GAL I, jesień 2009

Zadania domowe, grupa 13 (czwartkowo–wtorkowa, prowadzący H. Toruńczyk).

Seria 26 (na 19 I 2010).

Przypominam, że nie omówiliśmy jeszcze ważnych zadań 3 i 5 z serii 24 –proszę je ponownie przemyśleć i zgłaszać wraz z poniższymi na najbliższych ćwiczeniach.

1. Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & s & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. W zależności od wartości parametru s wyznaczyć a) $\det(\mathbf{A})$, b) $\mathrm{rk}(\mathbf{A})$.

2. Niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ będzie macierzą, której pierwszy wiersz i pierwsza kolumna są równe $(0, 1, ..., 1)$, a pozostała klatka ma wszystkie wyrazy przekątnej równe 0, a pozostałe równe s. Wyznaczyć $\det(\mathbf{A})$, $\det(\mathbf{I} - \mathbf{A})$, $\det(\mathbf{A}^3)$ i $\det(\mathbf{A} - \mathbf{A}^2)$.

3. Obliczyć wyznacznik $k \times k$–macierzy, której ostatnim wierszem jest $(y, 0, ..., 0, x)$, pierwszym $(x, y, 0, ..., 0)$, drugim $(0, x, y, 0, ..., 0)$ itd. aż do wiersza przedostatniego, równego $(0, ..., 0, x, y)$.

4. Czy to, że przekształcenie $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ jest różnowartościowe, można wyrazić przez rząd macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$? (Por. dyskusję na ćwiczeniach zadania 2 z serii 24.)

Poniższe zadanie może być rozwiązywane jako pisemne przez tych, którzy rozwiązania zadania 2b) z poprzedniej serii nie dali lub chcą je zastąpić lepszym:

5. Podprzestrzeń $U \subset \mathbb{R}^3$ jest równa $\mathrm{lin}((1, 0, 1), (1, 1, 2))$. Opisać układem równań jej przeciwobraz $L^{-1}(U)$ przy przekształceniu $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$, którego macierzą (w standardowych bazach) jest $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & -5 & -5 & -14 \end{bmatrix}$.

Seria 25 (na 14 I 2010).

1. Zdaje się, że zadanie pisemnie z poprzednie serii sprawia kłopoty rachunkowe (nie biorę odpowiedzialności za odpowiedź, jest przepisana z Kostrykina). Jako konkurencyjne z nim (do wyboru) proponuję następujące zadanie nie wymagające rachunków:

Dowieść, że gdy klatki $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$ są kwadratowe, to wyznacznik macierzy $\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}$ jest równy iloczynowi $\det(\mathbf{P})\det(\mathbf{Q})$. (Wskazówka: sprowadzić klatki $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$ do postaci schodkowej operacjami typu (I).)

2. W oparciu o dyskusję z ćwiczeń podać opis (uwikłany lub parametryczny, do wyboru) przestrzeni W, gdy (przyjmujemy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$):

a) $W = L_{\mathbf{A}}(V)$, gdzie $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, a V to zbiór rozwiązań układu równania $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

b) $W = L_{\mathbf{A}}^{-1}(U)$, gdzie macierz $\mathbf{A}$ jest jak wyżej, a U jest powłoką liniową wektorów $(1, 0, 1, 0)$ i $(1, 1, 0, 1)$.

Powyższe zadania są pisemne, przy czym a) i b) w zadaniu 2 liczone są jako pełne zadania. (Czyli można uzyskać 3×3 punkty: 3 za wybrane zadanie 1–to lub z poprz. serii, i po 3 za każdą z części zad. 2.)

Przypomnę, że w zad. 2 wygodnie jest V przedstawić w postaci parametrycznej, a U – uwikłanej. (Uzyskanie takiego opisu daje część punktów.) Dyskusja z ćwiczeń oparta była o rzecz następującą: gdy dane są przekształcenia $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ oraz zbiór $Z_0 \subset Z$, to $(g \circ f)^{-1}(Z_0) = f^{-1}(g^{-1}(Z_0))$. (Stosowaliśmy to, gdy przekształcenia i przestrzenie są liniowe, a $Z_0 = \{\mathbf{0}\}$.) Proszę tę ogólną własność przekształceń przemyśleć jako zadanie ustne.

Seria 24 (na 12 I 2010, a pisemne na 14 I).

1. Obliczyć wyznacznik macierzy $\mathbf{A}$, gdy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{bmatrix}$$

Powyższe zadanie jest pisemne (a odpowiedź wg. zbioru Kostrykina to 301). o czytelne wyjaśnienia poszczególnych przekształceń macierzy i wykonywanych rachunków!

Co do zadań ustnych i przygotowania do kolokwium, zmieniłem nieco koncepcję. Zadania ze skryptu T. Koźniewskiego mogą Państwo samodzielnie przeglądać i wskazane przez Państwa możemy omawiać na ćwiczeniach, poza oznaczonymi literą D w „kluczu" z następnej strony (te też możemy, ale przy nadmiarze czasu). To samo dotyczy zadań ze strony A. Webera. Na ćwiczeniach wtorkowych przedstawię natomiast pewne zadania z kolokwiów z ub. lat. Proszę też o przemyślenie następujących zadań:

2. Dowieść, że gdy przekształcenie $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ jest „na", to wiersze macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$ są liniowo niezależne, i odwrotnie.

3. i) Jaki jest związek między $[L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$ a $[L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}'}$, jeśli $\mathcal{V}'$ otrzymano z bazy $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ przez a) zastąpienie wektora $\mathbf{v}_i$ wektorem $c\mathbf{v}_i$? b) zastąpienie go wektorem $\mathbf{v}_i + c\mathbf{v}_j$? c) zamianę wektorów $\mathbf{v}_i$ i $\mathbf{v}_j$ miejscami? (Tu $1 \le i, j \le k$ i $c \in \mathbb{F}$.)

ii) A pomiędzy $[L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$ a $[L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}'}$, jeśli $\mathcal{W}'$ w podobny sposób otrzymano z $\mathcal{W}$?

4. Rozpatrujemy przestrzeń $\mathcal{M}_{2,4}$ wszystkich 2×4–macierzy rzeczywistych i jej podprzestrzeń złożoną z tych macierzy $\mathbf{A}$, dla których $a_{12} + a_{21} = 0 = a_{12} + 2a_{21} = a_{12} + 3a_{21}$. Jaki jest wymiar tej podprzestrzeni?

