lambda$.

d) Jeśli $\lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_k$, to dla $1 \le i \le k$ mają miejsce następujące **równości Couranta–Fischera**:

$$\lambda_i = \inf_W C_W \quad \text{i} \quad \lambda_{k-i+1} = \sup_W c_W,$$

gdzie W przebiega i–wymiarowe podprzestrzenie przestrzeni $\mathbb{R}^k$, zaś c_W i C_W oznaczają dla każdej takiej podprzestrzeni kresy zbioru $f(S \cap W)$, dolny i górny, odpowiednio.

30. Dwie niezdegenerowane formy kwadratowe q_1, q_2 dwóch zmiennych nad ciałem $\mathbb{F}$ charakterystyki $\neq 2$ są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są następujące dwa warunki:

a) $\det(q_1)/\det(q_2)$ jest kwadratem w ciele $\mathbb{F}$,

b) istnieją dwie pary elementów x_i, $y_i \in \mathbb{F}$ takie, że $q_1(x_1, y_1) = q_2(x_2, y_2) \neq 0$.

31. (por. VII.2.2.4) Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad $\mathbb{F}$. Na przestrzeni operatorów $\mathcal{L}(V)$ zadajemy forme dwuliniową $t : \mathcal{L}(V) \times \mathcal{L}(V) \to \mathbb{F}$, $t(A, B) := \mathrm{tr}(AB)$. Zbadać, czy ta forma jest niezdegenerowana oraz przy $\mathbb{F} =$

$\mathbb{R}$ opisać maksymalne podprzestrzenie na której jest odpowiednio dodatnio i ujemnie określona. Sprawdzić, że forma t jest niezmiennicza ze względu na sprzęganie A i B tym samym izomorfizmem przestrzeni V.

* Opisać przestrzeń wszystkich takich dwuliniowych form symetrycznych.

32. (VII.3.1.1.) Niech SYM (odp. ANT) oznacza zbiór wszystkich funkcji symetrycznych (odpowiednio: antysymetrycznych) $V \times V \to \mathbb{F}$.

a) Dowieść, że SYM i ANT są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni FUN wszystkich funkcji $V \times V \to \mathbb{F}$, oraz $FUN = SYM \oplus ANT$;

b) opisać wzorem rzut liniowy P przestrzeni FUN na SYM wzdłuż ANT i zbadać, czy P przeprowadza funkcje dwuliniowe w dwuliniowe.

33. (VII.3.1.3.) Niech V będzie dwuwymiarową rzeczywistą przestrzenią wektorową, niech $g : V \times V \to \mathbb{R}$ będzie symetryczną funkcją dwuliniową i niech wektory $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$ będą liniowo niezależne. Dowieść, że:

i) funkcja g jest dodatnio lub ujemnie określona $\Leftrightarrow$ $(g(\mathbf{u}, \mathbf{w}))^2 < g(\mathbf{u}, \mathbf{u})g(\mathbf{w}, \mathbf{w})$;

ii) funkcja g jest osobliwa$\Leftrightarrow$ $(g(\mathbf{u}, \mathbf{w}))^2 = g(\mathbf{u}, \mathbf{u})g(\mathbf{w}, \mathbf{w})$.

iii) funkcja g jest nieokreślona i nieosobliwa $\Leftrightarrow$ $(g(\mathbf{u}, \mathbf{w}))^2 > g(\mathbf{u}, \mathbf{u})g(\mathbf{w}, \mathbf{w})$.

Wywnioskować, że znak liczby $(g(\mathbf{u}, \mathbf{w}))^2 - g(\mathbf{u}, \mathbf{u})g(\mathbf{w}, \mathbf{w})$ (dodatni, zerowy lub ujemny) nie zależy od wyboru liniowo niezależnych wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$.

34. =VII.4.6.1+ znaleźć macierz operatora L_α w standardowej bazie.

35. (por. §VI. 4.3.) Niech (V, g) i (V', g') będą przestrzeniami z funkcją dwuliniową i niech $K \in \mathcal{L}(V, V')$. Dowieść, że gdy funkcja g jest nieosobliwa, to istnieje jedyne przekształcenie $K^h \in \mathcal{L}(V', V)$ takie, że $g(\mathbf{v}, K^h(\mathbf{w})) = g'(K(\mathbf{v}), \mathbf{w})\ \forall \mathbf{v} \in V,\ \mathbf{w} \in V'$.

36. (VII.3.1.6.) Niech $g, h : V \times V \to \mathbb{F}$ będą funkcjami dwuliniowymi. Dowieść, że:

a) Jeśli $h(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0$ dla wszystkich $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$ takich, że $g(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0$, to $h = \lambda g$ dla pewnego skalara λ.

b) Jeśli $g(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0 \Rightarrow g(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = 0$ $(\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V)$, to g jest funkcją symetryczną lub antysymetryczną.

