Egzamin z GAL II, termin 2 (potok II). 31 VIII 2010r.

Na każdej oddanej kartce należy wpisać numer rozwiązywanego zadania (tylko jeden) oraz swe imię, nazwisko i numer indeksu.

Proszę o staranne uzasadnianie odpowiedzi, w tym o wyczerpujące wyjaśnienia, umożliwiające śledzenie toku rozumowania.

Z poniższych 6 zadań należy wybrać 5. Za każde zadanie można dostać do 20p.

1. Niech $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym, mającym w bazie standardowej macierz

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Zbadać, dla jakich liczb $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie $L - t \cdot Id$ jest różnowartościowe.
b) Znaleźć macierz Jordana przekształcenia L.
c) Udowodnić, że żadna z macierzy $\mathbf{M}^n$ $(n \geq 1)$ nie jest diagonalizowalna.

2. a) Niech $L(x, y, z) = (y + 2z, x - 2z, 2x - 2y - 3z)$ dla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Znaleźć ortogonalną (względem standardowego iloczynu skalarnego) bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której macierz operatora L jest diagonalna. (Wskazówka: jedną z wartości własnych operatora L jest -5.)

b) Niech $f(x, y, z) = 2xy + 4xz - 4yz - 3z^2$. Znaleźć ortogonalną (względem standardowego iloczynu skalarnego) bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której macierz formy kwadratowej f jest diagonalna. Wskazać tę diagonalną macierz.

3. Niech $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją dwuliniową o macierzy (w standardowej bazie)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & t \\ 1 & t & 2t+1 \end{bmatrix}$$

a) Zbadać, dla jakich $t \in \mathbb{R}$ jest to iloczyn skalarny.
b) Dla $t = 0$ znaleźć bazę $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^3$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, taką, że $g(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \in \{0, 1, -1\}$ dla $i, j = 1, 2, 3$.
c) Zbadać, dla jakich wartości parametru t istnieje dwuwymiarowa podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^3$, na której funkcja kwadratowa $\mathbf{v} \mapsto g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ jest zerowa.

4. Niech forma kwadratowa $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$.
a) Znaleźć sygnaturę formy f i bazę, w której macierz formy jest diagonalna.
b) W zależności od wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, naszkicować schematycznie i nazwać kwadrykę $X_t = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + tx_3 + 3 = 0\}$.
c) Wskazać, dla jakich $t \in \mathbb{R}$ przez każdy punkt kwadryki X_t przechodzi prosta, zawarta w X_t. (Odpowiedź poprzeć rachunkiem i/lub odpowiednim twierdzeniem.)

5. a) Znaleźć przedstawienie parametryczne prostej $K \subset \mathbb{R}^3$, opisanej układem równań $x - 2y - z = -4,\ 2x - 3y - z = -5$.

b) Znaleźć równanie płaszczyzny $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ takiej, że $\Pi \supset K$ i Π zawiera prostą równoległą do prostej $L = (1, 3, 1) + \mathbb{R}(2, -2, -1)$.

c) Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie prostą, która przecina obie proste K i L i jest równoległa do prostej $(5, 2, 0) + \mathbb{R}(2, -1, -1)$. Znaleźć jej punkty przecięcia z K i z L.

6. Niech L_1 i L_2 będą prostymi w 3-wymiarowej afinicznej przestrzeni euklidesowej E.

a) Dowieść istnienia równoległych płaszczyzn $\Pi_i \subset E$ $(i = 1, 2)$ takich, że $\Pi_i \supset L_1$ i $\Pi_2 \supset L_2$.
b) Dowieść istnienia prostej $K \subset E$, przecinającej prostopadle każdą z prostych L_1 i L_2.
c) Czy tezy z a) i b) pozostają słuszne, gdy $\dim E > 3$? (Odpowiedź uzasadnić.)

Egzamin z GAL II (część 2), potok II, termin 2 31 VIII 2010r.

Na każdej oddanej kartce należy wpisać oraz swe imię, nazwisko i numer indeksu.

Z poniższych zadań należy wybrać 3; każda ich część przynieść może do 11p. Wolno poszczególne części wymieniać na części o tej samej nazwie z pozostałych dwóch zadań, ale ze stratą 2p.

1. a) Podaj definicję, kiedy dwie macierze są podobne, a także, kiedy są kongruentne.

b) Wymień znane Ci niezmienniki relacji i) podobieństwa, oraz ii) kongruencji macierzy. (Gdy trzeba, proszę się ograniczyć do macierzy symetrycznych czy rzeczywistych.)

c) Udowodnij, że gdy rzeczywiste macierze symetryczne są podobne, to są kongruentne.

2. a) Podaj definicję unitarnienie diagonalizowalnej macierzy zespolonej.

b) Sformułuj twierdzenie, charakteryzujące takie macierze, i wyjaśnij występujące w nim pojęcia.

c) Udowodnij, że każde dwie różne podprzestrzenie własne takiej macierzy są ortogonalne.

3. Niech $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie liniową przestrzenią euklidesową.

a) Zdefiniuj, kiedy przekształcenie $L : E \to E$ jest izometrią liniową.

b) Podaj charakeryzację takich izometrii, wykorzystującą własności ich macierzy w ortonormalnej bazie przestrzeni E. Uzasadnij poprawność tej charakteryzacji, wychodząc z podanej definicji.

c) Udowodnij, że gdy W jest podprzestrzenią niezmienniczą takiej izometrii, to $W^\perp$ też nią jest.

4. a) Podaj definicję sygnatury rzeczywistej macierzy symetrycznej.

b) Sformułuj twierdzenie Sylvestera o bezwładności i uzasadnij poprawność przytoczonej definicji.

c) Naszkicuj dowód tego twierdzenia.

5. Niech X oznacza paraboloidę hiperboliczną, a Y hiperboloidę dwupowłokową.

a) Podaj afinicznie kanoniczne równania tych kwadryk i wskaż afinicznie niezmienniczą własność, która je odróżnia. (Odpowiedź uzasadnij.)

b) Dla każdej z tych kwadryk wskaż afinicznie niezmienniczą własność, odróżniającą ją od elipsoidy. (Odpowiedź uzasadnij.)

c) Jeśli któraś z kwadryk X, Y jest prostokreślna, udowodnij to.