5. a) Jaka jest macierz rzutu $V = U \oplus W$ na U wzdłuż W w bazach $\mathcal{V}, \mathcal{V}$, gdzie $\mathcal{V} = (\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l)$, zaś $(\mathbf{u}_i)$ i $(\mathbf{w}_j)$ to bazy podprzestrzeni U i W, odpowiednio?

b) A jaka jest macierz, nadal w bazach $\mathcal{V}, \mathcal{V}$, symetrii względem U wzdłuż W?

c) Dla przekształcenia $L \in \mathcal{L}(V, W)$ i baz $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p$ przestrzeni $\ker(L)$ i $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_q$ przestrzeni $L(V)$, obierzmy bazę $\mathcal{V} = (\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_q, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p)$ przestrzeni V z dowodu lematu 1 w §5.1 pliku WEKT.pdf z mej strony, i rozszerzmy układ $(\mathbf{w}_i)_{i=1}^q$ do bazy $\mathcal{W} = (\mathbf{w}_i)_{i=1}^r$ przestrzeni W. Jaka jest macierz $[L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$?

Klucz do stopnia trudności zadań w skrypcie T. Koźniewskiego:
A podstawowe, B łatwe typowe, C łatwe uzupełniające, D trudniejsze

Rozdział 1. Wszystkie zadania A

Rozdział 2.
1: 1 C, 2 B, 3 B, 4 B2: 1 B, 2 B
3: 1 A, 2 B, 3 A
4: 1 A, 2 B, 3 B
5: 1 A, 2 B, 3 A, 4 A, 5 C, 6 D

Rozdział 3. (Przestrz. liniowe)
1: 1 B, 2 C, 3 C, 4 B
2: 1 A, 2 A, 3 A, 4 A, 5 B
3: 1 A, 2 A, 3 A, 4 B, 5 B
4: 1 A, 2 A, 3 B, 4 C, 5 C, 6 D, 7 B, 8 D, 9 D
5: 1 A, 2 A, 3 A, 4 B, 5 A, 6 A, 7 C, 8 B, 9 C
6: 1 A, 2 A, 3 A, 4 A, 5 B, 6 C,
7: 1 B, 2 C, 3 C, 4 B, 5 C,
8: 1 A, 2 A, 3 A, 4 B, 5 C, 6 B, 7 B, 8 C, 9 C

Rozdział 4. (Przekszt. liniowe)
1: 1 A, 2 A, 3 A, 4 A, 5 C
2: 1 A, 2 B, 3 C, 4 B
3: 1 A, 2 A, 3 C, 4 C
4: 1 A, 2 B, 3 A, 4 C, 5 C
5: 1 A, 2 A, 3 B, 4 C, 5 B
6: 1 A, 2 A, 3 A, 4 B, 5 C
7: 1 A, 2 B, 3 D

Rozdział 5 (Wyznaczniki etc.)
1: 1 A, 2 A, 3 B
2: 1 A, 2 B, 3 B, 4 A, 5 A, 6 C, 7 B, 8 C, 9 B, 10 D
3; 1 A, 2 A, 3 A, 4 C

Seria 23 Dobrego Nowego Roku!

Ale po nim, ponieważ zbliżamy się już do końca semestru i do kolokwium, dobrze chyba zacząć powtórkę materiału. Myślę więc w styczniu dawać, poza pisemnymi, nieliczne tylko zadania, prosząc równocześnie o przeglądanie wyznaczonych porcji zbiorów zadań. Zadania, sprawiające kłopoty, omawialibyśmy na ćwiczeniach. (Tak więc od Państwa zależy, czy i które będziemy omawiać – należy przed ćwiczeniami zadania przemyśleć, by sensownie zdecydować.)

Na pierwszy tydzień zajęć w styczniu proponuję przejrzenie

a) zadań ze skryptu T. Koźniewskiego, ze stron 22, 25, 29/30 (poza 6, 8, 10) i 35-37;

b) zadań wywieszonych na stronie A. Webera pod adresem

http://duch.mimuw.edu.pl/ aweber/zadania/gal/gaza.pdf

–w tym tygodniu z rozdziałów 4,5,6, a w szczególności zadań 4.6, 5.5, 6.5 i od 6.8 do 6.10.

Poniższe zadania są zaś pisemne (na czwartek 8 I)

1. Znaleźć jądro i obraz przekształcenia $K \in \mathcal{L}(V)$, gdy

a) $V = \mathbb{F}[x]$ i $K(f) = f - f'$, gdzie f' to pochodna wielomianu f,

b) $V = \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ i $K(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^t)$.

W obu przypadkach zbadać, czy K jest rzutem liniowym.

2. Dla największych możliwych liczb p, q, s znaleźć nieosobliwą $s \times s$ – podmacierz macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix}$, a także p liniowo niezależnych wierszy i q liniowo niezależnych kolumn macierzy $\mathbf{A}$. (Jak zawsze, odpowiedź uzasadnić!)

3. Niech $L : \mathbb{R}_7[x] \to \mathbb{R}[x]$ oznacza przekształcenie, które każdemu wielomianowi przyporządkowuje jego trzecią pochodną.

a) Dowieść, że $\{f : (x^3 + x + 1) | L(f)\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}_7[x]$ i znaleźć jej wymiar. (Tu $g|h$ oznacza „wielomian g dzieli h”.)

b) Dowieść istnienia niezerowego wielomianu $f \in \mathbb{R}_7[x]$ takiego, że jego trzecia pochodna dzieli się przez $x^3 + x + 1$, a on sam przez $x^4 + x - 2$.

Seria 22 (na 15 XII). W związku z przedświątecznym nastrojem, nie ma nowych zadań ustnych (pisemne były ogłoszone wcześniej). Proszę o przemyślenie dotychczasowych zadań i wcześniejszego materiału; jeśli są związane z tym pytania, to dobrze jest je omówić.

Wskazówka do pisemnych zadań 2 i 3: $K \in Z \Leftrightarrow \mathrm{im}(K) \subset \ker(L)$.

Seria 21 (na 15 XII, a pisemne na 17 XII).

Niech $L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem takim, że $[L] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

(To L jest wspólne dla zadań 1-3.)

1. Znaleźć a) bazę obrazu $\mathrm{im}(L)$ przekształcenia L i b) wymiar jądra $\ker(L)$ tego przekształcenia.

2. Niech $Z = \{K \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^5) : L \circ K = 0\}$. Dowieść, że Z jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^5)$ i wyznaczyć $\dim(Z)$.

3. Określić wzorem we współrzędnych kartezjańskich takie przekształcenie $K \in Z$, które ma maksymalny rząd (wśród przekształceń ze zbioru Z, określonego wyżej).

Powyższe zadania są pisemne. Proszę też o przemyślenie takich zadań ustnych:

4. a) Jakiego wymiaru jest przestrzeń Z, złożona z tych wielomianów stopnia ≤ 4, które są podzielne przez $x^2 + x + 1$?

b) Jakiego wymiaru jest jądro przekształcenia $L : \mathbb{R}_5[x] \to \mathbb{R}_4[x]$, które przyporządkowuje każdemu wielomianowi $f \in \mathbb{R}_5[x]$ jego pochodną $f' \in \mathbb{R}_4[x]$?

c) Jakiego wymiaru jest przestrzeń Y tych wielomianów $f \in \mathbb{R}_5[x]$, których pochodna jest podzielna przez $x^2 + x + 1$?

