GAL, egzamin, 14.06.2004, Temat B

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce powinno być: imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania oraz litera tematu.

1. Endomorfizm $\varphi_t : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ jest dany wzorem $\varphi_t((x_1, x_2, x_3)) =$
$= (5x_1, tx_1 + x_2 - 2x_3, t^2x_1 - 2x_2 + 4x_3)$.
a) Znaleźć wartości własne i bazy przestrzeni własnych endomorfizmu φ_2.
b) Dla jakich $t \in \mathbf{R}$ endomorfizm φ_t jest diagonalizowalny?
c) Dla jakich $t \in \mathbf{R}$ istnieje taka macierz ortogonalna $C_t \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$, że macierz $C_t^{-1}M(\varphi_t)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}}C_t$ jest diagonalna? Dla każdego takiego t znaleźć macierz C_t.

2. W $\mathbf{R}^3$ zadany jest standardowy iloczyn skalarny, $p = (3, -1, 2)$, $L = (2, 0, -3) + \mathrm{lin}((1, 2, 2))$, $\mathrm{H}: \ 2\mathrm{x}_1 - 2\mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 = 1$.
a) Znaleźć rzut prostopadły punktu p na płaszczyznę H.
b) Znaleźć wszystkie punkty, które można otrzymać jako obrazy punktu p w izometriach $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ takich, że $f(q) = q$ dla każdego $q \in H$.
c) Pokazać, że prosta L jest leży na płaszczyźnie H. Znaleźć wszystkie punkty, które można otrzymać jako obrazy punktu p w izometriach $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ takich, że $f(q) = q$ dla każdego $q \in L$ oraz $f(H) = H$.

3. Forma dwuliniowa h_t na przestrzeni $\mathbf{R}^3$ dana jest wzorem $h_t((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) =$
$= tx_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 3x_3y_3$.
a) Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni $(\mathbf{R}^3, h_1)$.
b) Znaleźć macierz diagonalną, o wyrazach w $\{1, -1, 0\}$, kongruentną nad $\mathbf{R}$ do $G(h_1; \mathrm{st})$.
c) Dla jakich $t \in \mathbf{R}$ forma h_t jest nieosobliwa? Dla jakich $t \in \mathbf{R}$ forma h_t jest iloczynem skalarnym? Obliczyć sygnaturę macierzy $G(h_t; \mathrm{st})$ w zależności od $t \in \mathbf{R}$.

4. Niech $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 12x_3 + 2 = 0\}$.
a) Określić typ afiniczny hiperpowierzchni X.
b) Znaleźć środki symetrii hiperpowierzchni X.
c) Niech $Y_r = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + 3x_2^2 - rx_3^2 + r - 4 = 0\}$. Dla jakich $r \in \mathbf{R}$ istnieje taki izomorfizm afiniczny $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, że $f(Y_r) = X$?

5. Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbf{R}$ i niech $h : V \times V \to \mathbf{R}$ będzie formą dwuliniową symetryczną nieosobliwą.
a) Niech $\mathrm{dimV} = 2$. Wykazać, że jeśli V zawiera niezerowy wektor izotropowy, to istnieją takie bazy $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ w V, że $G(h; \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ oraz $G(h; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
b) Niech $\mathrm{dimV} = 2\mathrm{n}$. Wykazać, że jeśli forma h ma sygnaturę 0, to istnieje taka podprzestrzeń $W \subset V$ wymiaru n, że dla każdych $\alpha, \beta \in W$ zachodzi $h(\alpha, \beta) = 0$.
c) Niech $\mathrm{dimV} = 2\mathrm{n}$. Wykazać, że jeśli istnieje taka podprzestrzeń $W \subset V$ wymiaru n, że dla każdych $\alpha, \beta \in W$ zachodzi $h(\alpha, \beta) = 0$, to forma h ma sygnaturę 0.