II PRZESTRZENIE WSPÓLRZĘDNYCH, ICH PRZEKSZTAŁCENIA LINIOWE, MACIERZE.

Wstęp. Przypomnę, że cel tego przedmiotu, w obu semestrach, określić chcę jako badanie własności przekształceń afinicznych, w tym liniowych, z $\mathbb{F}^k$ do $\mathbb{F}^l$, dla $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Mimo prostoty podanych niżej wzorów, określających przekształcenia liniowe, wymaga to stworzenia dość bogatego aparatu algebraicznego i geometrycznego. W tym rozdziale, wzory te szybko przywiodą nas do zainteresowania się macierzami i równaniami liniowymi i do uzyskania o nich wyników, mających zarówno niezależne znaczenie, jak i pozwalających uzyskać wstępne informacje o interesujących nas przekształceniach. (Z przekształceniami afinicznymi zetkniemy się dopiero na końcu wykładu – definiowane są one tak, że do prawej strony poniższego wzoru (1) dodana jest stała $c_i \in \mathbb{F}$.)

§ 1. Przekształcenia liniowe przestrzeni współrzędnych i macierze.

1. Podstawowe definicje.

W dalszej części tego rozdziału oznaczamy przez $\mathbb{F}$ ustalone ciało i nazywamy jego elementy **skalarami**. (Najważniejsze dla nas przypadki, to gdy $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.) Dla $k \in \mathbb{N}$ przyjmujemy

$$\mathbb{F}^k := \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_k) : u_i \in \mathbb{F} \text{ dla } i = 1, ..., k\}.$$

Zbiór $\mathbb{F}^k$ nazywamy k–tą **potęgą kartezjańską** ciała $\mathbb{F}$ lub k–**wymiarową przestrzenią współrzędnych nad ciałem** $\mathbb{F}$. i–ty wyraz ciągu $\mathbf{u} \in \mathbb{F}^k$, oznaczany przez u_i lub $u(i)$, nazywamy i–tą **współrzędną kartezjańską** ciągu $\mathbf{u}$. Ciąg, którego każdy z k wyrazów jest równy 0 oznaczamy przez $\mathbf{0}_k$ lub przez $\mathbf{0}$ i nazywamy **zerowym**; przez $\mathbf{e}_i \in \mathbb{F}^k$ oznaczamy ciąg, którego i-ty wyraz jest równy 1, a pozostałe 0.

Definicja. Przekształcenie $L : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ nazywamy **liniowym**, gdy dla każdego $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$ współrzędne $w_1, ..., w_l$ ciągu $\mathbf{w} = L(\mathbf{v})$ wyrażają się wzorami

$$w_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} v_j = a_{i1} v_1 + ... + a_{ik} v_k \qquad (i = 1, ..., l) \tag{1}$$

gdzie współczynniki $a_{ij} \in \mathbb{F}$ nie zależą od $\mathbf{v}$.

Wygodnie jest ustawić w tablicę współczynniki a_{ij}, wyznaczające wzór (1).

Definicja. **Macierzą nad** $\mathbb{F}$ nazywamy tablicę postaci

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lk} \end{bmatrix} \qquad \text{(inne oznaczenie, to } \mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lk} \end{pmatrix}\text{)}$$

utworzoną z elementów $\mathbb{F}$. Piszemy wtedy $\mathbf{A}=(a_{ij})_{i,j}$ lub $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{i,j}$, zaznaczając w razie potrzeby zakresy zmienności wskaźników: $1\le i\le l$, $1\le j\le k$. O macierzy tej mówimy, że jest **rozmiaru** $l\times k$, lub że jest $l\times k$–macierzą. Skalar a_{ij} nazywamy jej (i,j)-tym **wyrazem**. Ciąg $(a_{i1},a_{i2},...,a_{ik})\in\mathbb{F}^k$ to jej i-ty **wiersz**, zaś $(a_{1j},a_{2j},...,a_{lj})\in\mathbb{F}^l$ to j-ta **kolumna**. Zbiór wszystkich $l\times k$–macierzy o wyrazach w $\mathbb{F}$ oznaczamy przez $\mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ lub, gdy $\mathbb{F}$ traktujemy jako ustalone, przez $\mathcal{M}_{l,k}$.

Z definicji, każda macierz $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ wyznacza przekształcenie liniowe z $\mathbb{F}^k$ do $\mathbb{F}^l$, zadane wzorem (1). Jego wartość na ciągu $\mathbf{v}\in\mathbb{F}^k$ oznaczamy $L_{\mathbf{A}}(\mathbf{v})$ lub $\mathbf{Av}$. Zatem:

$$\mathbf{Av}=L_{\mathbf{A}}(\mathbf{v})=(\sum_{j=1}^{k}a_{1j}v_j,...,\sum_{j=1}^{k}a_{lj}v_j)\in\mathbb{F}^l \quad \text{dla } \mathbf{v}\in\mathbb{F}^k \tag{2}$$

Będziemy też $\mathbf{Av}$ nazywać **iloczynem macierzy $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_{l,k}$ przez ciąg $\mathbf{v}\in\mathbb{F}^k$** lub wynikiem **działania** macierzy $\mathbf{A}$ na $\mathbf{v}$.

Czemu stosujemy dwa oznaczenia $L_{\mathbf{A}}(\mathbf{v})$ i $\mathbf{Av}$ dla tego samego? Gdy mowa o przekształceniu z $\mathbb{F}^k$ do $\mathbb{F}^l$, oznaczamy je $L_{\mathbf{A}}$ (co jest krótsze niż $\mathbf{v}\mapsto\mathbf{Av}$); lecz jego wartość na wektorze $\mathbf{v}$ na ogół wygodniej będzie oznaczać $\mathbf{Av}$.

Uwaga 1. a) Iloczyn $\mathbf{Av}$ istnieje tylko gdy $\mathbf{A}$ ma tyle kolumn, ile $\mathbf{v}$ ma współrzędnych.

b) Przyjmując $\mathbf{v}=\mathbf{e}_i$ w (2) stwierdzamy, że $L_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_j)=(a_{1j},...,a_{lj})$ dla $j=1,...,k$.

Ze względu na b), przekształcenie liniowe $L:\mathbb{F}^k\to\mathbb{F}^l$ jest wyznaczone przez jedną tylko macierz: tę, której kolejnymi kolumnami są $L(\mathbf{e}_1),...,L(\mathbf{e}_k)$. Nazywamy ją **standardową macierzą przekształcenia liniowego** $L:\mathbb{F}^k\to\mathbb{F}^l$ i oznaczamy $[L]$; słowo „standardową" będziemy w tym rozdziale opuszczać. Podsumowując, przekształcenie liniowe $L:\mathbb{F}^k\to\mathbb{F}^l$ jednoznacznie określa $l\times k$–macierz współczynników a_{ij}, dla których zachodzą wzory (1), i tę macierz oznaczamy przez $[L]$.