5. Jaki jest warunek konieczny i wystarczający dla istnienia przekształcenia $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ takiego, że $\mathrm{im}(L) = \ker(L)$? Gdy przekształcenie takie istnieje, określić je wzorem.

6. a) Dowieść, że $\mathrm{rk}([\mathbf{A}|\mathbf{B}]) \leq \mathrm{rk}(\mathbf{A}) + \mathrm{rk}(\mathbf{B})$, oraz

b) $\mathrm{rk}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \mathrm{rk}(\mathbf{A}) + \mathrm{rk}(\mathbf{B})$ gdy suma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ istnieje. (Użyć a).)

7. a) Dowieść, że gdy T jest zbiorem skończonym, a funkcje $f_1, ..., f_n : T \to \mathbb{F}$ są liniowo niezależne w przestrzeni $\mathbb{F}^T$, to istnieje n–elementowy zbiór $T_0 \subset T$ taki, że obcięcia tych funkcji do T_0 są liniowo niezależne.

b)* Dowieść tego dla nieskończonego zbioru T.

Seria 20 (na 10 XII).

Zadania pisemne były sformułowane w poprzedniej serii. (W zadaniu 4 jest jednak poprawka–w jednym miejscu było L zamiast K; teraz jest dobrze.) Proszę też o przemyślenie następujących zadań ustnych:

5. Niech $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ i $\mathcal{W} = (\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l)$ będą bazami przestrzeni V i W, odpowiednio. Na ćwiczeniach ustalono, że bazą przestrzeni $\mathcal{L}(V, W)$ jest zbiór $\{L_{ij} : 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq k\}$, gdzie L_{ij} jest przekształceniem takim, że $[L_{ij}]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} = \mathbf{E}_{ij} \in \mathcal{M}_{l,k}$.

a) Podać wzór na przekształcenie L_{ij}.

b) Ustalić, jaka jest macierz $[L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$, jeśli znane są współczynniki c_{ij} w przedstawieniu $L = \sum_{i,j} c_{ij} L_{ij}$.

6. Dokończyć rozwiązywanie zadania 7 z poprzedniej serii.

Seria 19 (na 8 XII, a pisemne na 10 XII).

Zadania 1-4 są pisemne (na czwartek 10 XII).

W zadaniach 1-3 znaleźć bazy i wymiary podprzestrzeni $V_1 \cap V_2$ i $V_1 + V_2$, gdy

1. $V_1 = \mathrm{lin}(2,1,3,4),(3,9,3,9),((-1,7,-3,1)),\ V_2 = \mathrm{lin}((1,-3,3,0),(2,5,3,5),((1,8,0,5))$

2. $V_1 = \mathrm{lin}((3,2,1,0),(4,3,0,2),(1,2,2,-3))$, a V_2 jest zbiorem rozwiązań układu równań $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 5x_4 = 0$.

3. V_1 i V_2 to zbiory rozwiązań układów $2x_1+x_2-x_3+4x_4 = 0,\ 3x_1-x_2+2x_3+x_4 = 0$ (dla V_1) i $-x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0,\ 2x_2 - 4x_2 + 10x_3 - 6x_4 = 0$ (dla V_2).

4. Niech przekształcenie $K \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ma w bazach $\mathcal{V} = ((1,1,0),(0,1,1),(1,2,0))$, $\mathcal{W} = ((1,2),(1,3))$ macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, i niech $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane wzorem $L(x,y) = (x-y, x+2y)$.

a) Znaleźć ciąg współrzędnych $[L(K(\mathbf{v}))]_{\mathcal{W}}$ wiedząc, że $[\mathbf{v}]_{\mathcal{V}} = (2,1,1)$.

b) Zbadać, czy istnieje przekształcenie $K_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ takie, że $K \circ K_1$ jest identycznościowym przekształceniem przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Jeśli K_1 istnieje, zadać je wzorem (we współrzędnych kartezjańskich).

5. Niech $K \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ będzie zadane wzorem $K(x,y) = (x,y,0)$. Zbadać, dla jakich wektorów $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ istnieje przekształcenie $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ takie, że $L \circ K = 0$ i $\mathrm{im}(K \circ L) = \mathrm{lin}(\mathbf{v})$.

6. Niech $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, gdzie V to przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{F}$, skończonego wymiaru. Dowieść istnienia funkcji liniowej $\ell : V \to \mathbb{F}$ takiej, że $\ell(\mathbf{v}) = 1$. (Wskazówka: posługując się twierdzeniem z ostatniego wykładu o możliwości przedłużania przekształceń liniowych, sprowadzić zadanie do przypadku, gdy $V = \mathrm{lin}(\mathbf{v})$.)

7. Niech V_1, V_2, V_3 będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Dowieść, że jeśli $V_1 \subset V_2$, to $V_2 \cap (V_1 + V_3) = V_1 + V_2 \cap V_3$.

Seria 18 (na 3 XII)

Zadania pisemne ogłoszone były w poprzedniej serii. Proszę też o przemyślenie następujących zadań ustnych:

1. a) Zauważyć, że gdy podprzestrzenie U i W przestrzeni $\mathbb{F}^k$ są zadane w postaci uwikłanej, to łatwo tak zadać i $U \cap W$. (Natomiast nie byłoby tak, jeśliby „uwikłanej" zastąpić przez „parametrycznej".)

b) W oparciu o a) obmyśleć sposób znajdywania bazy w $U \cap W$, w zależności od tego, jak zadano każdą z przestrzeni U i W.

2. Niech macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{l,k}$ będą wierszowo równoważne. Dowieść, że:

a) Macierz $\mathbf{A}$ ma tę samą przestrzeń wierszy, co $\mathbf{B}$.

b) Jeśli kolumny macierzy $\mathbf{A}$ o numerach $k_1, ..., k_s$ są liniowo niezależne, to jest tak i dla macierzy $\mathbf{B}$.

<u>Seria 17 (na 1 XII, a pisemne na 3 XII)</u>

1. Dla zbiorów $A_1, ..., A_k \subset V$ przyjmijmy $\sum_{i=1}^k A_i := \{\mathbf{v}_1 + ... + \mathbf{v}_k : \mathbf{v}_1 \in A_1, ..., \mathbf{v}_k \in A_k\}$. Dowieść, że

a) $\mathrm{lin}(A \cup B) = \mathrm{lin}(A) + \mathrm{lin}(B)$, skąd $\mathrm{lin}(A \cup B) = \mathrm{lin}(A' \cup B)$ gdy $\mathrm{lin}(A) = \mathrm{lin}(A')$.

b) Jeśli $V_1, ..., V_k$ są podprzestrzeniami, to $\mathrm{lin}(V_1 \cup ... \cup V_k) = \sum_{i=1}^k V_i$.

