Tematy egzaminacyjne

A1) Wyznacznik, jego własności i charakteryzacja. Znak permutacji i pełne rozwiniecie wyznacznika. Wyznacznik endomorfizmu i interpretacja w przypadku rzeczywistym (związek z objętością i zachowywaniem orientacji). Wyznacznik Grama, jego własności i zastosowania. Definicja i własności iloczynu wektorowego.

A2) Iloczyn skalarny i wyznaczona przez niego norma (przypadek rzeczywisty i zespolony). Istnienie baz ortogonalnych i rzutu ortogonalnego, sposoby wyznaczania.

A3) Nierówność CBS i nierówność trójkąta. Pojęcia metryczne w przestrzeni unitarnej: odległość, miara kąta, odległość od warstwy i między warstwami, związek z rzutem ortogonalnym.

A3) Unitarność i i hermitowskie sprzężenie macierzy i przekształceń: definicja izometrii liniowej, związek z macierzami unitarnymi (ortogonalnymi), charakteryzacja tych macierzy przy pomocy sprzężenia, sprzężenie hermitowskie operatora miedzy przestrzeniami unitarnymi.

A5) Izometrie liniowe przestrzeni euklidesowych: związek z symetriami ortogonalnymi, obroty w wymiarach 2 i 3, kąt zorientowany na płaszczyźnie.

@@@@@@@@@@@@@@@@@@

B1) Podobieństwo macierzy i przekształceń (unitarne i „zwykłe”). Przykłady własności, niezmienniczych względem podobieństwa zwykłego wzgl. unitarnego (macierzy czy przekształceń). Podobieństwo a zapis operatora w bazie. Wielomian charakterystyczny macierzy i operatora; poprawność definicji.

B2) Wartości własne. Podprzestrzenie własne i ich niezależność. Warunki konieczne i dostateczne diagonalizowalności macierzy wzgl. operatorów, wyrażone w terminach przestrzeni własnych czy wektorów własnych.

B3) Sformułowanie twierdzenia Jordana (wersja dla macierzy i dla operatorów; równoważność tych wersji). Sposób wyznaczania postaci Jordana i jej jednoznaczność. Zastosowanie diagonalizowalności lub postaci Jordana do wyznaczania wartości wielomianów i bardziej ogólnych funkcji na danej macierzy. Podprzestrzenie niezmiennicze i ich proste własności. Umiejętność znajdywania bazy Jordana dla małych macierzy metodami „ad hoc” lub opisanymi w §VI. 2.6.

B4) Twierdzenie Schura z §VI. 3.1 (wersja dla macierzy i dla operatorów). Diagonalizacja unitarna i ortogonalność podprzestrzeni własnych operatorów/macierzy unitarnie diagonalizowalnych. Charakteryzacja zespolonych macierzy unitarnie diagonalizowalnych (jako normalnych) i rzeczywistych macierzy ortogonalnie diagonalizowalnych (jako symetrycznych); równoważne sformułowania dla operatorów.

@@@@@@@@@@@@@@@@@@

C1) Wielomiany stopnia ≤ 2 kilku zmiennych i wyznaczone przez nie funkcje $\mathbb{F}^k \to \mathbb{F}$, jedyność wielomianu, wyznaczającego funkcję. Funkcje wielomianowe stopnia ≤ 2 na przestrzeni wektorowej; formy kwadratowe jako wielomiany i jako funkcje na przestrzeni wektorowej; macierz formy kwadratowej w obu przypadkach. Zmiana macierzy formy przy zmianie bazy wzgl. podstawieniu liniowym; kongruentność macierzy i jej podstawowe własności.

C2) Twierdzenie Lagrange'a (różne wersje).

C3) Twierdzenie o bezwładności i jego związek z badaniem funkcji kwadratowych. Klasyfikacja zespolonych i rzeczywistych form kwadratowych przy pomocy rzędu i sygnatury.

C4) Ortogonalna diagonalizacja form kwadratowych; wyrażenie sygnatury rzeczywistej macierzy symetrycznej przez jej wartości własne. Określoność rzeczywistych form kwadratowych i macierzy; kryterium Jacobiego–Sylvestera.

C5) Funkcje dwuliniowe: macierz w bazie i zmiana tej macierzy przy zmianie bazy, przeniesienie na funkcje dwuliniowe pojęcia rzędu i sygnatury (gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$). Odpowiedniość między symetrycznymi funkcjami dwuliniowymi a formami kwadratowymi. Pojęcia geometryczne, wyznaczone przez symetryczną lub antysymetryczną formę dwuliniową (ortogonalność, izometryczność, rzut ortogonalny, izotropowość).

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

D1) Definicja i własności afinicznych przestrzeni, podprzestrzeni i przekształceń. Przestrzenie afiniczne euklidesowe.

D2) Przestrzenie wektorowe jako afiniczne; ich podprzestrzenie i przekształcenia (afiniczne). Grupy $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F}), \mathrm{SL}_k(\mathbb{F}), \mathrm{O}_k, \mathrm{SO}_k$ i odpowiadające im grupy przekształceń.

D3) Funkcje kwadratowe na przestrzeniach afinicznych. Zmiana wielomianu podstawieniem afinicznym wzgl. euklidesowym, wielomiany w postaci kanonicznej afinicznie ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) czy euklidesowo ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$). Znajdywanie mapy, w której funkcji kwadratowej odpowiada taki wielomian.

D4) Kwadryki w rzeczywistych przestrzeniach afinicznych. Twierdzenie o redukcji w wersji afinicznej i euklidesowej. Podstawowe własności i rozróżnianie afiniczne kwadryk w $\mathbb{R}^3$ i stożkowych w $\mathbb{R}^2$. Znajdywanie środków kwadryk, definicja stożków i walców, prostokreślność, równania brył obrotowych w $\mathbb{R}^3$.

D5) Układy odniesienia, współrzędne barycentryczne i kartezjańskie, pochodna przekształcenia afinicznego, charakteryzacja przekształceń i podprzestrzeni afinicznych przy pomocy kombinacji barycentrycznych, zastosowanie tych kombinacji do opisu podprzestrzeni, równoległość podprzestrzeni.