2. Działania na wektorach i charakteryzacja przekształceń liniowych $\mathbb{F}^k\to\mathbb{F}^l$.

Elementy przestrzeni współrzędnych $\mathbb{F}^k$ często nazywamy jej **wektorami**. Wektory te będziemy dodawać i mnożyć przez skalary, stosując wzory

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}:=(u_i+v_i)_{i=1}^k \ \text{ oraz } c\mathbf{u}:=(cu_i)_{i=1}^k \ \text{ dla } \ c\in\mathbb{F} \ \text{ i } \ \mathbf{u}=(u_i)_{i=1}^k,\ \mathbf{v}=(v_i)_{i=1}^k.$$

Gdy $\mathbf{v}^1, ..., \mathbf{v}^s \in \mathbb{F}^k$ i $c_1, ..., c_s \in \mathbb{F}$, to wektor $c_1\mathbf{v}^1 + ... + c_s\mathbf{v}^s$ nazywamy **kombinacją liniową** wektorów $\mathbf{v}^1, ..., \mathbf{v}^s$ **ze współczynnikami** $c_1, ..., c_s$.

Uwaga 1. Powyżej, wskaźniki $i = 1, ..., s$ przy $\mathbf{v}^i$ umieściliśmy u góry, bo oznaczenie $\mathbf{v}_i$ mogłoby sugerować, iż chodzi o i-tą współrzędną pewnego wektora $\mathbf{v}$. Nie czynimy jednak z tego reguły: gdy nie ma obawy omyłki (n.p., niżej), będziemy umieszczać u dołu indeksy numerujące pewien ciąg wektorów.

Zadanie 1. a) Wektor $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_k) \in \mathbb{F}^k$ jest równy kombinacji $\sum_{i=1}^k v_i\mathbf{e}_i$.

b) Gdy $\mathbf{A}$ jest macierzą o kolumnach $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in \mathbb{F}^l$, to iloczyn $\mathbf{Av}$ jest dla $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$ równy kombinacji $v_1\mathbf{a}_1 + ... + v_k\mathbf{a}_k$.

Podamy teraz bardzo ważną charakteryzację przekształceń liniowych:

Twierdzenie 1. *Dla przekształcenia $L : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ równoważne są warunki:*

a) L jest przekształceniem liniowym;

b) $L(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{w})$ i $L(c\mathbf{v}) = cL(\mathbf{v})$ dla (wszystkich) $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{F}^k$ i $c \in \mathbb{F}$;

c) $L(\sum_{i=1}^n c_i\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n c_iL(\mathbf{v}_i)$ dla $n \in \mathbb{N}$, $c_1, ..., c_n \in \mathbb{F}$ i $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in \mathbb{F}^k$.

<u>Dowód.</u> *a)* $\Rightarrow$ *b)*. Ta implikacja wynika wprost ze wzorów (1) i własności działań w $\mathbb{F}$.

b)$\Rightarrow$c). Latwy dowód indukcyjny (względem n) pozostawiony jest jako ćwiczenie.

c)$\Rightarrow$a). Gdy warunek c) jest spełniony, to z części a) zadania 1 wynika, że $L(\mathbf{v}) = v_1L(\mathbf{e}_1) + ... + v_kL(\mathbf{e}_k)$; natomiast z części b) zadania 1 – że $v_1L(\mathbf{e}_1) + ... + v_kL(\mathbf{e}_k) = \mathbf{Av}$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą o kolumnach $L(\mathbf{e}_1), ..., L(\mathbf{e}_k)$. Zatem $L(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$ dla $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$. $\square$

<u>Zadania ze zbioru Kostrykina:</u> w §I.2.1, zadania 1 i 2.

3. Składanie przekształceń liniowych i działania na macierzach.

Przypomnijmy, że złożeniem $F \circ G$ przekształceń $G : X \to Y$ i $F : Y \to Z$ nazywamy przekształcenie $X \to Z$, zdefiniowane wzorem $(F \circ G)(x) = F(G(x))$ dla $x \in X$.

Stwierdzenie 1. *Złożenie $K \circ L$ przekształceń liniowych $L : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ i $K : \mathbb{F}^l \to \mathbb{F}^m$ jest przekształceniem liniowym przestrzeni $\mathbb{F}^k$ w $\mathbb{F}^m$. Ponadto, gdy macierze przekształceń K i L oznaczyć przez $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, odpowiednio, to $[K \circ L] = \mathbf{C} \in \mathcal{M}_{m,k}$, gdzie*

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{l} a_{is}b_{sj} \quad \text{dla} \quad i = 1, ..., m, \; j = 1, ..., k. \tag{3}$$

<u>Dowód.</u> Niech $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$ i $\mathbf{y} := (K \circ L)(\mathbf{v}), \mathbf{w} := L(\mathbf{v})$. Z definicji, $\mathbf{y} = K(\mathbf{w}) = \mathbf{Aw}$ i $\mathbf{w} = \mathbf{Bv} = (\sum_{j=1}^k b_{sj}v_j)_{s=1}^l \in \mathbb{F}^l$. Stąd $y_i = \sum_{s=1}^l a_{is}w_s = \sum_{s=1}^l a_{is}(\sum_{j=1}^k b_{sj}v_j)$ dla $i = 1, ..., m$. Zmieniając kolejność sumowania stwierdzamy, że $y_i = \sum_{j=1}^l c_{ij}v_j$, gdzie $c_{ij} = \sum_{s=1}^l a_{is}b_{sj}$. Zatem $K \circ L$ jest przekształceniem liniowym o macierzy $[c_{ij}]_{i,j}$. $\square$

Definicja. **Iloczynem macierzy** $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,l}(\mathbb{F})$ i $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ nazywamy macierz $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{F})$ zdefiniowaną równościami (3). Odnotujmy, że iloczyn $\mathbf{AB}$ ma sens jedynie gdy $\mathbf{A}$ ma tyle kolumn, ile $\mathbf{B}$ ma wierszy. Ponadto, ij–ty wyraz macierzy $\mathbf{AB}$ zależy tylko od i–tego wiersza $\mathbf{a}_i$ macierzy $\mathbf{A}$ i j–tej kolumny $\mathbf{b}_j$ macierzy $\mathbf{B}$, i jest równy iloczynowi $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j$ gdy przyjąć

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{s=1}^{l} u_s v_s \text{ dla } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^l$$

Przykład 1. By obliczyć $(1,3)$-ci wyraz macierzy $\mathbf{AB}$, gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

zauważamy, że pierwszym wierszem macierzy $\mathbf{A}$ jest $\mathbf{a}_1 = (1,2,3)$, a trzecią kolumną macierzy $\mathbf{B}$ –wektor $\mathbf{b}_3 = (1,3,-4)$. Żądanym wyrazem jest więc $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = -5$. Tak samo obliczamy np. $(2,3)$-ci wyraz, którym jest $4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot (-4) = -5$. Zauważamy przy tym, że

Uwaga 1. j–ta kolumna macierzy $\mathbf{AB}$ jest równa $\mathbf{Ab}_j$, gdzie $\mathbf{b}_j$ to j-ta kolumna macierzy $\mathbf{B}$.