<u>Zbiór</u> $A \subset V$ nazywamy liniowo zależnym, jeśli istnieją wektory $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in A$ i skalary $c_1, ..., c_k$, nie wszystkie równe 0, dla których $\sum_i c_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$.

2. Niech $L \in \mathcal{L}(V, W)$ i niech $A \subset V$. Udowodnić, że

a) Jeśli zbiór A jest liniowo zależny, to $L(A)$ też.

b) Implikacja przeciwna jest słuszna gdy $\ker(L) = \{\mathbf{0}\}$.

c) Ma miejsce równość $L(\mathrm{lin}(A)) = \mathrm{lin}(L(A))$.

3. Niech V będzie k–wymiarową przestrzenią nad ciałem skończonym, liczącym q elementów.

a) Ile jest wektorów w przestrzeni V? A ile w jej s–wymiarowej podprzestrzeni?

b) Dla $s = 1, ..., k$, ile jest liniowo niezależnych układów $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_s)$?

c) A ile jest s–wymiarowych podprzestrzeni przestrzeni V, dla s j.w.?

Wskazówka: zauważyć, że układ $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^{s+1}$ jest liniowo niezależny $\Leftrightarrow$ układ $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^{s}$ jest taki i $\mathbf{v}_{s+1} \notin \mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., v_s)$; wykorzystać a) do wyznaczenia mocy zbioru $\mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_s)$.

Poniższe zadania są pisemne (na 3 XII)

1. Oznaczmy przez $\mathcal{M}_2$ przestrzeń 2×2–macierzy rzeczywistych, a przez $\mathcal{V}$ jej bazę $(\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22})$. (Macierz $\mathbf{E}_{ij}$ ma jedynkę w miejscu ij–tym, a poza nim zera.) Dla macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ i przekształcenia $L : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ zadanego wzorem $L(\mathbf{X}) = \mathbf{XA}$ wyznaczyć $[L]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}$.

2. Niech dla bazy $\mathcal{V} = (1, x, x^2)$ przestrzeni $V = \mathbb{R}_2[x]$ i przekształcenia $L \in \mathcal{L}(V, V)$

zachodzi $[L]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dowieść, że $\mathcal{W} := (3x^2+2x+1, x^2+3x+2, 2x^2+x+3)$ jest bazą przestrzeni V i wyznaczyć $[L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}$.

3. Dowieść, że istnieje jedyne przekształcenie $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, przeprowadzające $(1,1,1)$ na $(1,1,1)$, $(0,1,0)$ na $(0,1,0)$ i $(1,0,2)$ na $(1,0,1)$. Wyznaczyć to przekształcenie wzorem (we współrzędnych kartezjańskich).

4. Niech $\mathcal{V} = ((1,0,1,0),(0,1,1,1),(0,1,1,0),(1,1,1,1))$ i $\mathcal{W} = ((5,4),(4,3))$, i niech przekształcenia $K \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ i $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$ będą zadane warunkami

$$K(x,y,z) = (3x-y-2z, 3x+4y+z, 5x+2z, x+y+z), \quad [L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Znaleźć wzór na $L \circ K$ we współrzędnych kartezjańskich.

Seria 16 (na 26 XI)

1. Zadanie pisemne sformułowane w poprzedniej serii; patrz też uwaga po nim. (Zadanie to ma 4 części, każde punktowane jako oddzielne zadanie.)

Proszę o przemyślenie następujących zadań ustnych:

2. Dokończyć rozwiązywanie zadania z ćwiczeń: jeśli $K \in \mathcal{L}(U,V)$ i $L \in \mathcal{L}(U,W)$, przy czym $\ker(K) \subset \ker(L)$, to $L = S \circ K$ dla pewnego przekształcenia $S \in \mathcal{L}(K(U),W)$.

(Przypominam, że pozostała do udowodnienia taka własność: jeśli dla danego wektora $\mathbf{v} \in K(U)$ obierzemy wektor $\mathbf{u} \in U$ tak, by $K(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$, to wartość $S(\mathbf{v}) := L(\mathbf{u})$ nie zależy od dokonanego wyboru.)

3. Przypomnieć sobie, jak możemy tworzyć bazę przestrzeni rozwiązań układu równań jednorodnych, i jak z postaci zredukowanej macierzy tego układu odczytać wymiar przestrzeni rozwiązań.

Seria 15 (na 24 XI, a pisemne na 26 XI)

1. Rozpatrzmy operator różniczkowania $L : \mathbb{R}^4[x] \to \mathbb{R}^4[x]$, zadany wzorem $L(f) = f'$ (pochodna wielomianu f).

a) Wyznaczyć macierz $[L]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}$, gdzie $\mathcal{V} = (1, x, x^2, x^3, x^4)$.

b) Sprawdzić prawdziwość tożsamości $[L]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}[f]_{\mathcal{V}} = [L(f)]_{\mathcal{V}}$ dla $f \in \mathbb{R}_4[x]$.

2. a) Niech $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ i $(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l)$ będą bazami przestrzeni V i W, odpowiednio. Dowieść, że układ $(\mathbf{v}_1, \mathbf{0}), ..., (\mathbf{v}_k, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, \mathbf{w}_1), ..., (\mathbf{0}, \mathbf{w}_l)$ jest bazą przestrzeni $V \times W$.

b) Wyznaczyć wzór na $\dim(V_1 \times ... \times V_n)$ dla przestrzeni $V_1, ..., V_n$, posiadających bazy skończone.

3. Dowieść, że przestrzeń rzeczywista $\mathbb{R}[x]$ nie ma bazy skończonej.

4. Dowieść, że baza $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ przestrzeni rzeczywistej V pozostaje też bazą jej „kompleksyfikacji", opisanej w zadaniu 2 serii 11. (Ta kompleksyfikacja jest przestrzenią zespoloną.)

Poniższe zadanie jest pisemne (na 26 XI); każda jego część będzie traktowana jako oddzielne zadanie (do 3p.).

1. a) Niech $\mathbf{v}_1 = (1,1,1), \mathbf{v}_2 = (1,1,0), \mathbf{v}_3 = (1,0,0)$ i $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Wyznaczyć współrzędne, względem bazy $\mathcal{V}$, wektora $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$.

