Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej, do której osoba zdająca uczęszczała, lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia.
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Temat B

1. Niech $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem: $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 4x_2 - 2x_3, -x_1 - 2x_2 + x_3)$, zaś $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ niech będzie dane wzorem: $g(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$. Niech dalej $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ będzie następującą bazą $\mathbb{R}^3$: $\alpha_1 = (1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (2, 0, 1)$, $\alpha_3 = (-1, -1, -1)$.
(a) Znaleźć współrzędne $f^*(g)$ w bazie $(\mathbb{R}^3)^*$ sprzężonej do bazy $\mathcal{A}$.
(b) Podać wzory na funkcjonały tworzące bazę $ker f^*$ oraz $Im f^*$.

2. (a) Znaleźć postać Jordana macierzy: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) Czy istnieją liczby rzeczywiste a,b takie, że macierz: $B = \begin{bmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & b \\ -2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ jest podobna do macierzy A.

3. Niech $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem zadanym w bazie standardowej $\mathbb{R}^3$ macierzą: $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$
(a) Znaleźć bazę Jordana i macierz Jordana endomorfizmu f.
(b) Znaleźć macierz Jordana endomorfizmu f^{50}.

4. Niech $A \in M_{n\times n}(K)$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
(1) A jest odwracalna;
(2) $det A \neq 0$;
(3) $r(A) = n$.

5. Niech $\mathcal{V}$ będzie n-wymiarową przestrzenią linową nad $\mathbb{C}$ i niech $f \in End(\mathcal{V})$. Wykazać, że:
(a) istnieje liczba naturalna k taka, że $f^k = 0 \iff$ wszystkie wartości własne f są równe 0.

(b) Niech f będzie endomorfizmem rzędu 2 przestrzeni liniowej C^n. Wykazać, że ma miejsce jedna z trzech sytuacji: 1) f jest diagonalizowalny; 2) trf jest wartością własną f; 3) $\frac{1}{2}trf$ jest wartością własną f.