Przy użyciu mnożenia macierzy stwierdzeniu 1 można nadać następującą postać:

Stwierdzenie 1'. *Złożenie $K \circ L$ przekształceń liniowych $L : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ i $K : \mathbb{F}^l \to \mathbb{F}^m$ jest przekształceniem liniowym, przy czym $[K \circ L] = [K][L]$.*

Zadanie 1. Niech L_α oznacza obrót płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ wokół $\mathbf{0}$ o kąt zorientowany α, jak zdefiniowano je w szkole. Przyjmując liniowość L_α i równość $L_\alpha \circ L_\beta = L_{\alpha+\beta}$,
a) wyznaczyć macierz $[L_\alpha]$,
b) wyprowadzić wzór na $\cos(\alpha + \beta)$ i $\sin(\alpha + \beta)$.

Oprócz mnożenia, zdefiniujemy jeszcze następujące operacje na macierzach:

Definicja. Jeśli $\mathbf{A} = (a_{ij})$ jest $l \times k$-macierzą, to przez $\mathbf{A}^t$ oznaczamy $k \times l$-macierz, której (i,j)-tym wyrazem jest a_{ji}, dla każdego $i \in \{1, ..., k\}$ i każdego $j \in \{1, ..., l\}$. (Inaczej mówiąc, kolejnymi wierszami macierzy $\mathbf{A}^t$ są kolejne kolumny macierzy $\mathbf{A}$.) Macierz $\mathbf{A}^t$ nazywamy **macierzą transponowaną** (względem macierzy $\mathbf{A}$).

Przykład 2. Jeśli $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, to $\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Definicja. **Suma** $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ o wyrazach w $\mathbb{F}$ jest zdefiniowana tylko wtedy, gdy macierze te są tych samych rozmiarów (powiedzmy, $l \times k$) i wtedy jest równa

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} := (a_{ij} + b_{ij})_{i,j} \qquad (i = 1, ..., l, j = 1, ..., k)$$

Określmy też **iloczyn macierzy** $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ **przez skalar** c jako macierz $c\mathbf{A} := [ca_{ij}]$. Oczywiście, $c(d\mathbf{A}) = (cd)\mathbf{A}$ i $(c+d)\mathbf{A} = c\mathbf{A}+d\mathbf{A}$. A oto inne podstawowe własności omawianych operacji:

Lemat 1. *Dodawanie $l \times k$–macierzy jest przemienne i łączne.* □

Lemat 2. *Jeśli dla pewnych macierzy* $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ *zdefiniowana jest macierz stojąca po jednej ze stron którejś z poniższych równości, to zdefiniowana jest też macierz stojąca po drugiej stronie i macierze te są równe:*

(*i*) $(\mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}$;
(*ii*) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$;
(*iii*) $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$;
(*iv*) $\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$ oraz $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{B}C$;
(*iv*) $\mathbf{A}(c\mathbf{B}) = (c\mathbf{A})\mathbf{B} = c\mathbf{AB}$ dla $c \in \mathbb{F}$;
(*vi*) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Prócz (*vi*), wszystkie własności wynikają łatwo z przyjętych definicji. Własność (*vi*) też można podobnie uzasadnić, a można i następująco. Niech przekształcenia liniowe $F := L_{\mathbf{A}}$, $G := L_{\mathbf{B}}$, $H := L_{\mathbf{C}}$ będą wyznaczone przez macierze $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$, odpowiednio. Przez porównanie rozmiarów macierzy sprawdzamy, że jeśli któraś ze stron w (vi) ma sens, to ma sens i druga. Ponadto, ze stwierdzenia 1 wynika, że $[(F \circ G) \circ H] = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ i $[F \circ (G \circ H)] = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$. Jednak $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$, na mocy łączności składania przekształceń, skąd wynika vi). □

Uwaga 2. O ile możenie macierzy związane jest ze składaniem przekształceń liniowych, o tyle dodawanie ich i mnożenie przez skalar związane jest z dodawaniem i mnożeniem przez skalar przekształceń liniowych; por. zadanie na końcu tego punktu. Zrozumienie istotnego znaczenia operacji transponowania macierzy jest trudniejsze. Przez pewien czas będzie ona wykorzystywana głownie do tego, by z rezulatów dotyczących wierszy macierzy móc, poprzez zastosowanie ich do macierzy transponowanej, wnioskować o własności kolumn (i vice versa).

Uwaga 3. Dzięki łączności mnożenia z (vi), możemy zmieniać lub pomijać nawiasy w iloczynach dowolnie wielu macierzy. Np. przez różne ustawienie nawiasów możemy z $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_4$ utworzyć $\mathbf{A}_1((\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3)\mathbf{A}_4)$, $(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)(\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4)$ i jeszcze 3 inne macierze; jednak dzięki łączności mnożenia, jeśli jedna z nich istnieje, to każda inna też i jest jej równa. Tak samo jest dla iloczynów większej liczby macierzy, choć liczba możliwych ustawień nawiasów wzrasta bardzo szybko (już dla $n = 5$ wypisanie wszystkich jest mozolnym zadaniem). Dowód, taki sam jak dla mnożenia liczb całkowitych, polega na cierpliwym przestawianiu nawiasów i jest prostszy niż jego precyzyjny zapis; z tego też powodu jest tu pominięty. (Znaleźć go można w [Ko-84], str. 99.)

Ćwiczenie. Dowieść równości $\mathbf{A}_1((\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3)\mathbf{A}_4) = (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)(\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4)$.

Taka sama uwaga odnosi się do dodawania macierzy, bo i ono jest łączne (i, w odróżnieniu od mnożenia, przemienne). Dlatego nawiasy w iloczynach lub sumach macierzy wstawiamy tylko wtedy, gdy chcemy zasugerować pewną kolejność wykonywania działań; w innych przypadkach je pomijamy.