Egzamin z GAL II, potok II. Temat A 18 VI 2010r.

Na każdej oddanej kartce należy wpisać numer rozwiązywanego zadania (tylko jeden), oznaczenie tematu (A lub B) oraz swe imię, nazwisko i numer indeksu.

Proszę o staranne uzasadnianie odpowiedzi, w tym o wyczerpujące wyjaśnienia, przedstawiające tok rozumowania.

Z poniższych zadań proszę wybrać pięć. (Rozwiązanie dodatkowego może być uwzględniane jako języczek u wagi, ale tylko pięć wejdzie do punktacji egzaminu.)

Za każde zadanie można dostać do 20p.

1. Operator $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest zadany wzorem

$$L(x, y, z) = (x - y, 2x + 4y, 4x + 2y + 3z)$$

a) Czy operator ten jest diagonalizowalny? Jeśli tak, wskazać bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, złożoną z jego wektorów własnych.

b) Czy istnieje taka baza $\mathcal{V}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, dla której $[L]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}$ jest macierzą o wierszach $(2, 4, 2), (0, 3, 1), (0, 0, 3)$?

c) Niech $W_t = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x + ty + z = 0\}$. W zależności od $t \in \mathbb{R}$ wskazać bazę podprzestrzeni W_t i zbadać, dla jakich t podprzestrzeń W_t jest L–niezmiennicza.

2. Niech forma kwadratowa $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $f(x, y, z) = x^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz + 4yz$.

a) Znaleźć sygnaturę formy f i bazę, w której macierz formy jest diagonalna.

b) W zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$, wskazać nazwę kwadryki $X_t = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz + 4yz + 2x = t\}$ i naszkicować ją schematyczne.

c) Wskazać, dla jakich $t \in \mathbb{R}$ przez każdy punkt kwadryki X_t przechodzi prosta, zawarta w X_t. (Odpowiedź poprzeć rachunkiem lub odpowiednim twierdzeniem.)

3. Przestrzeń $\mathbb{R}^3$ rozpatrujemy ze standardowym iloczynem skalarnym.

a) Określić wzorem (w standardowych współrzędnych kartezjańskich) rzut ortogonalny przestrzeni $\mathbb{R}^3$ na płaszczyznę $W = \{(x, y, z) : x - y + 2z = 0\}$.

b) Znaleźć obraz prostej pq, gdzie $p = (1, 1, 3)$ i $q = (0, 3, 1)$, przy rzutowaniu prostopadłym na płaszczyznę $\Pi = \{(x, y, z) : x - y + 2z = 1\}$.

c) Zbadać, ile jest izometrii afinicznych $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takich, że $L(p) = p, L(q) = q$ i $L(\Pi) = \Pi$. Każdą z tych izometrii opisać przez wskazanie wartości, które przyjmuje w punktach dogodnie obranego układu odniesienia (=bazy punktowej).

4. a) Znaleźć przedstawienie parametryczne prostej $K \subset \mathbb{R}^3$, opisanej układem równań $x + 2y - 3z = 8, 2x + y - 3z = 7$.

b) Znaleźć równanie płaszczyzny $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ takiej, że $\Pi \supset K$ i Π zawiera prostą równoległą do prostej $L = (-1, -1, 4) + \mathbb{R}(3, 2, -4)$.

c) Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie prostą, która przecina obie proste K i L i jest równoległa do prostej $(0,0,1) + \mathbb{R}(1,2,1)$. Znaleźć jej punkty przecięcia z K i z L.

5. Poniżej, V jest 2-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}$ i $1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} \neq 0_{\mathbb{F}}$.

a) Niech $g : V \times V \to \mathbb{F}$ będzie dwuliniową formą symetryczną. Dowieść, że jeśli w V istnieje wektor izotropowy (względem g), to $\mathrm{rk}(g) = 1$ lub istnieje baza przestrzeni V, złożona z wektorów izotropowych.

b) Niech $f : V \to \mathbb{F}$ będzie formą kwadratową. Dowieść, że jeśli $f(\mathbf{v}) = 0$ dla pewnego wektora $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, to istnieje baza przestrzeni V, w której macierz formy jest równa $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ lub $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dla pewnego $a \in \mathbb{F}$.

6. Ciałem skalarów jest $\mathbb{R}$.

a) (5p.) Udowodnić, że dla dowolnej nieosobliwej macierzy kwadratowej $\mathbf{B}$, macierz $\mathbf{B}^t\mathbf{B}$ jest symetryczna i dodatnio określona.

b) (15p.) Udowodnić, że gdy macierz $\mathbf{A}$ jest symetryczna i dodatnio określona, to $\mathbf{A} = \mathbf{B}^t\mathbf{B}$ dla pewnej górnie trójkątnej macierzy kwadratowej $\mathbf{B}$.

Egzamin z GAL II, potok II. Temat B 18 VI 2010r.

Na każdej oddanej kartce należy wpisać numer rozwiązywanego zadania (tylko jeden), oznaczenie tematu (A lub B) oraz swe imię, nazwisko i numer indeksu.

Proszę o staranne uzasadnianie odpowiedzi, w tym o wyczerpujące wyjaśnienia, przedstawiające tok rozumowania.

Z poniższych zadań proszę wybrać pięć. (Rozwiązanie dodatkowego może być uwzględniane jako języczek u wagi, ale tylko pięć wejdzie do punktacji egzaminu.)

Za każde zadanie można dostać do 20p.