Określmy następnie przekształcenie $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wzorem $L(x,y,z) = (2y+x, x-4y, 3x)$, i dla danych baz $\mathcal{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ i $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oznaczmy przez $\mathbf{C}$ macierz, której j–tą kolumną jest ciąg $[L(\mathbf{a}_j)]_{\mathcal{B}}$ współrzędnych wektora $L(\mathbf{a}_j)$ względem bazy $\mathcal{B}$. W każdym z poniższych przypadków wyznaczyć macierz $\mathbf{C}$ i bezpośrednio sprawdzić prawdziwość tożsamości $\mathbf{C}[\mathbf{w}]_{\mathcal{A}} = [L(\mathbf{w})]_{\mathcal{B}}$ dla $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$:

b) $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{V}$ (baza zdefiniowana wyżej),
c) $\mathcal{A} = \mathcal{V},\ \mathcal{B} = \mathcal{E}$ (baza standardowa)
d) $\mathcal{A} = \mathcal{E}, \mathcal{B} = \mathcal{V}$.

Seria 14 (na 19 XI)

W związku z kolokwium, nie ma dalszych zadań pisemnych, poza podanymi w serii 13.

Proszę też o przemyślenie następujących zadań ustnych:

1. W zadaniu 3 z serii 13 przyjmijmy $s = t = 1$. Podać bazę przestrzeni $L_{1,1}^{-1}(\mathbf{0}) := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : L_{1,1}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$.

2. a) Niech wielomiany $f_0, ..., f_n \mathbb{F}[x]$ spełniają warunek $\deg(f_i) = i$ dla $i = 0, 1, ..., n$. Dowieść, że tworzą one bazę przestrzeni $\mathbb{F}_n[x]$.

b) Obmyśleć sposób wyznaczenia współrzędnych wielomianu f w tej bazie, gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ i $f_i = (x-a)^i$ dla $i = 0, ..., n$.

Seria 13 (na 17 XI, a pisemne na 19 XI)

Poniżej, U, V, W to przestrzenie liniowe nad tym samym ciałem skalarów.

1. Dowieść, że:

a) Złożenie przekształceń $L \circ K$ liniowych $K : U \to V$ i $L : V \to W$ jest przekształceniem liniowym z U do W.

b) Odwrotność izomorfizmu liniowego $L : V \to W$ jest izomorfizmem liniowym

2. Dowieść, że gdy $K_1, K_2 \in \mathcal{L}(U,V)$ i $L \in \mathcal{L}(V,W)$, to $L \circ (K_1 + cK_2) = L \circ K_1 + c(L \circ K_2)$ dla $c \in \mathbb{F}$. ($\mathcal{L}(X,Y)$ to zbiór przekształceń liniowych z X do Y. Przekształcenia dodajemy i mnożymy przez skalar jak opisano na wykładzie.)

3. Dla $s, t \in \mathbb{R}$ oznaczmy przez $L_{s,t} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ przekształcenie liniowe, dane wzorem $L_{s,t}(x, y, z) = (sx + ty + tz, tx + sy + sz, tx + ty + sz)$.

a) Zbadać, dla jakich par (s, t) przekształcenie to ma odwrotność $L_{s,t}^{-1}$.

b) Jeśli ta odwrotność istnieje dla $s = 1, t = 2$, wyrazić ją wzorem.

Zadania pisemne (na 19 XI).

1. Znaleźć współrzędne wektora $\mathbf{v} \in V$ w bazie $\mathcal{V}$ i uzasadnić, że $\mathcal{V}$ jest bazą, gdy

a) $V = \mathbb{R}^2,\ \mathbf{v} = (1, 1),\ \mathcal{V} = ((1, -1), (-2, 3))$;

b) $V = \mathbb{R}_2[x],\ \mathbf{v} = 1 + x + x^2,\ \mathcal{V} = (x + x^2, x - x^2, 1 + x)$.

2. Wyznaczyć bazę i wymiar poniższych przestrzeni rzeczywistych V; uzasadnić też, że mamy do czynienia z bazą:

a) $V = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{10} : v_1 = v_{10} \text{ i } v_2 = 2v_3\}$.

b) $V = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(\mathbf{A}) = 0\}$.

Seria 12 na 12 XI)

Poniższe zadanie proszę przyjąć jako zadanie pisemne, prócz podanych wcześniej zadań 1 i 2.

1. Przedstawić macierz $\mathbf{A}$ w postaci iloczynu macierzy elementarnych, opowiadających wierszowym operacjom elementarnym typów I i II, gdy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Uwaga 1. Jeśli to wygodne, można w rachunkach dotyczących powyższego zadania wykorzystać zadanie następujące

2. Dowieść, że gdy na macierzy jednostkowej $\mathbf{I}_k$ wykonano jedną wierszową operację elementarną e, otrzymując macierz $\mathbf{E}$, to w wyniku wykonania na $\mathbf{I}_k$ operacji odwrotnej do e otrzymamy macierz $\mathbf{F}$ taką, że $\mathbf{EF} = \mathbf{FE} = \mathbf{I}_k$. (Patrz zadanie 3 w serii 7.)

3. W zadaniu 5 poprzedniej serii, uzyskać część c) w oparciu o b) i twierdzenie, że część wspólna rodziny podprzestrzeni jest podprzestrzenią.

Zadania 2 i 3 są do przemyślenia jako ustne.

Seria 11 (zadania pisemne 1 i 2 na 12 XI, a pozostałe proszę przemyśleć na 10. XI.)

1. Rozpatrujemy następujący układ równań nad $\mathbb{R}$, w którym $a, b \in \mathbb{R}$:

$3x - 2y + z = b$

$5x - 8y + 9z = 3$

$2x + y + az = -1$
Zbadać, dla jakich wartości a i b zbiór rozwiązań jest a) zbiorem skończonym, b) nieskończonym, c) pustym. W pierwszych dwóch przypadkach podać rozwiązanie ogólne.

2. Udowodnić stwierdzenie z wykładu: jeśli V jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$, to zbiór wyrażeń $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$, gdzie $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, tworzy przestrzeń nad $\mathbb{C}$, gdy działania w niej określić wzorami $(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) + (\mathbf{u}' + i\mathbf{v}') := \mathbf{u} + \mathbf{u}' + i(\mathbf{v} + \mathbf{v}')$ oraz $(a + bi)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) := a\mathbf{u} - b\mathbf{v} + i(b\mathbf{u} + a\mathbf{v})$.

3. Nazwijmy **elementarną** każdą macierz $\mathbf{E}$, otrzymaną z macierzy jednostkowej przez wykonanie jednej wierszowej operacji elementarnej. Z twierdzenia z wykładu wynika, że pomnożenie macierzy $\mathbf{A}$ z lewej strony przez $\mathbf{E}$ skutkuje wykonaniem odpowiadającej $\mathbf{E}$ operacji na $\mathbf{A}$.
a) Sprawdzić to bezpośrednio, wykonując mnożenie.
b) Sprawdzić, że gdy $\mathbf{E}$ jest macierzą elementarną, to $\mathbf{E}^t$ też.