Odnotujmy, że wektor przestrzeni $\mathbb{F}^k$ nie jest macierzą: jego wyrazy są indeksowane pojedyńczymi wskaźnikami liczbowymi, a wyrazy dowolnej macierzy–parami (i, j) takich wkaźników. Wyznacza on jednak macierz, kórej jest jedynym wierszem, i macierz, której jest jedyną kolumną. W zależności od potrzeby, będziemy niekiedy wektor $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$ utożsamiali z wyznaczoną przez niego macierzą jednowierszową i nazywali **wektorem wierszowym**, a niekiedy z analogiczną macierzą jednokolumnową i nazywali **wektorem kolumnowym.** Często lepsze jest to drugie, bo

Uwaga 4. Gdy wynik działania macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$ na wektorze $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$ traktować jako wektor kolumnowy, to jest on równy iloczynowi macierzy $\mathbf{A}$ i wektora kolumnowego $\mathbf{v}$.

Przykład 3. Przyjmując w vi) za macierz $\mathbf{C}$ wektor kolumnowy wnosimy, że gdy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są macierzami, a $\mathbf{v}$ wektorem, to

$$(vii) \qquad \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{v}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{v}.$$

Zadanie 2. Dla przekształceń liniowych $K, L : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ oraz dla $c \in \mathbb{F}$ zdefiniujmy przekształcenia $K+L$ i cK wzorami $(K+L)(\mathbf{v}) := K(\mathbf{v})+L(\mathbf{v})$ i $(cK)(\mathbf{v}) := cK(\mathbf{v})$ ($\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$). Dowieść, że otrzymane przekształcenia $\mathbb{F}^k$ w $\mathbb{F}^l$ są liniowe, a ich macierze są równe $[K] + [L]$ i $c[K]$, odpowiednio.

Zadanie uzupełniające 1. Dane są macierze $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{k,l}(\mathbb{R})$ i $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$. Udowodnić, że $\mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{A}^t\mathbf{X}$ jest liczbą nieujemną. (Utożsamiamy tu każdą 1×1–macierz z jej jedynym wyrazem.)

Zadania ze zbioru Kostrykina: 1,2,3 w §I.4.1.

§ 2. Dalsze własności macierzy

Materiał w tym paragrafie jest w dużej mierze uzupełniający i podany w postaci zadań, ułatwiających nabycie niezbędnej wprawy w operowaniu macierzami.

1. Pierścień macierzy kwadratowych. (Zadania i proste własności.)

Macierze kwadratowe odgrywają szczególną rolę. Dla krótkości, o $k \times k$–macierzy mówimy, że jest **stopnia** k, a zbiór $\mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{F})$ oznaczamy przez $\mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ lub przez $\mathcal{M}_k$.

Definicja. Macierz $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_k$ jest

górnie trójkątna (odp. **dolnie trójkątna**) gdy $a_{ij} = 0$ dla $j < i$ (odp. dla $j > i$);

trójkątna, gdy jest bądź górnie, bądź dolnie trójkątna;

symetryczna gdy $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$ (czyli gdy $a_{ij} = a_{ji}$ dla $i, j \in \{1, ..., k\}$);

diagonalna, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$.

Ciągi $(a_{11}, ..., a_{kk})$ i $(a_{k1}, ..., a_{1k})$ nazywamy **przekątną główną** i **przekątną boczną** macierzy $\mathbf{A}$. Na ogół skracamy „przekątna główna" do „przekątna". Macierz diagonalną o przekątnej $(1, ..., 1)$ nazywamy **jednostkową** i oznaczamy $\mathbf{I}$ lub $\mathbf{I}_k$.

Zadanie 1. Udowodnić, że
a) Przekształcenie $\mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^k$, wyznaczone przez macierz jednostkową, jest identycznościowe (tzn. przeprowadza każdy wektor $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$ na tenże wektor).
b) $\mathbf{I}_l\mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}_k$ dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$.

Uwaga 1. Z zadania 1b) i rezultatów p.1 wynika, że $\mathcal{M}_k$ jest pierścieniem, którego jedynką jest macierz $\mathbf{I}_k$, a zerem macierz $\mathbf{0}$ o wszystkich wyrazach zerowych. Odgrywa on ważną rolę i poniższe zadania mają na celu przybliżenie niektórych jego własności.

Zadania.

2. a) Istnieją macierze $\mathbf{D}, \mathbf{J} \in \mathcal{M}_2$ takie, że $\mathbf{DJ} \neq \mathbf{JD}$ i $\mathbf{J}^2 = \mathbf{0}$, przy czym za $\mathbf{D}$ można obrać macierz diagonalną, a za $\mathbf{J}$ macierz o trzech wyrazach równych 0,

b) Podobnie, dla $k \geq 2$ mnożenie w $\mathcal{M}_k$ nie jest przemienne i istnieją niezerowe macierze, których kwadrat jest zerem.

c) W $\mathcal{M}_2$, dać wszystkie rozwiązania równania $\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}$, a także $\mathbf{X}^2 = \mathbf{0}$. Przy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, których jest skończenie wiele?

3. Niech $\mathbf{J} \in \mathcal{M}_k$ oznacza macierz, mającą jedynki bezpośrednio pod główną przekątną i zera w pozostałych miejscach.

a) Zbadać działanie przekształcenia $L_{\mathbf{J}}$ na wektorach $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_k$ i na tej podstawie wyznaczyć kolejne potęgi macierzy $\mathbf{J}$.

b) Wywnioskować, że w $\mathcal{M}_k$ istnieje macierz, której k–ta potęga jest zerowa, lecz poprzednia – niezerowa. (Nie można tu zastąpić potęgi k przez wyższą, co udowodnimy znacznie później.)

4. Jeśli $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$ są macierzami górnie trójkątnymi (odp. dolnie trójkątnymi, diagonalnymi), to $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ i $\mathbf{AB}$ również.

5. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$ będą macierzami dolnie trójkątnymi. Jeśli pierwszych l wierszy macierzy $\mathbf{B}$ i $l+1$-szy wyraz przekątnej macierzy $\mathbf{A}$ są zerowe, to pierwszych $l+1$ wierszy w $\mathbf{AB}$ jest zerowych.

6. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ będą macierzami symetrycznymi, tzn. takimi, że $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$ i $\mathbf{B} = \mathbf{B}^t$. Wówczas:

a) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ jest macierzą symetryczną;

b) $\mathbf{AB}$ wtedy i tylko wtedy jest macierzą symetryczną, gdy $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. (Patrz lemat 2iii) w §1.3.)

7. Jeśli $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, gdzie $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są macierzami górnie trójkątnymi, to $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$ dla $i = 1, 2, ..., k$; podobnie, gdy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są macierzami dolnie trójkątnymi.

