GAL II, Egzamin, Temat A

12 czerwca 2006

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być imię i nazwisko osoby zdającej, jej numer indeksu, numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Zadanie 1

Niech endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie zadany wzorem

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_3) = (2x_1, x_1 + 2x_2, -x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4) \text{ oraz } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Czy endomorfizm φ jest diagonalizowalny? Uzasadnić.
(b) Znaleźć postać Jordana macierzy B.
(c) Czy istnieje taka baza $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = B$.

Zadanie 2

Niech $L : (0, 1, 0) + t(1, 1, 1) \subset \mathbb{R}^3$. W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć równanie płaszczyzny P takiej, że:

(a) $P \supset L$ oraz $(1, 3, 0) \in P$.
(b) $P \supset L$ oraz P zawiera prostą równoległą do K, która jest opisana przez układ równań

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}.$$

(c) $P \supset L$ oraz P jest równoodległa od punktów (1,0,0) i (0,0,1).

Zadanie 3

Niech P oznacza płaszczyznę w $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym, opisaną rónaniem $x_1 - x_3 = 2$. Znaleźć wzór na przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że:

(a) $f(P) = \{(2, 1, 0)\}$ oraz $f((3, 1, -1)) = (0, 1, 2)$.
(b) f jest rzutem prostopadłym na prostą $L : (1, 1, 1) + t(1, 0, -1)$.
(c) f jest izometrią zmieniającą orientację przestrzeni oraz $f|_P = \mathrm{id}_P$.

Zadanie 4

Niech $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową zadną wzorem

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

(a) Znaleźć bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ w której forma q ma postać diagonalną.
(b) Znaleźć rząd i sygnaturę formy q.
(c) Określić typ afiniczny hiperpowierzchni w $\mathbb{R}^3$ określonej równaniem

$$x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_1 + 2 = 0.$$

Wykonać rysunek.

Zadanie 5

Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru skończonego nad ciałem K. Endomorfizm $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ nazywamy półprostym jeżeli dla każdej niezmienniczej podprzestrzeni V_1 endomorfizmu φ istnieje podprzestrzeń niezmiennicza V_2 taka, że $V = V_1 \oplus V_2$. Pokazać, że:

(a) każda liniowa izometria przestrzeni euklidesowej jest endomorfizmem półprostym.
(b) każdy diagonalizowalny endomorfizm jest półprostym endomorfizmem.
(c) jeżeli K jest ciałem algebraicznie domkniętym i φ jest półprosty, to φ jest diagonalizowalny.