GAL potok 1, kolokwium nr 2, 18.05.2007

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce.
Na każdej kartce: imię i nazwisko osoby zdającej, numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej, numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Temat A

1. Niech $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1\}$. W przestrzeni $(\mathbf{R}^4, < \, , >_{\mathrm{st}})$
a) Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni $T(H)$ i bazę ortonormalną przestrzeni $T(H)$.
b) Znaleźć rzut prostopadły punktu $p = (2, 0, 0, 4)$ na przestrzeń H.

2. Niech $p_0 = (1, 1, 0), p_1 = (2, 1, 1), p_2 = (1, 2, 2)$. W przestrzeni $(\mathbf{R}^3, < \, , >_{\mathrm{st}})$
a) Znaleźć odległość punktu $p = (2, 1, 2)$ od płaszczyzny $M = \mathrm{af}(p_0, p_1, p_2)$.
b) Na krzywej $S = \{ (2r^2, r, r^2 - 5) \mid r \in \mathbf{R}\}$ znaleźć taki punkt q, że objętość czworościanu $\mathrm{conv}(p_0, p_1, p_2, q)$ jest najmniejsza. Obliczyć tę najmniejszą objętość.

3. a) Ile jest izometrii f przestrzeni euklidesowej afinicznej $(\mathbf{R}^3, < \, , >_{\mathrm{st}})$ spełniających warunki: $f((0, 2, 0)) = (1, -1, -1)$ oraz $f'(\alpha) = \alpha$ dla każdego $\alpha \in \mathrm{lin}((1, 1, 1), (1, 1, 0))$? Dla każdej takiej izometrii f obliczyć $f((4, 4, 1))$.
b) Dla jakich $s \in \mathbf{R}$ przekształcenie $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ $\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + 3x_2, -x_1 + sx_2)$ jest izometrią przestrzeni euklidesowej liniowej $(\mathbf{R}^2, < \, , >)$, gdzie $< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >= x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$?

4. Niech $(V, < \, , >)$ będzie n-wymiarową przestrzenią euklidesową liniową.
a) Wykazać, że jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest układem prostopadłym niezerowych wektorów przestrzeni $(V, < \, , >)$, to układ ten jest liniowo niezależny.
b) Wykazać, że każda izometria przestrzeni $(V, < \, , >)$ jest złożeniem pewnej liczby symetri prostopadłych względem podprzestrzeni wymiaru $n - 1$.

5. W przestrzeni $(\mathbf{R}^n, < \, , >_{\mathrm{st}})$ rozpatrzmy układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, gdzie $\alpha_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ dla $j = 1, \ldots, k$ i rozpatrzmy odpowiadającą im macierz $A = [a_{ij}] \in M_{n \times k}(\mathbf{R})$. Niech $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ będzie rzutam prostopadłym na $W = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.
a) Wykazać, że jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest układem ortonormalnym, to $M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}} = AA^T$.
b) Wykazać, że jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest układem liniowo niezależnym, to
$M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}} = A(A^TA)^{-1}A^T$.