Egzamin z GAL II* 9 VI 2009

Z poniższych 7 zadań należy wybrać 5. Jedno z pozostałych zadań można rozwiązywać jako dodatkowe (wliczane do „aktywności”).

Proszę podawać wyczerpujące wyjaśnienia i uzasadnienia, w tym jawnie wskazywać na wykorzystywane rezultaty.

1. a) Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

jest dodatnio określona?

b) Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ kwadryka

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2ax_2x_3 = 4a$$

jest elipsoidą?

2. Niech V będzie podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^4$, zadaną układem równań

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ -3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 4. \end{cases}$$

i niech $W = (1, 3, -3, -1) + \mathbb{R}(1, 0, 1, 0)$.

a) Oblicz odległość

$$\operatorname{dist}(V, W) = \inf_{v \in V, w \in W} ||v - w||$$

pomiędzy V i W.

b) Wyznacz parę punktów $v \in V$ i $w \in W$ taką, że $||v - w|| = \operatorname{dist}(V, W)$.

3. Niech $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową zadaną wzorem

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

a) Wyznacz rząd i sygnaturę formy q.

b) Znajdź bazę, w której macierz formy q jest diagonalna.

c) Wyznacz maksymalną (w sensie wymiaru) podprzestrzeń $V \subset \mathbb{R}^3$, na której q znika. Uzasadnij, dlaczego nie istnieje taka przestrzeń większego wymiaru.

4. Niech V będzie przestrzenią liniową z ortogonalnością zadaną pewną formą metryczną g, i dla $A \subset V$ przyjmijmy $A^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} \perp A\}$. Niech dalej V_1 i W będą podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni V, przy czym $V_1 \oplus V^\perp = V$. Dowieść, że:

a) Jeśli forma g jest nieosobliwa, to $\dim(V) = \dim(W^\perp) + \dim(W)$.

b) $W^\perp = V^\perp \bigoplus (P(W)^\perp \cap V_1)$, gdzie P to rzutowanie przestrzeni V na V_1, wzdłuż $V^\perp$.

c) $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^{\perp}) - \dim(W \cap V^{\perp})$.

5. Niech g będzie symetryczną funkcją dwuliniową na rzeczywistej przestrzeni liniowej V, zaś W i W' będą nieosobliwymi podprzestrzeniami przestrzeni (V, g). Dowieść, że każdą izometrię $W \to W'$ można przedłużyć do izometrii $V \to V$. (Izometrią nazywamy izomorfizm liniowy, zachowujący wyróżnioną funkcję dwuliniową.)

6. Dla $i \in \mathbb{Z}_3$ niech $p_i \in \mathbb{F}^3, \lambda_i \in \mathbb{F}$ oraz

$$q_i = \lambda_i p_{i-1} + (1 - \lambda_i) p_{i+1}$$

(Tu 2+1=0.) Zakładamy ponadto, że punkty p_0, p_1, p_2 nie leżą na jednej prostej. Udowodnić równoważność warunków:

a) $\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 = (1 - \lambda_0)(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)$,

b) proste $p_0 q_0, p_1 q_1$ i $p_2 q_2$ mają punkt wspólny lub są parami równoległe. (Jest to twierdzenie Cevy.)

7. Niech $X = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k : q(\mathbf{v}) = 0\}$, gdzie wielomian q zadany jest niżej. Niech dalej S_X oznacza zbiór środków symetrii kwadryki X i przyjmijmy

$\alpha_X := \sup\{\dim(A) : A$ jest podprzestrzenią afiniczną i $S_X \subset A \subset X\}$

$\beta_X := \sup\{\dim(A) : A$ jest podprzestrzenią afiniczną i $S_X \subset A \subset \mathbb{R}^k \setminus X\}$.

a) Dowieść, że jeśli $q = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} x_i^2$, gdzie $s \geq t$ i $1 \leq s + t \leq k$, to $\dim(S_X) = k - s - t$ oraz $\alpha_X = k - s$.

b) Dowieść, że jeśli $q = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} x_i^2 - 1$, gdzie $s \geq 1$ i $s + t \leq k$, to $\dim(S_X) = k - s - t$ oraz $\beta_X = k - s$.

Kolokwium z GAL II* 25 IV 2009r.

Z poniższych 6 zadań należy wybrać 4; są one punktowane, jak zaznaczono. Można też rozwiązywać jedno jeszcze zadanie jako dodatkowe (wynik będzie wliczony do punktów uzyskanych za aktywność).

W rozwiązaniach proszę jawnie wskazywać na wykorzystywane rezultaty i dawać wyczerpujące wyjaśnienia.

1. (22p.)Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, zadane wzorem

$$L(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x + ty + 2z, 2x + 2y - z, 2x - y + 2z),$$

(i) jest izometrią?
(ii) zachowuje objętość 3-wymiarowych równoległościanów?
(iii) zachowuje orientację?

2. (26p.) Niech $\mathbf{v} \in V \setminus W$ i $\mathbf{w} \in W$, gdzie V jest przestrzenią unitarną, a W jej podprzestrzenią liniową. Oznaczmy przez $\mathbf{v}'$ rzut ortogonalny wektora $\mathbf{v}$ na W. Dowieść, że:

a) $\angle(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \leq \angle(\mathbf{v}, \mathbf{w})$;
b) $\angle(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq \pi/2 \Leftrightarrow \angle(\mathbf{w}, \mathbf{v}') \leq \angle(\mathbf{w}, \mathbf{v})$.

3. (22p.) Dowieść, że gdy V jest przestrzenią unitarną i operator $L \in \mathcal{L}(V)$ jest samosprzężony, to $V = \ker(L) \bigoplus\!\!\!\!\perp \operatorname{im}(L)$.

4. (24p.) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{C}$ macierz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} t & 0 & 2-t \\ -t & 2 & t \\ -t & 0 & 2+t \end{pmatrix}$$

jest diagonalizowalna? Dla pozostałych t wyznacz macierz nieosobliwą $\mathbf{S}$ i Jordana $\mathbf{J}$ tak, by $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{J}$.

5. (24p.) Niech $L \in \mathcal{L}(V)$, niech V' będzie podprzestrzenią L–niezmienniczą, i niech $L' = L_{|V'} \in \mathcal{L}(V')$. Dla $n \in \mathbb{N}$ i $\lambda \in \mathbb{F}$ dowieść, że:

a) liczba $\operatorname{rk}(L^n) - \operatorname{rk}(L^{n+1})$ jest równa $\dim\big(\ker(L_{|L^n(V)})\big)$.

b) $p_n(\lambda) \geq p'_n(\lambda)$, gdzie $p_n(\lambda)$ (odp. $p'_n(\lambda)$) to liczba tych jordanowskich klatek macierzy Jordana operatora L (odp. L'), które są stopnia $\geq n$ i mają λ na swej przekątnej. (Zakładamy rozkładalność wielomianu χ_L na czynniki liniowe.)

6. (26p.) Niech macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ będzie symetryczna i dodatnio określona, i niech $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\mathbf{0}\}$. Dowieść, że ciąg $(\mathbf{A}^n(\mathbf{v})/\|\mathbf{A}^n(\mathbf{v})\|)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do wektora własnego macierzy $\mathbf{A}$.