1. Operator $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest zadany wzorem

$$L(x, y, z) = (3x + 2y + 4z, 4y + 2z, -y + z)$$

a) Czy operator ten jest diagonalizowalny? Jeśli tak, wskazać bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, złożoną z jego wektorów własnych.

b) Czy istnieje taka baza $\mathcal{V}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, dla której $[L]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}$ jest macierzą o wierszach $(3, 0, 0), (1, 3, 0), (2, 4, 2)$?

c) Niech $W_t = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + ty + 4z = 0\}$. W zależności od $t \in \mathbb{R}$ wskazać bazę podprzestrzeni W_t i zbadać, dla jakich t podprzestrzeń W_t jest L–niezmiennicza.

2. Niech forma kwadratowa $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2xz + 4yz$.

a) Znaleźć sygnaturę formy f i bazę, w której macierz formy jest diagonalna.

b) W zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$, wskazać nazwę kwadryki $X_t = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 - 2xy - 2xz + 4yz + 2x = t\}$ i naszkicować ją schematyczne.

c) Wskazać, dla jakich $t \in \mathbb{R}$ przez każdy punkt kwadryki X_t przechodzi prosta, zawarta w X_t. (Odpowiedź poprzeć rachunkiem lub odpowiednim twierdzeniem.)

3. Przestrzeń $\mathbb{R}^3$ rozpatrujemy ze standardowym iloczynem skalarnym.

a) Określić wzorem (w standardowych współrzędnych kartezjańskich) rzut ortogonalny przestrzeni $\mathbb{R}^3$ na płaszczyznę $W = \{(x, y, z) : -x + y + 2z = 0\}$.

b) Znaleźć obraz prostej pq, gdzie $p = (1, 1, 3)$ i $q = (3, 0, 1)$, przy rzutowaniu prostopadłym na płaszczyznę $\Pi = \{(x, y, z) : -x + y + 2z = 1\}$.

c) Zbadać, ile jest izometrii afinicznych $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takich, że $L(p) = p, L(q) = q$ i $L(\Pi) = \Pi$. Każdą z tych izometrii opisać przez wskazanie wartości, które przyjmuje w punktach dogodnie obranego układu odniesienia (=bazy punktowej).

4. a) Znaleźć przedstawienie parametryczne prostej $K \subset \mathbb{R}^3$, opisanej układem równań $2x + y - 3z = 8, x + 2y - 3z = 7$.

b) Znaleźć równanie płaszczyzny $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ takiej, że $\Pi \supset K$ i Π zawiera prostą równoległą do prostej $L = (-1, -1, 4) + \mathbb{R}(2, 3, -4)$

c) Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie prostą, która przecina obie proste K i L i jest równoległa do prostej $(0,0,1) + \mathbb{R}(2,1,1)$. Znaleźć jej punkty przecięcia z K i z L.

5. Poniżej, V jest 2-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}$ i $1_\mathbb{F} + 1_\mathbb{F} \neq 0_\mathbb{F}$.

a) Niech $g : V \times V \to \mathbb{F}$ będzie dwuliniową formą symetryczną. Dowieść, że jeśli w V istnieje wektor izotropowy (względem g), to $\mathrm{rk}(g) = 1$ lub istnieje baza przestrzeni V, złożona z wektorów izotropowych.

b) Niech $f : V \to \mathbb{F}$ będzie formą kwadratową. Dowieść, że jeśli $f(\mathbf{v}) = 0$ dla pewnego wektora $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, to istnieje baza przestrzeni V, w której macierz formy jest równa $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ lub $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dla pewnego $a \in \mathbb{F}$.

6. Ciałem skalarów jest $\mathbb{R}$.

a) (5p.) Udowodnić, że dla dowolnej nieosobliwej macierzy kwadratowej $\mathbf{B}$, macierz $\mathbf{B}^t\mathbf{B}$ jest symetryczna i dodatnio określona.

b) (15p.) Udowodnić, że gdy macierz $\mathbf{A}$ jest symetryczna i dodatnio określona, to $\mathbf{A} = \mathbf{B}^t\mathbf{B}$ dla pewnej górnie trójkątnej macierzy kwadratowej $\mathbf{B}$.

Egzamin z GAL II (część 2), potok II 18 VI 2010r.

Na każdej oddanej kartce należy wpisać oraz swe imię, nazwisko i numer indeksu.

Z poniższych zadań należy wybrać 3; każda ich część przynieść może do 10p. Wolno poszczególne części wymieniać na części o tej samej nazwie z pozostałych dwóch zadań, ale ze stratą 2p.

1. a) Podać definicję podobieństwa macierzy kwadratowych i udowodnić, że podobne macierze zespolone mają ten sam wielomian charakterystyczny.

b) Sformułować warunek konieczny i dostateczny, pozwalający efektywnie badać podobieństwo danych macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$. Czy warunek ten jest zawsze spełniony gdy $\mathbf{B} = \mathbf{A}^t \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$? (Odpowiedź uzasadnić.)

c) Niech $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ będą macierzami kwadratowymi nad tym samym ciałem. Udowodnić, że macierz $\operatorname{diag}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ jest podobna do $\operatorname{diag}(\mathbf{B}, \mathbf{A})$.

2. a) Podać definicję ortogonalnie diagonalizowalnej macierzy rzeczywistej.

b) Udowodnić, że każda taka macierz jest symetryczna.

c) Udowodnić, że dwie różne podprzestrzenie własne takiej macierzy są ortogonalne.

3. a) Sformułować twierdzenie Schura dotyczące związku macierzy zespolonych i trójkątnych.

b) Podać definicję macierzy normalnej.

c) Przyjmując przytoczone twierdzenie Schura udowodnić, że każda macierz normalna jest unitarnie diagonalizowalna.

4. a) Podać definicję sygnatury formy kwadratowej (tu i niżej $\mathbb{F} = \mathbb{R}$).

b) Sformułować twierdzenie Sylvestera o bezwładności i uzasadnić poprawność przytoczonej definicji.

c) Udowodnić to twierdzenie.

5. Niech X oznacza paraboloidę hiperboliczną, a Y hiperboloidę jednopowłokową.

a) Podać afinicznie kanoniczne równania tych kwadryk i wskazać afinicznie niezmienniczą własność, która je odróżnia. (Odpowiedź uzasadnić.)

b) Dla każdej z tych kwadryk wskazać afinicznie niezmienniczą własność, odróżniającą ją od stożka eliptycznego. (Odpowiedź uzasadnić.)

c) Udowodnić prostokreślność którejś z kwadryk X, Y.

