A

EGZAMIN Z ALGEBRY LINIOWEJ, SEMESTR LETNI 2002

CZĘŚĆ I. ZADANIA

1. Niech $f\colon \mathbb{C}^3 \mapsto \mathbb{C}^3$ będzie homomorfizmem o macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ w bazie standardowej.
   Znaleźć macierz Jordana A_J przekształcenia f oraz taką macierz C, że $C^{-1}AC = A_J$.

2. Niech $\mathbb{R}^3$ będzie afiniczną przestrzenią euklidesową ze standardowym iloczynem skalarnym i $H = af\{[2,3,1],[1,2,1],[2,4,1]\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
   (a) Znaleźć układ równań opisujący H.
   (b) Znaleźć wzór analityczny rzutu prostopadłego $\mathbb{R}^3$ na H
   (c) Znaleźć odległość punktu $[0,0,0]$ od H.

3. Niech $\mathbb{R}^3$ będzie przestrzenią euklidesową ze standardowym iloczynem skalarnym. Dla dowolnej liczby $a \in \mathbb{R}$ rozważmy przekształcenia $f_a, g_a\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ określone wzorami:
   $$f_a(x_1,x_2,x_3) = (ax_1 - \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}x_1 + ax_2, x_3) \qquad g_a(x_1,x_2,x_3) = (x_1, ax_2 - \frac{1}{2}x_3, \frac{1}{2}x_2 + ax_3).$$
   Wyznaczyć wszystkie wartości parametru a dla których przekształcenie $f_a \circ g_a$ jest izometrią.

4. Niech $X_a \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie hiperpowierzchnią opisaną równaniem $x_1x_2 + ax_1x_3 + x_2x_3 + x_1 + 2 = 0$. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$, X_a jest afinicznie równoważna z paraboloidą hiperboliczną (tzn. z hiperpowierzchnią opisaną równaniem $x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0$)

5. Niech A będzie macierzą $n \times n$ o współczynnikach z ciała K taką, że $A^m = 0$ dla pewnej liczby naturalnej m. Wykazać, nie korzystając z twierdzenia Jordana, że $A^n = 0$.

CZĘŚĆ II. TEORIA

1. Zdefiniuj środek ciężkości układu punktów w przestrzeni afinicznej, co to znaczy, że układ punktów jest w położeniu ogólnym?
2. Co to jest przekształcenie sprzężone do przekształcenia liniowego?
3. Podaj definicję przekształcenia samosprzężonego i jego macierzową charakteryzację.
4. Podaj definicję afinicznej przestrzeni euklidesowej.
5. Sformułuj kryterium Sylwestera.
6. Podaj definicję kąta niezorientowanego i jego miary w przestrzeni euklidesowej.

Punktacja:
zadania z części I po 10 punktów
zadania z części II po 4 p.
Razem 74 p.