GAL, egzamin TEMAT **A** 21.06.2012

Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).
Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE) i numer indeksu osoby zdającej oraz numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. (20pkt) Dane są rzeczywiste macierze

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Które z macierzy A, B, C są podobne.

   (b) Znajdź postać Jordana P macierzy A oraz macierz D taką, że $D^{-1}AD = P$.

2. (20pkt) W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dane są proste $L_1 = (1, 2, 0) + \mathrm{lin}((1, 3, 1))$, $L_2 = (4, 2, 4) + \mathrm{lin}((1, -1, -1))$.

   (a) Niech M będzie płaszczyzną w $\mathbb{R}^3$ równoległą do L_1 i do L_2 i zawierającą punkt $(3, 0, 1)$. Znaleźć równanie liniowe opisujące płaszczyznę M.

   (b) Ile jest przekształceń afinicznych $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniających warunek: $\forall p \in L_1 \ f(p) = (5, 1, 0)$ oraz $\forall p \in L_2 \ f(p) = (2, 2, 1)$. Odpowiedź uzasadnij.

3. (20pkt) W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle \, , \rangle$, dana jest płaszczyzna $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 2\}$ i prosta $L = (1, 1, 1) + \mathrm{lin}((1, 2, 1))$.

   (a) Znaleźć odległość prostej L od płaszczyzny M.

   (b) Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie symetrią prostopadłą względem L. Znaleźć parametryzację płaszczyzny $f(M)$.

4. (20pkt) Forma dwuliniowa symetryczna $h\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ dana jest warunkiem

$$G(h; \mathcal{S}t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

   gdzie $\mathcal{S}t$ jest bazą standardową.

   (a) Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^4, h)$ oraz znaleźć sygnaturę macierzy $G(h; \mathcal{S}t)$.

   (b) Czy w przestrzeni $W = \mathrm{lin}(\varepsilon_2, \varepsilon_4) \subset \mathbb{R}^4$ jest niezerowy wektor izotropowy formy h? Czy istnieje dwuwymiarowa podprzestrzeń $Z \subset \mathbb{R}^4$ złożona z wektorów izotropowych formy h? Odpowiedzi uzasadnić.

5. (20pkt) W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ dane są hiperpowierzchnie $X_c = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + (1+c)x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3 = 0\}$, gdzie $c \in \mathbb{R}$, $Y = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1x_2 - x_3 = 0\}$.

   (a) Znaleźć typ afiniczny hiperpowierzchni X_1 (podać nazwę i naszkicować).

   (b) Dla jakich wartości parametru $c \in \mathbb{R}$ hiperpowierzchnie X_c i Y są afinicznie izomorficzne.

6. (15pkt) Udowodnić ,że przestrzeń dwuliniowa (V, h) jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego niezerowego wektora α istnieje wektor β taki, że $h(\alpha, \beta) \neq 0$.

7. (15pkt) Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K charakterystyki różnej od 2 i niech $q\colon V \longrightarrow K$ będzie formą kwadratową. Udowodnić, że istnieje dokładnie jedna forma dwuliniowa symetryczna $h\colon V \times V \longrightarrow K$ taka, że $q(\alpha) = h(\alpha, \alpha)$ dla dowolonego $\alpha \in V$.

8. (20pkt)

   (a) Niech $h\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową zadaną warunkiem $G(h; \mathcal{S}t) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ dla pewnego niezerowego $a \in \mathbb{R}$. Podać przykład takiej bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$, że $G(h; \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) Podać przykład form dwuliniowych symetrycznych nieosobliwych $h_1, h_2\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dla których nie istnieje wspólna baza prostopadła w $\mathbb{R}^2$. Odpowiedź uzasadnić.

GAL, egzamin TEMAT **B** 21.06.2012

Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).
Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE) i numer indeksu osoby zdającej oraz numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. (20pkt) Dane są rzeczywiste macierze

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Które z macierzy A, B, C są podobne.

   (b) Znajdź postać Jordana P macierzy A oraz macierz D taką, że $D^{-1}AD = P$.

2. (20pkt) W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dane są proste $L_1 = (1, 2, 1) + \text{lin}((1, 1, 1))$, $L_2 = (4, 3, 2) + \text{lin}((2, 3, 1))$.

   (a) Niech M będzie płaszczyzną w $\mathbb{R}^3$ równoległą do L_1 i do L_2 i zawierającą punkt $(0, 1, 2)$. Znaleźć równanie liniowe opisujące płaszczyznę M.

   (b) Ile jest przekształceń afinicznych $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniających warunek: $\forall p \in L_1\ f(p) = (-2, 0, 3)$ oraz $\forall p \in L_2\ f(p) = (1, 5, 2)$. Odpowiedź uzasadnij.

3. (20pkt) W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle\ ,\rangle$, dana jest płaszczyzna $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 2\}$ i prosta $L = (1, 1, -1) + \text{lin}((2, 1, 1))$.

   (a) Znaleźć odległość prostej L od płaszczyzny M.

   (b) Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie symetrią prostopadłą względem L. Znaleźć parametryzację płaszczyzny $f(M)$.

4. (20pkt) Forma dwuliniowa symetryczna $h\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ dana jest warunkiem

$$G(h; \mathcal{S}t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

   gdzie $\mathcal{S}t$ jest bazą standardową.

   (a) Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^4, h)$ oraz znaleźć sygnaturę macierzy $G(h; \mathcal{S}t)$.

   (b) Czy w przestrzeni $W = \text{lin}(\varepsilon_2, \varepsilon_3) \subset \mathbb{R}^4$ jest niezerowy wektor izotropowy formy h? Czy istnieje dwuwymiarowa podprzestrzeń $Z \subset \mathbb{R}^4$ złożona z wektorów izotropowych formy h? Odpowiedzi uzasadnić.

5. (20pkt) W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ dane są hiperpowierzchnie $X_c = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + (1 - c)x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - x_3 = 0\}$, gdzie $c \in \mathbb{R}$, $Y = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1x_2 - x_3 = 0\}$.

   (a) Znaleźć typ afiniczny hiperpowierzchni X_{-1} (podać nazwę i naszkicować).

   (b) Dla jakich wartości parametru $c \in \mathbb{R}$ hiperpowierzchnie X_c i Y są afinicznie izomorficzne.

6. (15pkt) Udowodnić ,że przestrzeń dwuliniowa (V, h) jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego niezerowego wektora α istnieje wektor β taki, że $h(\alpha, \beta) \neq 0$.

7. (15pkt) Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K charakterystyki różnej od 2 i niech $q\colon V \longrightarrow K$ będzie formą kwadratową. Udowodnić, że istnieje dokładnie jedna forma dwuliniowa symetryczna $h\colon V \times V \longrightarrow K$ taka, że $q(\alpha) = h(\alpha, \alpha)$ dla dowolonego $\alpha \in V$.

8. (20pkt)

   (a) Niech $h\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową zadaną warunkiem $G(h; \mathcal{S}t) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ dla pewnego niezerowego $a \in \mathbb{R}$. Podać przykład takiej bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$, że $G(h; \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) Podać przykład form dwuliniowych symetrycznych nieosobliwych $h_1, h_2\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dla których nie istnieje wspólna baza prostopadła w $\mathbb{R}^2$. Odpowiedź uzasadnić.