Kolokwium z GAL II, potok II. Temat A 14 V 2010r.

Na każdej oddanej kartce należy wpisać numer rozwiązywanego zadania (tylko jeden), oznaczenie tematu (A lub B) oraz swe imię, nazwisko i numer indeksu.

Proszę o staranne uzasadnianie odpowiedzi, w tym o wyczerpujące wyjaśnienia, przedstawiające tok rozumowania.

Za każde zadanie można dostać do 20p.

1. Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -15 & 8 \\ -48 & 25 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} := \mathbf{A}^{2010}$.

a) Obliczyć b.

b) Dowieść istnienia czterech różnych macierzy, których kwadrat jest równy $\mathbf{A}$ i wskazać taką z nich, które ma tylko dodatnie wartości własne.

2. Rozpatrzmy macierze

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & t \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Znaleźć postać Jordana macierzy $\mathbf{A}$.

b) Dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$ macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}_t$ są podobne?

3. Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 2t-1 \end{bmatrix}$.

a) Znaleźć sygnaturę macierzy $\mathbf{A}$ i bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której macierz formy $f(x, y, z) = 2xy + 6xz + 2yz + z^2$ jest diagonalna.

b) Zbadać, dla jakich $t \in \mathbb{C}$ macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}_t$ są kongruentne nad $\mathbb{C}$, dla jakich $t \in \mathbb{R}$ są one kongruentne nad $\mathbb{R}$, a dla jakich $t \in \mathbb{Q}$ są kongruentne nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$. (Macierze $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ nazywamy kongruentnymi nad $\mathbb{F}$, jeśli $\mathbf{Y} = \mathbf{C}^t\mathbf{X}\mathbf{C}$ dla pewnej nieosobliwej macierzy $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$.)

4. Przestrzeń $\mathbb{R}^3$ rozpatrujemy ze standardowym iloczynem skalarnym.

a) Niech $L(x, y, z) = (y + 2z, x + 2z, 2x + 2y + 3z)$ dla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Znaleźć ortogonalną bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, diagonalizującą operator L. (Wskazówka: jedną z wartości własnych tego operatora jest 5.)

b) Niech $f(x, y, z) = 2xy + 4xz + 4yz + 3z^2$. Znaleźć ortogonalną bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której macierz formy kwadratowej f jest diagonalna.

5. a) Znaleźć postać Jordana macierzy dolnie trójkątnej, mającej na przekątnej wyrazy równe λ, zaś bezpośrednio poniżej wyrazy niezerowe.

b) Niech $\mathbf{J}$ będzie klatką Jordana (dolną) stopnia k. Dowieść, że jedynymi $\mathbf{J}$ – niezmienniczymi podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{F}^k$ są $\{\mathbf{0}\}$ i przestrzenie $V_i = \mathrm{lin}(\mathbf{e}_i, \ldots, \mathbf{e}_k)$, $1 \leq i \leq k$.

c) Niech macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ będzie symetryczna i nieosobliwa. Dowieść, że macierz $\mathrm{diag}(\mathbf{A}, -\mathbf{A})$ jest kongruentna z macierzą $\mathrm{diag}(\mathbf{I}, -\mathbf{I})$.

d) Dla takiej macierzy $\mathbf{A}$ wyrazić znak jej wyznacznika przez jej sygnaturę.

Kolokwium z GAL II, potok II. Temat B 14 V 2010r.

Na każdej oddanej kartce należy wpisać numer rozwiązywanego zadania (tylko jeden), oznaczenie tematu (A lub B) oraz swe imię, nazwisko i numer indeksu.

Proszę o staranne uzasadnianie odpowiedzi, w tym o wyczerpujące wyjaśnienia, przedstawiające tok rozumowania.

Za każde zadanie można dostać do 20p.

1. Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 25 & -48 \\ 8 & -15 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} := \mathbf{A}^{2010}$.

a) Obliczyć b.

b) Dowieść istnienia czterech różnych macierzy, których kwadrat jest równy $\mathbf{A}$ i wskazać taką z nich, które ma tylko ujemne wartości własne.

2. Rozpatrzmy macierze

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & t \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Znaleźć postać Jordana macierzy $\mathbf{A}$.

b) Dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$ macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}_t$ są podobne?

3. Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2t-1 \end{bmatrix}$.

a) Znaleźć sygnaturę macierzy $\mathbf{A}$ i bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której macierz formy $f(x,y,z) = 2xy + 6xz + 2yz + z^2$ jest diagonalna.

b) Zbadać, dla jakich $t \in \mathbb{C}$ macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}_t$ są kongruentne nad $\mathbb{C}$, dla jakich $t \in \mathbb{R}$ są one kongruentne nad $\mathbb{R}$, a dla jakich $t \in \mathbb{Q}$ są kongruentne nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$. (Macierze $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ nazywamy kongruentnymi nad $\mathbb{F}$, jeśli $\mathbf{Y} = \mathbf{C}^t\mathbf{X}\mathbf{C}$ dla pewnej nieosobliwej macierzy $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$.)

4. Przestrzeń $\mathbb{R}^3$ rozpatrujemy ze standardowym iloczynem skalarnym.

a) Niech $L(x,y,z) = (3x+2y+2z, 2x+z, 2x+y)$ dla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Znaleźć ortogonalną bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, diagonalizującą operator L. (Wskazówka: jedną z wartości własnych tego operatora jest 5.)

b) Niech $f(x,y,z) = 3x^2 + 4xy + 4xz + 2yz$. Znaleźć ortogonalną bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której macierz formy kwadratowej f jest diagonalna.