4. Pierścień $\mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ jest też przestrzenią wektorową nad $\mathbb{F}$, bo określone jest mnożenie macierzy przez skalar, spełniające (wraz z dodawaniem macierzy) wymagane warunki. Zbadać, które z poniższych zbiorów macierzy stopnia k są podprzestrzenią tej przestrzeni:
a) zbiór macierzy symetrycznych;
b) zbiór macierzy diagonalnych;
c) zbiór macierzy odwracalnych;
d) zbiór macierzy, które nie są odwracalne;
e) zbiór macierzy przemiennych z daną macierzą;
f) zbiór macierzy przemiennych ze wszystkimi $k \times k$–macierzami.

5. Zbadać, które z poniższych zbiorów funkcji są podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ wszystkich funkcji $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) zbiór funkcji, przyjmujących w danym punkcie ustaloną wartość $a \neq 0$;
b) zbiór funkcji, przyjmujących w danym punkcie wartość 0;
c) zbiór funkcji, zerujących się na danym zbiorze $S \subset \mathbb{R}$;
d) zbiór funkcji, mających tylko skończenie wiele punktów nieciągłości.
e) zbiór funkcji, zerujących się poza zbiorem skończonym (zależnym od funkcji).

Seria 10 (na 5 XI)

Przepraszam, chyba omyliłem się wypisując macierze w zadaniu 3b1) poprzedniej serii (które jest zadaniem pisemnym w tej). Proszę przyjąć w nim

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Tak więc zadania pisemne to:

1. = drugie z serii 9,

2. = 3b1),b2) z serii 9 (z powyższą zmianą),

3. = 4b) z serii 9, oraz następującego

4. Niech $\mathbf{v}_1 = (0,0,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{v}_3 = (1,0,1,0)$, $\mathbf{v}_4 = (2,1,3,2)$.
Ustalić, czy wektory te są liniowo zależne, a jeśli są, to znaleźć współczynniki c_i, nie wszystkie równe 0, dla których $\sum c_i\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, a także wyrazić jeden z wektorów $\mathbf{v}_i$ jako kombinację pozostałych.

Proszę też o przemyślenie następującego zadania ustnego:

5. Z macierzy $\mathbf{A}$ w wyniku wykonania ciągu kolumnowych operacji elementarnych otrzymano macierz jednostkową. Czy macierz $\mathbf{A}$ jest odwracalna, a jeśli tak, to w jaki sposób otrzymać $\mathbf{A}^{-1}$?

Seria 9 (na 3 XI, a zadania pisemne na 5 XI)
Pisemne są zadania 2, 3b1,b2), 4b); jedno jeszcze dodam we wtorek.

1. Rozpatrzmy przekształcenie liniowe $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, zadane wzorem

$$L(x,y,z) = (3x+4y+2z, x+2y, 2x+y+3z, -x+5y-7z)$$

i) Zbadać, czy któryś z wektorów $(9,3,6,-3)$ i $(0,0,0,1)$ (a jeśli tak, to który) leży w obrazie $\mathrm{im}(L)$ przekształcenia L.

ii) Znaleźć układ jednorodnych równań liniowych, opisujący ten obraz (tzn. taki układ, którego zbiór rozwiązań jest równy $\mathrm{im}(L)$).

iii) Zbadać, czy wektory $L(\mathbf{e}_1), L(\mathbf{e}_2), L(\mathbf{e}_3)$ są liniowo niezależne.

iv) Zbadać, czy $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ dla pewnego niezerowego wektora $\mathbf{v}$, i czy przekształcenie L jest różnowartościowe.

2. To samo, przy $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zadanym wzorem
$L(x,y,z,t) = (4x+2y+10z, x+3y-5t, 2x+y+5z, -3x-9y+15t)$.

3. Dla poniższych par macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ rozwiązać równania macierzowe $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ (gdy rozwiązanie jest niejednoznaczne, wyrazić je w zależności od parametrów):

a1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^t$ a2) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

b1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ b2) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$

4. Podać układ fundamentalny rozwiązań $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_s$ i rozwiązanie ogólne $\mathbb{F}^s \ni (c_1, ..., c_s) \mapsto c_1\mathbf{w}_1 + ... + c_s\mathbf{w}_s$ dla układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, gdy ciałem skalarów $\mathbb{F}$ jest i) ciało $\mathbb{C}$ liczb zespolonych, ii) ciało $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych. Za $\mathbf{A}$ przyjmujemy

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & -7 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 10 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ -3 & -9 & 0 & 15 \end{bmatrix}$

5. a) Udowodnić, że przy pomocy elementarnych operacji na wierszach i kolumnach można każdą macierz kwadratową przeprowadzić w taką, która ma niezerowe wyrazy tylko na przekątnej, i są one równe 1. (Mogą pojawiać się i zera na przekątnej.)

b) Jaki jest odpowiednik tej tezy dla macierzy, które nie są kwadratowe?

Seria 8 (na 29 X)

Poniższe zadania są pisemne

1. Rozwiązać równanie $z^4(\overline{z})^2 = i|z|^2/16$.

2. Naszkicować zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z^3) < \mathrm{Re}(z^3)\}$.

3. Jest to zadanie 4b) z poprzedniej serii.

4. Jest to zadanie 5b) z poprzedniej serii.

5. Niech układ wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ przestrzeni $\mathbb{F}^k$ będzie liniowo niezależny (tzn. jeśli skalary c_i spełniają warunek $\sum_{i=1}^4 c_i\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, to $c_1 = ... = c_4 = 0$.) Czy jest to prawdą w odniesieniu do układu

a) $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$, gdzie $\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$, $\mathbf{w}_2 = 2\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4$, $\mathbf{w}_3 = 3\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 + 3\mathbf{v}_4$,

b) $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4$, gdzie $\mathbf{w}_4 = 8\mathbf{v}_1 + 11\mathbf{v}_2 + 6\mathbf{v}_3 + 6\mathbf{v}_4$, a pozostałe $\mathbf{w}_i$ są jak wyżej?

Seria 7 (na 27 X)

Definicja. Dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ i dla $p = a_0 + a_1x + ...a_sx^s \in \mathbb{F}[x]$ przyjmijmy

$$p(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{I}_k + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + ... + a_s\mathbf{A}^s$$

1. Wyznaczyć $p(\mathbf{A})$, gdy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $p = x^2 - (a+d)x + ad - bc$.

2. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ i $p, q \in \mathbb{F}[x]$. Dowieść, że:

a) $(p(\mathbf{A}))^t = p(\mathbf{A}^t)$.

b) Jeśli $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, to $p(\mathbf{A})q(\mathbf{B}) = q(\mathbf{B})p(\mathbf{A})$.

c) $(pq)(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A})q(\mathbf{A})$ i analogicznie dla iloczynu większej liczby wielomianów.