§ 3. Geometria przestrzeni euklidesowych i afinicznych.

37. (por. §V.2.1.) Wyznaczyć długość przekątnej n–wymiarowej kostki rozpiętej na układzie ortonormalnym oraz kąty miedzy tą przekątną a krawędziami kostki.

38. (V. 2.2.2.) Niech f_n oznacza n–ty wielomian powstały z wielomianów $1, x, ..., x^n$ w wyniku ortogonalizacji Grama–Schmidta (bez normowania) w przestrzeni $\mathbb{R}[x]$, wyposażonej w iloczyn skalarny $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$. Dowieść, że współczynnik wielomianu f_n przy x^n jest równy 1 oraz $\int_{-1}^{1}(f_n(t))^2dt = \inf \int_{-1}^{1}(f(t))^2dt$, gdzie infimum jest wzięte po wszystkich wielomianach stopnia $\leq n$ mających współczynnik 1 przy x^n. (Wielomian $g_n := \frac{1}{f_n(1)} f_n$ nazywany jest n–tym **wielomianem Legendre'a**.)

39. * W przestrzeni z poprzedniego zadania obliczyć odległość wielomianu x^n od podprzestrzeni $\mathrm{lin}(1, x, ..., x^{n-1})$.

40. (V.4.2.2.) Niech E będzie liniową przestrzenią euklidesową i niech $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l \in E$.

a) Dowieść, że $\mu_{k+l}(R(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l)) = \mu_k(R(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)) \cdot \mu_l(R(\mathbf{w}'_1, ..., \mathbf{w}'_l))$, gdzie $\mathbf{w}'_i$ to rzut ortogonalny wektora $\mathbf{w}_i$ na $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}^\perp$.

b) Dowieść, że $\mu_{k+l}(R(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l)) \leq \mu_k(R(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)) \cdot \mu_l(R(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l))$.

41. (§V.5.5.5.) Utożsamijmy każdą liczbę $z \in \mathbb{C}$ z kwaternionem $\mathrm{Re}(z) + \imath\mathrm{Im}(z)$. Pozwala to traktować zbiór kwaternionów $\mathbb{H}$ jako zespoloną przestrzeń wektorową (mnożenie przez skalary jest wyznaczone przez mnożenie w $\mathbb{H}$, przy czym skalar stoi z lewej strony); za jej bazę można obrać np. $\mathcal{B} = (1, \jmath)$. Dla $u, v \in \mathbb{H}$ przyjmijmy $\langle u, v\rangle = \varphi(uv^*)$, gdzie $\varphi(z_1 + z_2\jmath) := z_1$ dla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Udowodnić, że

a) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni zespolonej $\mathbb{H}$ i $\langle u, u\rangle = |u|^2$ dla $u \in \mathbb{H}$, a przekształcenie $\mathbb{H} \ni u \mapsto [u]_\mathcal{B} \in \mathbb{C}^2$ (lub, równoważnie, jego odwrotność $\mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \mapsto z_1 + z_2\jmath \in \mathbb{H}$) jest $\mathbb{C}$–liniową izometrią, gdy w $\mathbb{C}^2$ rozważać standardowy iloczyn skalarny.

b) Z opisu macierzy $\mathbf{A} \in \mathrm{SU}_2$ wywnioskować, że każda $\mathbb{C}$–liniowa izometria przestrzeni $\mathbb{H}$, mająca wyznacznik 1, jest mnożeniem prawostronnym przez jednoznacznie przez nią wyznaczony kwaternion jednostkowy.

42. Dowieść, że dowolna izometria F przestrzeni euklidesowo–afinicznej $\mathbb{E}^n$ jest przekształceniem afinicznym, którego pochodna jest izometrią liniową. Wykazać, że F jest złożeniem symetrii względem podprzestrzeni afinicznych (niewięcej niż ilu?).