8. Jeśli $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są macierzami diagonalnymi, to $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

9. Niech $\mathbf{D}$ będzie $k \times k$ –macierzą diagonalną, której wyrazy stojące na przekątnej są parami różne.

a) Znaleźć wszystkie macierze $\mathbf{A}$ takie, że $\mathbf{AD} = \mathbf{DA}$.

b) Dowieść, że macierz, której główna przekątna jest zerowa, jest postaci $\mathbf{BD} - \mathbf{DB}$ dla pewnej macierzy $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$.

10. Niech G będzie zbiorem 2×2-macierzy, zamkniętym ze względu na mnożenie i takim, że każda macierz $(a_{ij}) \in G$ spełnia warunek $a_{11} = a_{22}$. Wówczas albo G składa się z macierzy dolnie trójkątnych, albo istnieje skalar K taki, że $a_{21} = Ka_{12}$ dla każdej macierzy $(a_{ij}) \in G$.

<u>Definicja.</u> Suma wszystkich wyrazów głównej przekątnej macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ nazywana jest **śladem** $\mathbf{A}$ i oznaczana $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$, od angielskiego „trace".

11. a) $\mathrm{tr}(a\mathbf{A}+b\mathbf{B}) = a\mathrm{tr}(\mathbf{A})+b\mathrm{tr}(\mathbf{B})$ dla macierzy kwadratowych $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ tego samego rozmiaru i $a, b \in \mathbb{F}$.

b) $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$ gdy oba iloczyny $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{BA}$ istnieją (tzn. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{lk}$ i $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{kl}$ dla pewnych k, l).

c) Gdy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k} \setminus \{\mathbf{0}\}$, to $\mathrm{tr}(\mathbf{AY}) = 0 = \mathrm{tr}(\mathbf{XA})$ dla pewnych $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{M}_{kl} \setminus \{\mathbf{0}\}$.

<u>Definicja.</u> Dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ i dla $p = a_0 + a_1x + ...a_sx^s \in \mathbb{F}[x]$ przyjmijmy

$$p(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{I}_k + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + ... + a_s\mathbf{A}^s$$

<u>Ćwiczenie.</u> Wyznaczyć $p(\mathbf{A})$, gdy

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $p = x^3 + x^2 + 1$, b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $p = x^2 - (a+d)x + ad - bc$.

Zadania.

12. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ i $p, q \in \mathbb{F}[x]$.

a) $(p(\mathbf{A}))^t = p(\mathbf{A}^t)$.
b) Jeśli macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ są **przemienne**, tzn. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, to $p(\mathbf{A})$ i $q(\mathbf{B})$ też są.
c)$(pq)(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A})q(\mathbf{A})$ i analogicznie dla iloczynu większej liczby wielomianów.

13. Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą (górnie) trójkątną o przekątnej $(c_1, ..., c_k)$. Wykazać, że dla $p \in \mathbb{F}[x]$ macierz $p(\mathbf{A})$ jest (górnie) trójkątna i jej przekątną jest $(p(c_1), ..., p(c_k))$.

Zadania uzupełniające.

1. Które macierze kwadratowe są przemienne z każdą inną tego samego stopnia? (Wskazówka: zad. 9a).)

2. Niech macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{l,k}$ mają tę własność, że dla każdego $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$ wektor $\mathbf{Bv}$ jest proporcjonalny do $\mathbf{Av}$. Dowieść, że $\mathbf{B} = \lambda\mathbf{A}$ dla pewnego skalara λ.

3. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ będą macierzami kwadratowymi tego samego stopnia. Dowieść, że wyraz d_{ij} macierzy $\mathbf{D} := \mathbf{ABC}$ jest równy $\mathbf{a}_i\mathbf{B}\mathbf{c}_j$, gdzie $\mathbf{a}_i$ to i–ty wiersz macierzy $\mathbf{A}$, zaś $\mathbf{c}_j$ to j-ta kolumna macierzy $\mathbf{C}$. Jak wyraża się $\mathrm{tr}(\mathbf{C}^t\mathbf{BC})$ przez $\mathbf{B}$ i wiersze macierzy $\mathbf{C}$?

4. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_2$. Dowieść, że:
a) $\mathrm{tr}(\mathbf{B})\mathbf{A} + \mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathbf{B} - \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = (\mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathrm{tr}(\mathbf{B}) - \mathrm{tr}(\mathbf{AB}))\mathbf{I}$;
b) $(\mathrm{tr}(\mathbf{A}))^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A}^2) = 2\det(\mathbf{A})$, gdzie det to wyznacznik, zdefiniowany dalej w uwadze 2 w §5.1;
c) $2\mathrm{tr}(\mathbf{ABC}) = \mathrm{tr}(\mathbf{AB})\mathrm{tr}(\mathbf{C}) + \mathrm{tr}(\mathbf{BC})\mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{tr}(\mathbf{AC})\mathrm{tr}(\mathbf{B}) - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathrm{tr}(\mathbf{B})\mathrm{tr}(\mathbf{C})$; w szczególności, $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^3) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathbf{A})[3\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2) - (\mathrm{tr}(\mathbf{A}))^2]$. (Wskazówka: część a)).
(Nie znam odpowiedników tych tożsamości dla macierzy większych rozmiarów.)

Zadania ze zbioru Kostrykina: z §I.4.1: 4a),4b),5,6,9,15,16; z §I.4.3: 1,5,7,8,11,14,17*,21.

2. * 2×2–**macierze a kwaterniony (zadania uzupełniające).**

1. * Dla $a, b \in \mathbb{C}$ oznaczmy przez $\mathbf{Q}(a, b) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ macierz o pierwszej kolumnie (a, b) i drugiej $(-\overline{b}, \overline{a})$. Niech $\mathbb{H}' := \{\mathbf{Q}(a, b) : \ a, b \in \mathbb{C}\}$. Dowieść, że:
a) Zbiór $\mathbb{H}'$ jest zamknięty tak względem mnożenia macierzy, jak i ich dodawania.
b) Każdy element $\mathbb{H}' \setminus \{\mathbf{0}\}$ jest odwracalny w $\mathbb{H}'$ i odwrotnością $\mathbf{Q}(a, b)$ jest $\frac{1}{|a|^2+|b|^2}\mathbf{Q}(\overline{a}, -b)$.
c) Każdą macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{H}'$ można w dokładnie jeden sposób przedstawić w postaci $\mathbf{A} = t\mathbf{I} + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, gdzie $t, x, y, z \in \mathbb{R}$ oraz

$$\mathbf{i} := \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} := \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

d) $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{I}$.

e) $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k},\ \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i},\ \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$

2. * Zdefiniujmy $\mathbb{H}$ jako zbiór wyrażeń postaci $v := v_0 + v_1 i + v_2 j + v_3 k$, gdzie $v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$, a i, j, k są ustalonymi symbolami. Elementy $\mathbb{H}$ nazywamy **kwaternionami**; dodajemy je i mnożymy jak wyrażenia algebraiczne, przyjmując jednak $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ oraz $ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j$.

a) Określmy przekształcenie $\Phi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}'$ wzorem $\Phi(v) := v_0\mathbf{I} + v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ dla $v \in \mathbb{H}$. Dowieść, że Φ jest bijekcją, zachowującą działania dodawania i mnożenia.

b) Wykorzystując a) i poprzedzające zadanie dowieść, że $\mathbb{H}$ z opisanymi wyżej działaniami jest **ciałem nieprzemiennym** – czyli spełnia warunki definicji ciała, prócz przemienności mnożenia. (Warto odnotować, jak łatwo uzyskano nieoczywistą skądinąd własność łączności mnożenia!)