5. a) Znaleźć postać Jordana macierzy dolnie trójkątnej, mającej na przekątnej wyrazy równe λ, zaś bezpośrednio poniżej wyrazy niezerowe.

b) Niech $\mathbf{J}$ będzie klatką Jordana (dolną) stopnia k. Dowieść, że jedynymi $\mathbf{J}$ – niezmienniczymi podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{F}^k$ są $\{\mathbf{0}\}$ i przestrzenie $V_i = \text{lin}(\mathbf{e}_i, \ldots, \mathbf{e}_k)$, $1 \leq i \leq k$.

c) Niech macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ będzie symetryczna i nieosobliwa. Dowieść, że macierz $\text{diag}(\mathbf{A}, -\mathbf{A})$ jest kongruentna z macierzą $\text{diag}(\mathbf{I}, -\mathbf{I})$.

d) Dla takiej macierzy $\mathbf{A}$ wyrazić znak jej wyznacznika przez jej sygnaturę.

Kolokwium z GAL II, potok II. Temat A 26 III 2010r.

Na każdej oddanej kartce należy wpisać numer rozwiązywanego zadania (tylko jeden), oznaczenie tematu (A lub B) oraz swe imię, nazwisko i numer indeksu.

Proszę o staranne uzasadnianie odpowiedzi, w tym o wyczerpujące wyjaśnienia, przedstawiające tok rozumowania.

Za każde zadanie można dostać do 20p.

1. Przestrzeń $\mathbb{R}^4$ rozpatrujemy ze standardowym iloczynem skalarnym. Znaleźć wzór (we współrzędnych kartezjańskich) na przekształcenie

a) będące rzutowaniem ortogonalnym na podprzestrzeń W=lin((1,1,1,-1),(2,-1,2,1))

b) będące symetrią ortogonalną względem tej podprzestrzeni.

2. Przestrzeń $\mathbb{R}^3$ rozpatrujemy ze standardowym iloczynem skalarnym. Warstwy $A, B \subset \mathbb{R}^3$ dane są następująco:

$$A = \{(3,3,4) + s(3,1,1) : s \in \mathbb{R}\}, \; B = \{(2,1,3) + t(1,0,-1) : t \in \mathbb{R}\}$$

a) Wyznaczyć w B wektor, najbliższy wektorowi $(5,2,4)$.

b) Wyznaczyć odległość od A do B.

3. Niech $\langle (x,y),(x',y') \rangle = xx' - xy' - x'y + 2yy'$ dla $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$.

a) Zbadać, czy jest to iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^2$ i jeśli jest, to znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

b) Dla każdej liczby $t \in \mathbb{R}$ wyznaczyć wzorem (we współrzędnych kartezjańskich) sprzężenie przekształcenia $L_t : (\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle) \to (\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, zadanego wzorem

$$L_t(x,y) = (x - 2y, (1-t)x - y)$$

c) Zbadać dla jakich $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie L_t jest izometrią, a dla jakich jest rzutem ortogonalnym.

d) Gdy L_t jest izometrią, określić w zależności od t, czy jest to obrót, czy symetria. W przypadku symetrii podać oś symetrii.

4. a) Udowodnić, że wyznacznik Grama wektorów $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ nie zależy od ich kolejności, i że nie zmieni się on po zmianie wektora $\mathbf{v}_1$ na $-\mathbf{v}_1$.

b) Niech V_0 będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej V, a $Q_0 \in \mathcal{L}(V_0, V)$ będzie zanurzeniem izometrycznym. Dowieść istnienia izometrii $Q \in \mathcal{L}(V,V)$ takiej, że $Q|_{V_0} = Q_0$.

5. Niech wektory $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k$ w przestrzeni unitarnej V spełniają warunki $\mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^k b_{ij}\mathbf{v}_j$ dla $i = 1, ..., k$ i danych skalarów b_{ij}. Dowieść, że $|\mathbf{G}(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k)| = |\det(\mathbf{B})|^2 |\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)|$ i ustalić zależność między macierzami Grama $\mathbf{G}(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k)$ i $\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$.

Kolokwium z GAL II, potok II. Temat B 26 III 2010r.

Na każdej oddanej kartce należy wpisać numer rozwiązywanego zadania (tylko jeden), oznaczenie tematu (A lub B) oraz swe imię, nazwisko i numer indeksu.

Proszę o staranne uzasadnianie odpowiedzi, w tym o wyczerpujące wyjaśnienia, przedstawiające tok rozumowania.

Za każde zadanie można dostać do 20p.

1. Przestrzeń $\mathbb{R}^4$ rozpatrujemy ze standardowym iloczynem skalarnym. Znaleźć wzór (we współrzędnych kartezjańskich) na przekształcenie

a) będące rzutowaniem ortogonalnym na podprzestrzeń W=lin((1,1,-1,1),(2,-1,1,2))

b) będące symetrią ortogonalną względem tej podprzestrzeni.

2. Przestrzeń $\mathbb{R}^3$ rozpatrujemy ze standardowym iloczynem skalarnym. Warstwy $A, B \subset \mathbb{R}^3$ dane są następująco:

$$A = \{(3,4,3) + s(3,1,1) : s \in \mathbb{R}\},\ B = \{(2,3,1) + t(1,-1,0) : t \in \mathbb{R}\}$$

a) Wyznaczyć w B wektor, najbliższy wektorowi $(5,4,2)$.

b) Wyznaczyć odległość od A do B.

3. Niech $\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx' - xy' - x'y + 2yy'$ dla $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$.

a) Zbadać, czy jest to iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^2$ i jeśli jest, to znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

b) Dla każdej liczby $t \in \mathbb{R}$ wyznaczyć wzorem (we współrzędnych kartezjańskich) sprzężenie przekształcenia $L_t : (\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle) \to (\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, zadanego wzorem

$$L_t(x,y) = (x - 2y, (1-t)x - y)$$

c) Zbadać dla jakich $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie L_t jest izometrią, a dla jakich jest rzutem ortogonalnym.

d) Gdy L_t jest izometrią, określić w zależności od t, czy jest to obrót, czy symetria. W przypadku symetrii podać oś symetrii.