43. (z VIII.2.4.) Niech $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, a L będzie obrotem liniowym płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, różnym od identyczności. Dowieść, że przekształcenie $L + \mathbf{u}$ ma punkt stały i w dowolnej mapie euklidesowej, zaczepionej w tym punkcie, odpowiada mu obrót liniowy.

b) Dowieść podobnej tezy przy L będącym odbiciem prostej $\mathbb{R}$ względem zera.

c) Dowieść, że każda izometria przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^k$ zapisuje się w pewnej mapie euklidesowej jako suma ortogonalna przekształceń, z których wszystkie poza być może jednym są przesunięciami prostych lub obrotami liniowymi płaszczyzn, a pozostałe (jeśli istnieje) jest liniowym odbiciem prostej.

e) Wywnioskować, że zmieniająca orientację izometria płaszczyzny $\mathbb{E}^2$ jest **symetrią z poślizgiem**, tzn. w pewnej (euklidesowej) mapie odpowiada jej przekształcenie $(x_1, x_2) \mapsto (-x_1, x_2 + c)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$. Podobnie, **ruch** (czyli zachowująca orientację izometria) 3-wymiarowej przestrzeni $\mathbb{E}^3$ jest **ruchem śrubowym**, tzn. w pewnej mapie odpowiada mu przekształcenie, będące złożeniem obrotu wokół osi $\mathbb{R}\mathbf{e}_3$ z przesunięciem wzdłuż tej osi. (Jest to **twierdzenie Chaslesa**.) Opisać też ruchy płaszczyzny $\mathbb{E}^2$.

44. (VIII.6.5.1.) Niech $a_i \in \mathbb{A}$ i $b_i \in a_i a_{i+1}$ dla $i \in \mathbb{Z}_3$, przy czym punkty a_0, a_1, a_2 nie leżą na jednej prostej. Przyjmijmy $\lambda_i := (b_i - a_i)/(b_i - a_{i+1})$. Udowodnić, że:

a) Jeśli punkty b_0, b_1, b_2 są współliniowe, to $\lambda_0\lambda_1\lambda_2 = 1$. (**Twierdzenie Menelaosa**).

b) Jeśli proste a_0b_1, a_1b_2 i a_2b_0 przecinają się w jednym punkcie lub są parami równoległe, to $\lambda_0\lambda_1\lambda_2 = -1$. (**Twierdzenie Cevy**).

c) Twierdzenia odwrotne są też prawdziwe.

45. (VIII.6.5.2.) Nazwijmy przekształcenie $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ **dylatacją**, jeśli jest afiniczne i jego część liniowa jest jednokładnościa: $dF = \lambda I_{V_\mathbb{A}}$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

a) Dowieść, że przekształcenie $F \in A(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ jest dylatacją wtedy i tylko wtedy, gdy jest bijektywne i dla każdej prostej $L \subset \mathbb{A}$, proste L i $F(L)$ są równoległe.

b) Dowieść, że dylatacje tworzą grupę przekształceń i każda dylatacja jest przesunięciem lub jednokładnością.

46. (z §VIII.6.5.) Niech $\mathbb{A}_1$ i $\mathbb{A}_2$ będą podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{A}$, zaś $V_1, V_2 \subset V_\mathbb{A}$ ich podprzestrzeniami kierunkowymi. Obierzmy punkty $a_i \in \mathbb{A}_i$ $(i = 1, 2)$ i przyjmijmy $s := \dim(V_1 + V_2)$ i $t := \dim(\mathbb{A}_1) + \dim(\mathbb{A}_2)$. Dowieść, że:

a) $\mathrm{af}(\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2) = a_1 + \mathbb{F}(a_1 - a_2) + V_1 + V_2$ i $(a_1 - a_2 \in V_1 + V_2) \Leftrightarrow (\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2) \neq \emptyset)$.

b) Jeśli $\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2 \neq \emptyset$, to $\dim \mathrm{af}(\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2) = s \leq t$ i $\dim(\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2) = t - s \geq \max(0, t - \dim(\mathbb{A}))$. Tak więc wtedy $\dim(\mathrm{af}(\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2)) = \dim \mathbb{A}_1 + \dim \mathbb{A}_2 - \dim(\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2)$.

c) Jeśli $\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2 = \emptyset$, to $\dim(\mathrm{af}(\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2)) = 1 + s = 1 + \dim \mathbb{A}_1 + \dim \mathbb{A}_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$.

47. (por. VIII.6.4) Dany jest układ $\{(\lambda_i, a_i)\}_{i=1}^n$ punktów materialnych, o niezerowej sumie mas $\lambda := \sum_i \lambda_i$. Momentem mas tego układu względem punktu x nazywać będziemy wektor $\sum_i \lambda_i \mathbf{v}(x, a_i)$. Udowodnić, że nie zmieni się on, jeśli wszystkie masy przeniesiemy do środka ciężkości układu, tzn. do punktu $a := \frac{1}{\lambda}\sum_i \lambda_i a_i$. W szczególności, względem punktu a moment mas znika. (To zresztą dowodzi, że układ podparty w środku ciężkości jest w równowadze – bo warunkiem równowagi jest zerowanie się momentu mas układu względem punktu podparcia x, jeśli pole grawitacyjne jest prostopadłe do wszystkich wektorów $\mathbf{v}(x, a_i)$.)