3. * Dowieść, że 2×2–macierz zespolona, przemienna z każdą z macierzy $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, jest **skalarna** (tzn. postaci $z\mathbf{I}$, gdzie $z \in \mathbb{C}$). Stąd gdy $v_0 + v_1 i + v_2 j + v_3 k$ jest kwaternionem przemiennym z i, j i k, to $v_n = 0$ dla $n = 1, 2, 3$.

3. *Klatki macierzy.

Podmacierzą macierzy $\mathbf{A}$ nazywamy macierz, powstałą z $\mathbf{A}$ przez wykreślenie pewych wierszy i kolumn; mówimy, że podmacierz jest **wyznaczona** przez wiersze i kolumny, których nie wykreślono. Podmacierz wyznaczoną przez pewien zbiór <u>kolejnych</u> kolumn i pewien zbiór <u>kolejnych</u> wierszy nazywamy **klatką**.

<u>Przykład 1.</u>

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \cancel{2} & 3 & \cancel{4} \\ \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{7} & \cancel{8} \\ -1 & -\cancel{2} & -3 & -\cancel{4} \\ -5 & -\cancel{6} & -7 & -\cancel{8} \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$ – podmacierz wyznaczona przez wiersze 1, 3, 4 i kolumny 1 i 3,

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} \\ \cancel{5} & 6 & 7 & \cancel{8} \\ -\cancel{1} & -2 & -3 & -\cancel{4} \\ -\cancel{5} & -6 & -7 & -\cancel{8} \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -3 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}$ – klatka wyznaczona przez wiersze 2, 3, 4 i kolumny 2 i 3.

Czasem macierz zadana będzie przez zaznaczenie położenia pewnych jej znanych klatek. Na przykład, jeśli $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$, to $\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$ oznacza macierz $\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right]$. Rozmiarów klatek $\mathbf{I}$ oraz $\mathbf{0}$ należy się domyśleć –muszą być zgodne z rozmiarami klatek $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$. Macierz podzieloną na klatki pewnym układem poziomych i pionowych linii nazywamy **macierzą podzieloną na klatki** lub **macierzą blokową**. Zaznaczanie linii nie jest konieczne –pomagają one tylko przekazać informację o tym, jakie klatki wyróżniamy.

Przy dodawaniu i mnożeniu, klatki zachowują się podobnie jak wyrazy macierzy:

Stwierdzenie 1. *Niech* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *będą macierzami podzielonymi na klatki:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & ... & \mathbf{A}_{1k} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & ... & \mathbf{A}_{2k} \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{A}_{l1} & \mathbf{A}_{l2} & ... & \mathbf{A}_{lk} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & ... & \mathbf{B}_{1q} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & ... & \mathbf{B}_{2q} \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{B}_{p1} & \mathbf{B}_{p2} & ... & \mathbf{B}_{pq} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

i) Jeśli $l = p$ *oraz* $k = q$ *i dla każdych* i, j *suma* $\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}$ *istnieje, to istnieje też suma* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ *oraz ma miejsce podział na klatki:*

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{12} & ... & \mathbf{A}_{1k} + \mathbf{B}_{1k} \\ \mathbf{A}_{21} + \mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22} + \mathbf{B}_{22} & ... & \mathbf{A}_{2k} + \mathbf{B}_{2k} \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{A}_{l1} + \mathbf{B}_{l1} & \mathbf{A}_{l2} + \mathbf{B}_{l2} & ... & \mathbf{A}_{lk} + \mathbf{B}_{lk} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

ii) Jeśli $k = p$ *oraz dla każdych wskaźników* $i \in \{1, ..., l\}, s \in \{1, ..., k\}, j \in \{1, ..., q\}$ *iloczyn* $\mathbf{A}_{is}\mathbf{B}_{sj}$ *istnieje, to istnieje też iloczyn* $\mathbf{AB}$ *i ma miejsce podział na klatki*

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & ... & \mathbf{C}_{1q} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & ... & \mathbf{C}_{2q} \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{C}_{l1} & \mathbf{C}_{l2} & ... & \mathbf{C}_{lq} \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } \mathbf{C}_{ij} = \sum_{s=1}^{k} \mathbf{A}_{is}\mathbf{B}_{sj} \text{ dla } i, j \text{ jak wyzej.} \tag{6}$$

<u>Ćwiczenie.</u> Wykorzystując zaznaczony podział macierzy $\mathbf{A}$ na klatki wyznaczyć $\mathbf{AA}^t$, gdy

$$\mathbf{A} := \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Przejdźmy do dowodu części ii) stwierdzenia. (Częśc i) jest oczywista,)

Zadanie 1. Teza ii) jest prawdziwa i wynika bezpośrednio z definicji iloczynu macierzy, gdy a) $k = q = 1$, lub b) $l = k = 1$, lub c) $l = 1 = q$. (Przypominamy, że z założenia $p = k$.)

Przy oznaczeniach (4) niech teraz

$$\mathbf{A}_i := [\mathbf{A}_{i1}\ \ldots\ \mathbf{A}_{ik}], \qquad \mathbf{B}_j := \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1j} \\ \mathbf{B}_{2j} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \mathbf{B}_{kj} \end{bmatrix} \text{ dla } i = 1, \ldots, l \text{ oraz } j = 1, \ldots, q.$$

Wówczas zachodzą równości (ostatnia wynika z części a) zadania):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \mathbf{A}_l \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_1\ \ldots\ \mathbf{B}_q], \qquad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1\mathbf{B} \\ \mathbf{A}_2\mathbf{B} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \mathbf{A}_l\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Następnie, z części b) zadania:

$$\mathbf{A}_i\mathbf{B} = [\mathbf{A}_i\mathbf{B}_1\ \mathbf{A}_i\mathbf{B}_2\ \ldots\ \mathbf{A}_i\mathbf{B}_q] \text{ dla } \ i = 1, \ldots, l. \tag{8}$$

Wreszcie z części c) zadania oraz określenia $\mathbf{A}_i$ i $\mathbf{B}_j$ otrzymujemy $\mathbf{A}_i\mathbf{B}_j = \sum_{s=1}^{k} \mathbf{A}_{is}\mathbf{B}_{sj}$ dla $i = 1, \ldots, l$ oraz $j = 1, .., q$. Wraz z (7) i (8) kończy to dowód. □

Podział macierzy na klatki może zmniejszyć koszt obliczeń wykonywanych przy mnożeniu macierzy. Interesujące zadanie na ten temat jest w [Ko-Ma] na str. 38-39.