3. a) Wykazać, że do zadanej operacji elementarnej istnieje przeciwna i opisać ją. (Dwie operacje elementarne nazwiemy wzajemnie przeciwnymi, jeśli wykonanie na dowolnej macierzy $\mathbf{A}$ wpierw jednej z nich, a potem drugiej na otrzymanej macierzy $\mathbf{A}'$, w dowolnej kolejności, da wyjściową macierz $\mathbf{A}$.)

b) Otrzymać operację typu (III) (zamiany wierszy) poprzez wykonanie kolejno kilku operacji pozostałych dwóch typów.

4. Rozwiązać podane równania, przy czym rozwiązanie ogólne dać tak w postaci uwidaczniającej zależność niewiadomych prowadzących od wtórnych, jak i w postaci kombinacji liniowych ustalonych wektorów.

a) $$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 3 & 2 \\ -12 & -3 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ \lambda & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

5. Wyznaczyć wszystkie liczby λ, dla których wektor $\mathbf{b}$ jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ (tzn. $\mathbf{b} = \sum_i c_i \mathbf{a}_i$, gdzie $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$), gdy

a) $\mathbf{a}_1 = (2,3,5)$, $\mathbf{a}_2 = (3,7,8)$, $\mathbf{a}_3 = (1,-6,1)$, $\mathbf{b} = (7,-2,\lambda)$

b) $\mathbf{a}_1 = (3,2,5)$, $\mathbf{a}_2 = (2,4,7)$, $\mathbf{a}_3 = (5,6,\lambda)$, $\mathbf{b} = (1,3,5)$

Seria 6 (na 22 X)

1. Wykazać, że $x^n - 1 = (x-1)\prod_{2k<n}(x^2 - 2x\cos(\frac{2k\pi}{n}) + 1)$ dla nieparzystych n. (W razie trudności rozpatrzeć przypadek $n = 7$, wraz rysunkiem.)

2. Niech $a, b, c \in \mathbb{C}$ traktowane będą jako wierzchołki trójkąta. Dowieść, że trójkąt ten wtedy i tylko wtedy jest równoboczny, gdy $(a-b)^2 = (b-c)(c-a) \neq 0$. (Wskazówka: $c = a + (b-a)u$ dla pewnego u.)

3. Dla $a, b \in \mathbb{C}$ oznaczmy przez $\mathbf{Q}(a,b)$ 2×2–macierz zespoloną o pierwszej kolumnie (a,b) i drugiej $(-\overline{b}, \overline{a})$. Niech $\mathbb{H}' := \{\mathbf{Q}(a,b) : \ a, b \in \mathbb{C}\}$. Dowieść, że:

a) Zbiór $\mathbb{H}'$ jest zamknięty tak względem mnożenia macierzy, jak i ich dodawania.

b) Każdy element $\mathbb{H}' \setminus \{\mathbf{0}\}$ jest odwracalny w $\mathbb{H}'$ i odwrotnością $\mathbf{Q}(a,b)$ jest $\frac{1}{|a|^2+|b|^2}\mathbf{Q}(\overline{a}, -b)$.

c) Każdą macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{H}'$ można w dokładnie jeden sposób przedstawić w postaci $\mathbf{A} = t\mathbf{I} + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, gdzie $t, x, y, z \in \mathbb{R}$, a macierze $\mathbf{i}, j, k$ zostały zdefiniowane w poprzedniej serii.

4. * Niech $\mathbf{D}$ będzie $k \times k$ macierzą diagonalną, o parami różnych wyrazach na (głównej) przekątnej. Dowieść, że każda macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$, której przekątna jest zerowa, jest postaci $\mathbf{BD} - \mathbf{DB}$ dla pewnej macierzy $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$.

Poniższe zadanie jest pisemne, wraz z trzema podanymi w poprzedniej serii. Termin oddania: 22 X na początku ćwiczeń. Proszę numerować to zadanie jako czwarte z zadań pisemnych (a pozostałe zgodnie z numerami z serii 5).

5. a) Niech $\mathbf{D}$ będzie $k \times k$ –macierzą diagonalną, której wyrazy stojące na przekątnej są parami różne i różne od zera. Znaleźć wszystkie macierze $\mathbf{A}$ takie, że $\mathbf{AD} = \mathbf{DA}$.

b) Dowieść, że tylko macierze skalarne (tzn. postaci $c\mathbf{I}_k$, gdzie $c \in \mathbb{F}$) są przemienne z każdą macierzą $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$.

Seria 5

1. Rozpatrzmy macierze zespolone

$$\mathbf{i} := \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} := \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Dowieść, że $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{I_2}$ oraz $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$

b) Dowieść, że macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, przemienna z każdą z macierzy $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, jest skalarna (tzn. $\mathbf{A} = c\mathbf{I}_2$, dla pewnej liczby $c \in \mathbb{C}$).

2. Dla kwadratowej macierzy $\mathbf{X}$ przyjmijmy $\mathrm{tr}(\mathbf{X}) := \sum_i x_{ii}$.

a) Dowieść, że gdy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ i $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{k,l}(\mathbb{F})$, to macierze $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{BA}$ istnieją i $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$.

b) Dowieść, że gdy $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{F})$, to

$$\mathrm{tr}(\mathbf{B})\mathbf{A} + \mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathbf{B} - \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = (\mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathrm{tr}(\mathbf{B}) - \mathrm{tr}(\mathbf{AB}))\mathbf{I}.$$

3. Dowieść, $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$, tzn. że gdy jedna ze stron tej równości jest zdefiniowana, to druga też i równość ma miejsce. (Tu $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są macierzami nad tym samym ciałem.)

4. Rozłożyć na czynniki kwadratowe i liniowe wielomian $x^7 - x \in \mathbb{R}[x]$.

Uwaga: poniższe zadania są pisemne i będą zbierane 22 X na początku ćwiczeń. Podaję je już teraz, by nie brało czasu na zapisanie rozwiązań i by zdążyć omówić ewentualne wątpliwości (lecz nie rozwiązania!) we wtorek. (Dołożę też wtedy jedno lub dwa dalsze.)

1. Znaleźć postaci trygonometryczne pierwiastków stopnia 4 z liczby $-9i$.

2. Rozłożyć w $\mathbb{F}[x]$ na czynniki najniższych stopni następujące wielomiany:

a) $x^4 + 4$, przy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$;

b) $x^4 + 4$, przy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$;

c) $x^4 + 3x^2 + 9$, przy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

3. Niech $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z < \mathrm{Im} z\}$ i niech funkcje $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będą zadane wzorami $f(z) = (\sqrt{3} + i)z^3 + 2i$, $g(z) = (z + 3)^3$. Naszkicować zbiory $f(D)$ i $g^{-1}(D)$.