48. Niech L_1, L_2, L_3 będą parami rozłącznymi prostymi w $\mathbb{R}^3$, których wektory kierunkowe są liniowo niezależne. Zbadać, kiedy istnieje przekształcenie afiniczne $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że $F(L_1) = L_2, F(L_2) = L_3$ i $F(L_3) = L_1$.

49. (por. VIII.1.2 i VIII.6.5.) Czy w przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{R}$ można zdefiniować:

a) iloraz długości każdych dwóch współliniowych odcinków?

b) iloraz długości każdych dwóch równoległych odcinków?

b) iloraz długości każdych dwóch dowolnych odcinków?

c) iloraz objętości każdych dwóch równoległościanów maksymalnego wymiaru?

Definiowana wielkość powinna być niezmiennicza względem izomorfizmów afinicznych, a dla przestrzeni euklidesowych mieć „zwykłe" znaczenie. Odpowiedzi negatywne należy uzasadnić, a pozytywne poprzeć proponowaną definicją i uzasadnieniem jej poprawności.

§ 4. Zbiory algebraiczne stopnia ≤ 2 w przestrzeniach afinicznych

50. (VIII.4.2.1.) Dowieść, że przecięcie dwóch hiperpowierzchni X, Y w $\mathbb{R}^k$ jest hiperpowierzchnią stopnia $\leq 2\sup(\deg(X), \deg(Y))$. Czy można wyżej zastąpić prawą stronę przez $\sup(\deg(X), \deg(Y))$? Jak jest przy $\mathbb{R}^k$ zastąpionym przez $\mathbb{C}^k$?

51. (VII.4.3.3.) a) Danych jest $k(k+3)/2$ punktów k–wymiarowej przestrzeni afinicznej. Dowieść istnienia kwadryki, która je wszystkie zawiera.

b)** Dowieść, że dla $k = 2$ kwadryka ta jest jedyna lub 4 z 5 punktów leży na prostej.

52. (VIII.5.2.1) Czy paraboloida eliptyczna ma płaskie przekroje hiperboliczne? A paraboloida hiperboliczna i walec paraboliczny, czy mają eliptyczne?

53. (VIII.5.3.2.) Dwa pojazdy, każdy poruszający się ruchem jednostajnym po jednej z dwóch prostych skośnych, połączone są prostoliniową rozciągliwą nicią. Dowieść, że nić zakreśli fragment paraboloidy hiperbolicznej.

54. =VIII.5.3.5.

55. (z VII.5.1.) a) Dowieść, że każda kwadryka w $\mathbb{C}^k$ jest w pewnej mapie afinicznej zadana równaniem jednej z dwóch postaci: $\sum_{i=1}^{r} x_i^2 = c$, gdzie $c \in \{0, 1\}$ i $1 \leq r \leq k$, lub $\sum_{i=1}^{r} x_i^2 = x_k$, gdzie $1 \leq r \leq k-1$. Spośród tych równań, tylko $x_1^2 = 0$ wyznacza podprzestrzeń.

b) Dowieść, że kwadryka w $\mathbb{C}^k$ zawsze jest niepusta, a jej równanie, wymienione w a), jest jedyne.

56. (§VIII.4.3 i powyższe zadanie, wraz z §VII.3.3.) Niech V (odpowiednio V') będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$, w którym każdy element ma pierwiastek kwadratowy, zaś $f : V \to \mathbb{F}$ (odp. $f' : V' \to \mathbb{F}$) niech będzie formą kwadratową. Dowieść, że jeśli przekształcenie liniowe $L : V \to V$ spełnia warunek $f(\mathbf{v}) = 0 \Rightarrow f'(L(\mathbf{v})) = 0$, to zachowuje ono ortogonalność (tzn. przeprowadza f–ortogonalne pary wektorów na f'–ortogonalne).

57. (Jest ono rozwiązane w VIII.6.6.) Niech X będzie kwadryką, a $\mathcal{L}$ rodziną prostych, z których każda przecina X w dwóch punktach. Udowodnić, że jeśli $\mathcal{L}$ składa się z prostych równoległych, to środki ciężkości zbiorów $X \cap L$ ($L \in \mathcal{L}$) leżą na wspólnej hiperpłaszczyźnie (zwanej **średnicową** dla X, odpowiadającą kierunkowi pęku $\mathcal{L}$. Teza jest też prawdziwa, jeśli kierunek ten nie jest asymptotyczny i $X \cap L \neq \emptyset$ $\forall L \in \mathcal{L}$; przy tym środkiem ciężkości n–elementowego zbioru Y nazywamy punkt $\sum_{y \in Y} \frac{1}{n} y$.)