4. a) Udowodnić, że wyznacznik Grama wektorów $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ nie zależy od ich kolejności, i że nie zmieni się on po zmianie wektora $\mathbf{v}_1$ na $-\mathbf{v}_1$.

b) Niech V_0 będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej V, a $Q_0 \in \mathcal{L}(V_0, V)$ będzie zanurzeniem izometrycznym. Dowieść istnienia izometrii $Q \in \mathcal{L}(V,V)$ takiej, że $Q|_{V_0} = Q_0$.

5. Niech wektory $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k$ w przestrzeni unitarnej V spełniają warunki $\mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^k b_{ij}\mathbf{v}_j$ dla $i = 1, ..., k$ i danych skalarów b_{ij}. Dowieść, że $|\mathbf{G}(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k)| = |\det(\mathbf{B})|^2 |\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)|$ i ustalić zależność między macierzami Grama $\mathbf{G}(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k)$ i $\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$.

Kolokwium z GAL I w terminie poprawkowym, potok II. 27 II 2010r.

Na każdej oddanej kartce należy wpisać numer rozwiązywanego zadania (tylko jeden) oraz swe imię, nazwisko i numer indeksu.

Proszę o staranne uzasadnianie odpowiedzi, w tym o podawanie wyczerpujących wyjaśnień, umożliwiających zrozumienie toku rozumowania.

Za każde zadanie można dostać do 14p.

1. Niech $U = \operatorname{lin}((1,2,1,3),(2,3,2,4),(2,5,2,8),(5,9,5,13))$ i niech W będzie zbiorem rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni U.

b) Opisać U układem liniowych równań jednorodnych.

c) Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni $U + W$.

2. Przekształcenia $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadane są wzorem $K(x,y,z) = (x+2y+z, 2x+z)$ i równością $[L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$, gdzie $\mathcal{V} = ((1,2),(1,3))$, $\mathcal{W} = ((1,1,1),(1,1,0),(0,1,0))$.

a) Znaleźć $[K]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}$ i $[L \circ K]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}$.

b) Znaleźć bazę i wymiar każdej z przestrzeni $\ker(L)$ i $\operatorname{im}(L)$.

c) Zbadać, dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$ poniższe przekształcenie $S_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest różnowartościowe:

$$S_t(x,y,z) = (x+y+z, 2x+5y+4z, x+2y+tz)$$

3. Niech

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Obliczyć $\det(\mathbf{A})$.

b) Znaleźć $\mathbf{B}^{-1}$.

c) Zbadać, dla jakich $t \in \mathbb{R}$ macierz $\mathbf{AC}_t$ jest odwracalna.

4. a) (4p.) Przekształcenie $L : \mathbb{R}_{10}[x] \to \mathbb{R}[x]$ przyporządkowuje każdemu wielomianowi jego resztę z dzielenia przez $x^7 + x - 2$. Udowodnić, że przekształcenie to jest liniowe i zbadać, jaki jest wymiar jego jądra $\ker(L)$ i wymiar obrazu $\operatorname{im}(L)$.

b) (10p.) Udowodnić istnienie niezerowego wielomianu stopnia 10 lub niższego, który jest podzielny przez $x^6 - x + 3$ i którego reszta z dzielenia przez $x^7 + x - 2$ jest podzielna przez $x^4 + 11$.

5. a) (3p.) Sformułować twierdzenie, wiążące wymiary obrazu i jądra przekształcenia liniowego.

Punkt b) (za 11p.) jest do wyboru:

b1) Udowodnić to twierdzenie, lub

b2) Udowodnić, że maksymalna liczba liniowo niezależnych wierszy macierzy $\mathbf{A}$ jest równa maksymalnej liczbie jej liniowo niezależnych kolumn.

Drugie kolokwium z GAL I, potok II 22 I 2010r.

Na każdej oddanej kartce należy wpisać numer rozwiązywanego zadania (tylko jeden), oznaczenie tematu (A lub B) oraz swe imię, nazwisko i numer indeksu.

TEMAT A

Proszę o staranne uzasadnianie odpowiedzi, w tym o podawanie wyczerpujących wyjaśnień, umożliwiających zrozumienie toku rozumowania.

1. Niech $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ i $\mathcal{W} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$, gdzie

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,0), \mathbf{v}_2 = (1,1,1), \mathbf{v}_3 = (1,2,3) \text{ oraz } \mathbf{w}_1 = (1,1), \mathbf{w}_2 = (1,2)$$

a) (6p.) Dowieść, że $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ są bazami przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$, odpowiednio.

b) (7p.) Niech, w tych bazach, macierz przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie równa $[L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Znaleźć współrzędne wektora $L(\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)$ w bazie $\mathcal{W}$ oraz wzór, określający przekształcenie L we współrzędnych kartezjańskich.

c) (7p.) Niech z kolei macierz przekształcenia liniowego $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, w bazach $\mathcal{W}$ i $\mathcal{V}$, będzie równa $[K]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Znaleźć bazę obrazu przekształcenia $K \circ L$ i wymiar jego jądra.

2. Niech V_t $(t \in \mathbb{R})$ i V będą podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $\mathbb{R}^4$, takimi, że

$$V_t = \operatorname{lin}((1,1,2,-1),(1,1,t,-1)), \;\; V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \text{ i } x_1 + 4x_2 + x_4 = 0\}.$$

a) (10p.)Znaleźć te wartości parametru t, dla których $\mathbb{R}^4 = V \oplus V_t$.

b) (10p.) W zależności od t znaleźć bazę przestrzeni $V + V_t$.

3. Niech $\mathcal{W}$ będzie bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$ opisaną w zadaniu 1. Niech

$$Z = \{L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) : \text{ macierz } \mathbf{A} = [L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}} \text{ spełnia warunki } a_{11} = a_{21} \text{ i } a_{12} = 0\}$$

a) (10p.) Wyznaczyć $\dim(Z)$, gdy Z traktować jako podprzestrzeń liniową przestrzeni $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

b) (10p.) Znaleźć wszystkie przekształcenia $P \in Z$, będące rzutami liniowymi. Każdy z tych rzutów opisać wzorem we współrzędnych kartezjańskich.