<u>Zadanie uzupełniające 1.</u> Odowodnić, że gdy poniższe podziały klatkowe mają sens i klatki $\mathbf{P}$ i $\mathbf{S}$ są rozmiarów $k \times k$ i $l \times l$, odpowiednio, to $\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{XP} & \mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{X} & \mathbf{I}_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} - \mathbf{XQ} \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{PY} \\ \mathbf{XP} & \mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{X} & \mathbf{I}_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} - \mathbf{XPY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_l \end{bmatrix}$.

§ 3. Układy równań liniowych.

Już wyznaczenie zbioru wektorów, które danym przekształceniem liniowym płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ przeprowadzane są na $\mathbf{0}$, wymaga rozwiązania układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi. W tym paragrafie zajmiemy się badaniem układów równań liniowych i wnioskami, które z tego płyną dla teorii macierzy; do związków zaś z przekształceniami liniowymi powrócimy w końcowych paragrafach 4 i 5. Oczywiście, równania liniowe występują też w wielu zagadnieniach nie związanych z przekształcenimi liniowymi (przynajmniej w swych sformułowaniach).

1. Układ równań liniowych i jego zbiór rozwiązań.

Definicja. **Równaniem liniowym** w $\mathbb{F}^k$ nazywamy wyrażenie $a_1x_1 + ... + a_kx_k = b$, gdzie $a_1, ..., a_k, b \in \mathbb{F}$. Układ l równań liniowych w $\mathbb{F}^k$ zapisujemy tak:

$$(U) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2k}x_k = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + ... + a_{lk}x_k = b_l \end{cases}$$

gdzie $a_{ij},\ b_i \in \mathbb{F}$ dla $1 \leq i \leq l$ oraz $1 \leq j \leq k$. Mówimy, że

symbole $x_1, ..., x_k$ to **niewiadome** lub **zmienne** układu;

układ (U) jest **jednorodny**, gdy $b_1 = b_2 = ... = b_l = 0$;

$a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ik}$ to **współczynniki** i-tego równania, a b_i to jego **stała**;

i–te równanie jest **zerowe**, gdy $a_{i1} = a_{i2} = ... = a_{ik} = b_i = 0$.

Rozwiązaniem układu (U) w nazywamy każdy ciąg $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_k) \in \mathbb{F}^k$ taki, że $\sum_{j=1}^k a_{ij}v_j = b_i$ dla $i = 1, 2, ..., l$. Gdy rozwiązań nie ma, układ nazywamy **sprzecznym**. Układ jednorodny jest niesprzeczny: rozwiązaniem jest $\mathbf{0}_k$.

Zadanie rozwiązania układu (U) polega na podaniu opisu **zbioru rozwiązań**:

$$R = \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k : \mathbf{v} \text{ jest rozwiązaniem układu } (U)\} \tag{9}$$

Uwaga 1. Zwyczajowo, wyrazenia $0x_j$ w (U) pomijamy. Powoduje to jednak, że zbiór rozwiązań zależy od tego, w której z przestrzeni $\mathbb{F}^k$ $(k \in \mathbb{N})$ układ jest rozpatrywany. Dla przykładu, zbiór rozwiązań pojedyńczego równania $x_1 = 0$ jest punktem $0 \in \mathbb{R}$, gdy rozpatrujemy je w $\mathbb{R}$, prostą $\{(0, x_2) :\ x_2 \in \mathbb{R}\}$, gdy rozpatrujemy je w $\mathbb{R}^2$, oraz płaszczyzną $\{(0, x_2, x_3) :\ x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, gdy rozpatrywane jest w $\mathbb{R}^3$.

Ćwiczenie. Jakie zbiory zadają w $\mathbb{R}^3$ równania: a) $0 = 0$, b) $0 = 1$, c) $x_1 = x_2 = 1$.

Z układem (U) zwiążemy macierz $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$, zwaną **macierzą współczynników** tego **układu** (U), oraz **wektor stałych** $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_l) \in \mathbb{F}^l$. Pełną informację o układzie daje **macierz rozszerzona**, powstała z $\mathbf{A}$ przez dopisanie wektora kolumnowego $\mathbf{b}$ i oznaczana przez $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$.

Układ równań (U) będziemy często zapisywać w postaci skróconej następująco:

$$(U)' \qquad\qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

gdzie $\mathbf{x}$ oznacza zespół niewiadomych $(x_1, ..., x_k)$.

Zadanie uzupełniające 1. Niech $\mathbf{v}$ będzie rozwiązaniem układu równań o rozszerzonej macierzy $[\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_k|\mathbf{b}]$ (wskazano kolejne kolumny). Znaleźć rozwiązanie układu, zadanego macierzą rozszerzoną: a) $[\mathbf{a}_1 + c\mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_2\ \dots\ \mathbf{a}_k|\mathbf{b}]$, b) $[c\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \dots\ \mathbf{a}_k|\mathbf{b}]$, c) $[\mathbf{a}_1\ \dots\ \mathbf{a}_k|c\mathbf{b}]$, d) $[\mathbf{a}_1\ \dots\ \mathbf{a}_k|\mathbf{b} + c\mathbf{a}_1]$.

Zadania ze zbioru Kostrykina: §I.2.3, zadanie 15.

2. Operacje elementarne i doprowadzanie macierzy do postaci schodkowej.

Znana ze szkoły (dla małych k i l) metoda rozwiązywania układu (U) polega na rugowaniu niewiadomych przez wykonywanie następujących operacji:

a) dodanie do pewnego równania innego, pomnożonego przez skalar, oraz

b) pomnożenia jakiegoś równania (stronami) przez skalar różny od zera.

Dla wygody zapisu dołączmy tu jeszcze operację zamiany miejscami dowolnej pary równań układu. Ponadto, wypisywanie kolejnych otrzymywanych układów równań zastąpić chcemy podawaniem ich rozszerzonych macierzy. Celowe jest więc wprowadzenie następujących transformacji macierzy:

Definicja. **Elementarną operacją** na wierszach macierzy $\mathbf{M}$ nazywamy

(I) Dodanie do pewnego wiersza macierzy innego wiersza, pomnożonego przez skalar. (Jeśli do wiersza o numerze p dodajemy c–krotność wiersza o numerze q, i chcemy to zaznaczyć, to piszemy $\mathbf{M} \xrightarrow{[p]+c[q]} \mathbf{N}$, gdzie $\mathbf{N}$ to otrzymana macierz.)

