Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Temat A

1. Niech $f : R^3 \longrightarrow R^3$ będzie przekształceniem liniowym i niech
$$A = M_{st}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
(a) Znaleźć postać Jordana A_J macierzy A oraz macierz C taką, że $A_J = C^{-1}AC$.
(b) Czy istnieje taka baza R^3, że w tej bazie f ma macierz B, gdzie:
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Niech w R^3 funkcjonał dwuliniowy symetryczny będzie określony wzorem:
$\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_1y_3 + x_3y_1$.
(a) Znaleźć bazę ortogonalną w R^3 względem φ;
(b) Dla jakich wartości rzeczywistego parametru a istnieje baza $\mathcal{A}$ w R^3 taka, że:
$$M_{\mathcal{A}}(\varphi) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
(c) Czy istnieje w R^3 podprzestrzeń dwuwymiarowa, na której φ jest dodatnio określona?

3. Niech R^4 będzie przestrzenią liniową euklidesową ze standardowym iloczynem skalarnym i niech $f : R^4 \longrightarrow R^4$ będzie zadane wzorem: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_2, x_3)$
(a) Wykazać, że f jest izometrią,
(b) Rozłożyć f na iloczyn symetrii i obrotu.

4. Niech $E(R^3)$ będzie przestrzenią afiniczną euklidesową ze standardowym iloczynem skalarnym i niech: $L_1 : [0, 0, -1] + \mathrm{Lin}\{(1, 0, 0)\}$, $L_2 : [0, 0, 1] + \mathrm{Lin}\{(0, 1, 0)\}$.
Definiujemy zbiór $A = \{p \in E(R^3) : \rho(p, L_1) = \rho(p, L_2)\}$.
(a) Znaleźć równanie opisujące A w bazie standardowej.
(b) Znaleźć postać kanoniczną A. Czy A ma (zawiera) środki symetrii.
afiniczną

5. Niech V będzie liniową przestrzenią euklidesowa skończonego wymiaru i niech V_1, V_2 będą takimi podprzestrzeniami V, że $V = V_1 \oplus V_2$. Niech dalej f będzie rzutowaniem przestrzeni V na V_1 wzdłuż V_2. Wykazać, że:
(a) $V = V_1^{\perp} \oplus V_2^{\perp}$
(b) Przekształcenie f^* sprzężone do f jest rzutowaniem V na $V_2^{\perp}$ wzdłuż $V_1^{\perp}$.