4. a) (10p.) Do macierzy rzeczywistej $2\mathbf{I}_k$ dopisano pierwszy wiersz i pierwszą kolumnę, równe $(0,1,...,1) \in \mathbb{R}^{k+1}$. Obliczyć wyznacznik otrzymanej macierzy.

b) (10p.) Niech $\mathbf{A}_t$ będzie macierzą o wierszach $(1,0,1,0), (3,t,3,t), (2,1,t+3,t), (1,0,1,t)$. W zależności od wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ obliczyć jej wyznacznik i rząd.

5. a) (8p.) Niech $L \in \mathcal{L}(V, W)$, gdzie przestrzenie V i W są skończonego wymiaru. Wskazać (uzasadnienie nie jest tu konieczne), jak znaleźć można bazę przestrzeni V, gdy znane są bazy jądra $\ker(L)$ i obrazu $\operatorname{im}(L)$ przekształcenia L.

Punkt b) jest do wyboru:

b1) (12p.) Udowodnić prawdziwość swej odpowiedzi z punktu a), lub

b2) (12p.) Sformułować równość Grassmana, dotyczącą wymiarów przecięcia i sumy dwóch podprzestrzeni skończonego wymiaru, i udowodnić ją.

Można też rozwiązywać zarówno b1), jak i b2), uzyskując do 8 dodatkowych punktów.

Drugie kolokwium z GAL I, potok II 22 I 2010r.

Na każdej oddanej kartce należy wpisać numer rozwiązywanego zadania (tylko jeden), oznaczenie tematu (A lub B) oraz swe imię, nazwisko i numer indeksu.

TEMAT B

Proszę o staranne uzasadnianie odpowiedzi, w tym o podawanie wyczerpujących wyjaśnień, umożliwiających zrozumienie toku rozumowania.

1. Niech $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ i $\mathcal{W} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$, gdzie

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 1), \mathbf{v}_3 = (1, 2, 3) \text{ oraz } \mathbf{w}_1 = (1, 1), \mathbf{w}_2 = (2, 3)$$

a) (6p.) Dowieść, że $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ są bazami przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$, odpowiednio.

b) (7p.) Niech, w tych bazach, macierz przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie równa $[L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Znaleźć współrzędne wektora $L(2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3)$ w bazie $\mathcal{W}$ oraz wzór, określający przekształcenie L we współrzędnych kartezjańskich.

c) (7p.) Niech z kolei macierz przekształcenia liniowego $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, w bazach $\mathcal{W}$ i $\mathcal{V}$, będzie równa $[K]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Znaleźć bazę obrazu przekształcenia $K \circ L$ i wymiar jego jądra.

2. Niech V_t ($t \in \mathbb{R}$) i V będą podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $\mathbb{R}^4$, takimi, że

$$V_t = \mathrm{lin}((1, 1, 2, -1), (1, 1, t, -1)), \quad V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \text{ i } x_1 + 3x_2 + x_4 = 0\}.$$

a) (10p.)Znaleźć te wartości parametru t, dla których $\mathbb{R}^4 = V \oplus V_t$.

b) (10p.) W zależności od t znaleźć bazę przestrzeni $V + V_t$.

3. Niech $\mathcal{W}$ będzie bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$ opisaną w zadaniu 1. Niech

$$Z = \{L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) : \text{ macierz } \mathbf{A} = [L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}} \text{ spełnia warunki } a_{11} = a_{21} \text{ i } a_{12} = 0\}$$

a) (10p.) Wyznaczyć $\dim(Z)$, gdy Z traktować jako podprzestrzeń liniową przestrzeni $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

b) (10p.) Znaleźć wszystkie przekształcenia $P \in Z$, będące rzutami liniowymi. Każdy z tych rzutów opisać wzorem we współrzędnych kartezjańskich.

4. a) (10p.) Do macierzy rzeczywistej $3\mathbf{I}_k$ dopisano pierwszy wiersz i pierwszą kolumnę, równe $(0, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^{k+1}$. Obliczyć wyznacznik otrzymanej macierzy.

b) (10p.) Niech $\mathbf{A}_t$ będzie macierzą o wierszach $(1, 0, 1, 0), (3, t, 3, t), (2, 1, t - 1, t), (1, 0, 1, t)$. W zależności od wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ obliczyć jej wyznacznik i rząd.

5. a) (8p.) Niech $L \in \mathcal{L}(V, W)$, gdzie przestrzenie V i W są skończonego wymiaru. Wskazać (uzasadnienie nie jest tu konieczne), jak znaleźć można bazę przestrzeni V, gdy znane są bazy jądra $\ker(L)$ i obrazu $\operatorname{im}(L)$ przekształcenia L.

Punkt b) jest do wyboru:

b1) (12p.) Udowodnić prawdziwość swej odpowiedzi z punktu a), lub

b2) (12p.) Sformułować równość Grassmana, dotyczącą wymiarów przecięcia i sumy dwóch podprzestrzeni skończonego wymiaru, i udowodnić ją.

Można też rozwiązywać zarówno b1), jak i b2), uzyskując do 8 dodatkowych punktów.

Pierwsze kolokwium z GAL I, potok II 20 XI 2009r.

Na każdej oddanej kartce należy wpisać numer rozwiązywanego zadania (tylko jeden), oznaczenie tematu (A lub B), swe imię, nazwisko i numer indeksu, a także numer grupy ćwiczeniowej, do której podpisana osoba uczęszcza.