Seria 4 (na 15 X). Jest to seria zadań pisemnych; prace należy oddawać na początku ćwiczeń. Proszę o zapisywanie objaśnień, umożliwiających zrozumienie rozwiązania!

1. W każdym z poniższych przypadków zobrazować na płaszczyźnie zbiór punktów odpowiadających liczbom zespolonym z, dla których:
a) $|z + 3 + 4i| \leq 5$
b) $|\arg(z)| < \pi/6$
c) $2 < |z - 2i| \leq 3$.

2. Przy $p = 1 + i$, $q = 4 + 5i$, wyznaczyć kolejno:
a) punkt $z \in \mathbb{C}$ taki, że trójkąt pqz jest równoboczny (są dwie możliwości);
b) punkt $u \in \mathbb{C}$, leżący na odcinku pz w odległości 1 od punktu p.

3. Udowodnić, że jeśli $|u| < 1$ i $|v| < 1$, to $|u + v| < |1 + u\overline{v}|$.

4. Udowodnić, że jeśli $|z| = 1$ i $z \neq 1$, to liczba $w = \frac{z+1}{z-1}$ jest czysto urojona, oraz że implikacja przeciwna też ma miejsce. (Wskazówka: badać, kiedy $w = -\overline{w}$.)

5. Niech $z = -1 + i\sqrt{3}$, a liczba n będzie podzielna przez 3. Obliczyć z^n korzystając ze wzoru Newtona i ze wzoru de Moivre'a, i podać otrzymane tożsamości.

Seria 3 (na 13 X)

Ta seria jest „teoretyczna", zadania rachunkowe będą na czwartek. Można sięgać do literatury!

1. Dowieść, że w każdym ciele $\mathbb{F}$:

a) wykonywalne jest odejmowanie, tzn. dla $a, b \in \mathbb{F}$ istnieje w $\mathbb{F}$ dokładnie jedno rozwiązanie równania $a + x = b$;

b) wykonywalne jest dzielenie przez elementy niezerowe, tzn. gdy $a, b \in \mathbb{F}$ i $a \neq 0$, to w $\mathbb{F}$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania $a \cdot x = b$;

c) istnieje tylko jeden element neutralny względem dodawania i tylko jeden element neutralny względem mnożenia.

2. Dowieść, że każde ciało liczbowe jest nieskończone.

3. Dowieść, że $\mathbb{Z}_n$ z działaniami określonymi na wykładzie jest pierścieniem przemiennym z jedynka, i że jest on ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n jest pierwsza.

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i dla $k = 0, ..., n - 1$ niech liczby $\varepsilon_k \in \mathbb{C}$ będą dane w postaci biegunowej wzorami $\mathrm{Arg}(\varepsilon_k) = k\frac{2\pi}{n}$ i $|\varepsilon_k| = 1$, dla $k = 0, ..., n - 1$. (Są to więc rozpatrywane na ćwiczeniach wierzchołki n–kąta foremnego, którego 1 jest jednym z wierzchołków, i wpisanego w okrąg jednostkowy $|z| = 1$.) Są one pierwiastkami wielomianu $x^n - 1$ (wzory de Moivre'a!) i są to wszystkie pierwiastki, bo jest ich n i $n = \deg(f)$.

4. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne dla $z \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$:
a) $z^n = 1$ i $z^l \neq 1$ dla $1 \leq l < n$;
b) $z = \varepsilon_k$ dla liczby k względnie pierwszej z n;
c) $\{z^l : l = 0, 1, ..., n-1\} = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}\}$.

5. Dowieść, że iloczyn wszystkich pierwiastków z 1 stopnia $n \geq 2$ jest równy $(-1)^{n-1}$, a suma jest równa 0. (Wskazówka: wzory Viety.)

Seria 2 (na 8 X)

1. Naszkicować zbiory tych punktów płaszczyzny $\mathbb{C}$, które spełniają zależności
a) $|\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Re}(z)| < 1$,
b) $1 \leq |z - 2i| < 2$,
c) $|z - 2| = \mathrm{Re}(z) + 2$.

2. Dowieść, że jeśli $|u| = |v|$ i $u \neq v$, to istnieją dokładnie 2 liczby zespolone z takie, że $|z - u| = |z - v|$ i $|z| = 1$. Podać interpretację geometryczną i sposób wyznaczenia.

3. a) Dowieść tożsamości $(|u_1|^2 + |u_2|^2)(|v_1|^2 + |v_2|^2) = |u_1v_1 - u_2\overline{v_2}|^2 + |u_1v_2 + u_2\overline{v_1}|^2$.
b) Wywnioskować, że jeśli każda z liczb naturalnych k, l jest sumą 4 kwadratów liczb całkowitych, to i kl jest taką sumą.

4. Rozpatrzmy równanie $a|z|^2 + \mathrm{Re}(uz) + b = 0$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ i $u \in \mathbb{C}$ są dane.
a) Dowieść, że opisuje ono prostą gdy $a = 0$ i $u \neq 0$, zaś okrąg, punkt lub $\emptyset$ gdy $a \neq 0$.
b) Dowieść, że każdą prostą i każdy okrąg można opisać równaniem takiej postaci.

5. a) Dowieść, że $\cos(n\alpha)$ można wyrazić jako funkcję wielomianową od $\cos(\alpha)$. (Liczna naturalna n jest ustalona i wielomian może tylko od niej zależeć.)
b) Wyznaczyć ten wielomian dla $n = 4$.

Seria 1 (na 6 X)

1. Obliczyć wartość wyrażeń
a) $\left(\frac{\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha}{\cos \alpha + i \sin \alpha}\right)^{30}$ dla $\alpha = \pi/5$
b) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$

2. Udowodnić, że gdy $|z| < 2$, to $|z^2 - z + i| < 7$ oraz $1 < |z^2 - 5| < 9$.

3. Dowieść, że $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$ dla $u, v \in \mathbb{C}$.

4. Dowieść, że gdy $|z| = 1$ i $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$, to $z^{10} + \frac{1}{z^{10}} = 2\cos(10\alpha)$. (Wskazówka: użyć biegunowego przedstawienia liczby z.)

5. * Dowieść w oparciu o równość $i^2 = -1$, że w zbiorze $\mathbb{C}$ nie można określić relacji $<$ spełniającej oba poniższe warunki:
a) dla każdych $z, z' \in \mathbb{C}$ zachodzi $z < z'$ lub $z = z'$ lub $z > z'$, i możliwości te wykluczają się wzajemnie, oraz
b) jeśli $z > 0$ i $z' > 0$, to $zz' > 0$ i $z + z' > 0$.