TEMAT A

Proszę o podawanie wyczerpujących wyjaśnień, umożliwiających zrozumienie toku rozumowania

1. a) (12p.) Przeciwległymi wierzchołkami kwadratu są punkty $z_1 = 1 + 2i$ i $z_2 = 3 + 8i$. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki i środek kwadratu.

b) (13p.) Wyznaczyć i naszkicować zbiory $f(D)$ i $g^{-1}(D)$, gdy funkcje $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ i zbiór $D \subset \mathbb{C}$ są zadane wzorami

$f(z) = -(1+i)z^3 + 2,\ g(z) = (z+2)^4, \quad D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0 \text{ i } \mathrm{Re}(z) \geq 0\}.$

2. Rozpatrzmy przekształcenie $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$, zadane wzorem

$$L(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y + z, 3x + 2y + 2z, 3x + 4y + 3z, -x - z)$$

i) (6p.) Zbadać, czy któryś z wektorów $(1, 2, 3, 4, 0)$ i $(1, 1, 3, 4, 0)$ (a jeśli tak, to który) leży w obrazie $\mathrm{im}(L)$ przekształcenia L.

ii) (7p.) Znaleźć układ jednorodnych równań liniowych, opisujący ten obraz (tzn. taki układ, którego zbiór rozwiązań jest równy obrazowi $\mathrm{im}(L)$ przekształcenia L).

iii) (6p.) Zbadać, czy wektory $L(\mathbf{e}_1), L(\mathbf{e}_2), L(\mathbf{e}_3)$ są liniowo niezależne.

iv) (6p.) Zbadać, czy $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ dla pewnego niezerowego wektora $\mathbf{v}$, i czy przekształcenie L jest różnowartościowe.

3. Dla $a, b \in \mathbb{R}$ niech przekształcenie $L_{a,b} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie zadane wzorem

$$L_{a,b}(x, y, z, t) = (ax + ay, (a + b)x + (a - b)y, (a + b)x + (a - b)y + z + t, z - t)$$

a) (8p.) Zbadać, dla jakich par (a, b) istnieje przekształcenie $L_{a,b}^{-1}$, odwrotne do $L_{a,b}$, a dla jakich obrazem przekształcenia $L_{a,b}$ jest cała przestrzeń $\mathbb{R}^4$.

b) (9p.) Jeśli przekształcenie odwrotne do $L_{1,2}$ istnieje, opisać je wzorem.

c) (8p.) Znaleźć fundamentalny układ rozwiązań układu równań $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, gdzie $\mathbf{A} = [L_{0,1}]$ jest macierzą przekształcenia $L_{0,1}$.

4. (25p.) Rozważamy ciąg operacji na macierzach $\mathbf{A} = \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2 \to ... \to \mathbf{X}_s = \mathbf{U}$. i–ta operacja polega na dodaniu do jakiegoś wiersza macierzy $\mathbf{X}_i$ któregoś z poprzedzających go wierszy tej macierzy, pomnożonego przez skalar. Dowieść, że $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$, gdzie $\mathbf{L}$ jest macierzą dolnie trójkątną, mającą jedynki na przekątnej.

Pierwsze kolokwium z GAL I, potok II 20 XI 2009r.

Na każdej oddanej kartce należy wpisać numer rozwiązywanego zadania (tylko jeden), oznaczenie tematu (A lub B), swe imię, nazwisko i numer indeksu, a także numer grupy ćwiczeniowej, do której podpisana osoba uczęszcza.

TEMAT B

Proszę o podawanie wyczerpujących wyjaśnień, umożliwiających zrozumienie toku rozumowania

1. a) (12p.) Przeciwległymi wierzchołkami kwadratu są punkty $z_1 = 2 + i$ i $z_2 = 8 + 3i$. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki i środek kwadratu.

b) (13p.) Wyznaczyć i naszkicować zbiory $f(D)$ i $g^{-1}(D)$, gdy funkcje $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ i zbiór $D \subset \mathbb{C}$ są zadane wzorami

$f(z) = (1 + i)z^3 - 2,\ g(z) = (z - 2)^4, \quad D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0 \text{ i } \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$.

2. Rozpatrzmy przekształcenie $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$, zadane wzorem

$$L(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + z, 2x + 3y + 2z, 3x + 3y + 4z, -x - y)$$

i) (6p.) Zbadać, czy któryś z wektorów $(1, 2, 3, 2, -2)$ i $(1, 1, 3, 2, -2)$ (a jeśli tak, to który) leży w obrazie $\mathrm{im}(L)$ przekształcenia L.

ii) (7p.) Znaleźć układ jednorodnych równań liniowych, opisujący ten obraz (tzn. taki układ, którego zbiór rozwiązań jest równy obrazowi $\mathrm{im}(L)$ przekształcenia L).

iii) (6p.) Zbadać, czy wektory $L(\mathbf{e}_1), L(\mathbf{e}_2), L(\mathbf{e}_3)$ są liniowo niezależne.

iv) (6p.) Zbadać, czy $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ dla pewnego niezerowego wektora $\mathbf{v}$, i czy przekształcenie L jest różnowartościowe.

3. Dla $a, b \in \mathbb{R}$ niech przekształcenie $L_{a,b} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie zadane wzorem

$$L_{a,b}(x, y, z, t) = (ax + ay, (a - b)x + (a + b)y, (a - b)x + (a + b)y + z + t, z - t)$$

a) (8p.) Zbadać, dla jakich par (a, b) istnieje przekształcenie $L_{a,b}^{-1}$, odwrotne do $L_{a,b}$, a dla jakich obrazem przekształcenia $L_{a,b}$ jest cała przestrzeń $\mathbb{R}^4$.

b) (9p.) Jeśli przekształcenie odwrotne do $L_{2,1}$ istnieje, opisać je wzorem.

c) (8p.) Znaleźć fundamentalny układ rozwiązań układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, gdzie $\mathbf{A} = [L_{1,0}]$ jest macierzą przekształcenia $L_{1,0}$.

4. (25p.) Rozważamy ciąg operacji na macierzach $\mathbf{A} = \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2 \to \ldots \to \mathbf{X}_s = \mathbf{U}$. i–ta operacja polega na dodaniu do jakiegoś wiersza macierzy $\mathbf{X}_i$ któregoś z poprzedzających go wierszy tej macierzy, pomnożonego przez skalar. Dowieść, że $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, gdzie $\mathbf{L}$ jest macierzą dolnie trójkątną, mającą jedynki na przekątnej.