(II) Pomnożenie pewnego wiersza macierzy przez skalar różny od zera. (Jeśli mnożymy wiersz p przez skalar c, to piszemy $\mathbf{M} \xrightarrow{c[p]} \mathbf{N}$.)

(III) Zamianę miejscami pary wierszy. (Jeśli zamieniane są wiersze o numerach p i q, to piszemy $\mathbf{M} \xrightarrow{([p],[q])} \mathbf{N}$.)

Gdy nie chcemy zaznaczać, o którą z tych operacji chodzi, piszemy $\mathbf{M} \to \mathbf{N}$.

Powyższe operacje elementarne nazwiemy **wierszowymi**; słowo „elementarne” będziemy często opuszczać. Podobne operacje, wykonywane na kolumnach, nazwiemy **kolumnowymi**.

Przykład 1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{[1]+10[2]} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{7[3]} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \\ -7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{([2],[3])} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 13 \\ -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}'$$

Zadanie 1. a) Jeśli $\mathbf{A}'$ można otrzymać z $\mathbf{A}$ przez wykonanie operacji wierszowych, to $\mathbf{A}$ można na tej drodze otrzymać z $\mathbf{A}'$. (Wskazówka: rozpatrzeć przypadek, gdy wykonujemy tylko jedną operację.)

b)* Otrzymać operację typu (III) wykonując kolejno kilka pozostałych operacji.

Definicja. Układy równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ i $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ są **równoważne**, gdy mają te same zbiory rozwiązań.

Zauważmy, że równoważne układy mają tyle samo niewiadomych.

Lemat 1. *Jeśli rozszerzoną macierz* $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ *układu* (U) *zmienić operacjami wierszowymi, to otrzymana macierz* $[\mathbf{A}'|\mathbf{b}']$ *wyznaczy układ* $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ *równoważny wyjściowemu.*

Dowód. Niech R oznacza zbiór rozwiązań wyjściowego, a R' -zmienionego układu równań. Ze względu na opisaną w zadaniu 1a) symetrię wystarcza pokazać, że $R \subset R'$. Dowód tej inkluzji sprowadza się do przypadku, gdy wykonujemy tylko z jedną operację, a wtedy jest on oczywisty. ⊟

Uwaga 1. Przy oznaczeniach lematu, jeśli $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, to $\mathbf{b}' = \mathbf{0}$.

Definicja. a) **Wyraz prowadzący** ciągu $(u_i)_{i=1}^k \in \mathbb{F}^k \setminus \{\mathbf{0}\}$ to najwcześniejszy niezerowy jego wyraz.

b) O macierzy $\mathbf{A}$ powiemy, że jest **wierszowo półzredukowana** (lub: **schodkowa**), gdy wyrazy prowadzące kolejnych jej niezerowych wierszy występują w coraz to dalszych kolumnach i każdy niezerowy wiersz poprzedza każdy z wierszy zerowych.

c) Gdy ponadto wszystkie wyrazy prowadzące wierszy są równe 1, a kolumny, w których występują, zawierają poza nimi same zera, to macierz $\mathbf{A}$ jest **wierszowo zredukowana** (lub: w postaci **normalnej Hermite'a**).

W dalszej części, będziemy słowo „wierszowo" opuszczać.

Przykład 2. (Wytłuszczone są wyrazy prowadzące wierszy.)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Spośród tych macierzy, schodkowe są trzy ostatnie, a zredukowana tylko czwarta.

Lemat 2. *Każdą macierz można przeprowadzić w schodkową przez kolejne wykonanie pewnych operacji wierszowych (a nawet operacji wyłącznie typu I).*

Dowód. Zastosujemy indukcję względem liczby niezerowych kolumn. Można postępować tak:

i) Obrać najwcześniejszą niezerową kolumnę wyjściowej macierzy; niech ma ona numer p.

ii) Przez dodanie odpowiedniego wiersza do pierwszego uczynić pierwszy wyraz kolumny p niezerowym. (Być może nic nie trzeba robić, a prostsza może być zamiana tych wierszy.)

iii) Przez odjęcie odpowiednich krotności pierwszego wiersza otrzymanej macierzy od następnych jej wierszy, wyzerować wszystkie wyrazy kolumny p, poza pierwszym.

iv) W powstałej macierzy pominąć pierwszy wiersz i pierwszych p kolumn i postępować dalej w ten sam sposób (inaczej mówiąc, wykorzystać założenie indukcyjne). $\square$

Lemat 3. *Przy pomocy operacji typu I i II można macierz schodkową przeprowadzić w zredukowaną, bez zmiany miejsc, w których występują wyrazy prowadzące wierszy.*

Dowód. Wystarczy wykonać następujące operacje:

v) Pomnóżyć niezerowe wiersze rozważanej macierzy przez odpowiednie skalary, by uczynić wyrazy prowadzące wierszy równymi 1.

vi) Kolejno, dla $i = 2, ..., r$ (gdzie r to liczba niezerowych wierszy) odjąć odpowiednie krotności wiersza i od poprzedzających. $\boxminus$

Wniosek 1. *Zadana macierz* $\mathbf{A}$ *jest* **wierszowo równoważna** *macierzy zredukowanej* $\mathbf{N}$*, tzn. istnieje ciąg macierzy* $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}, \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n = \mathbf{N}$ *takich, że każda z macierzy* $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n$ *powstaje przez wykonanie pewnej operacji wierszowej na macierzy poprzedzającej.*

Powyższą macierz $\mathbf{N}$ nazwiemy **postacią zredukowaną** lub **normalną** macierzy $\mathbf{A}$. Podobnie, dzięki lematowi 2 możemy mówić o **postaci schodkowej** macierzy $\mathbf{A}$. [1]

Przykład 3. (Przerywaną linią poziomą odcięto rozważaną w następnym kroku klatkę, a tłustym drukiem zaznaczono kolumny czy też wyrazy istotne dla niektórych kroków. (Ostatnie 2 kroki są jak opisano w dowodzie lematu 3, a wcześniejsze – lematu 2.)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -1 & 5 & 12 & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & 2 & 4 & -6 & 2 \\ \mathbf{1} & 2 & -2 & 3 & 15 & 0 \\ \mathbf{2} & 4 & 1 & 16 & 15 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 6 & -9 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{N}_0 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & \mathbf{-1} & 5 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{N}$$

Zadanie uzupełniające 1. Udowodnić, że wykonując wyłącznie operacje wierszowe typu (I) można daną macierz przeprowadzić w macierz różniącą się od zredukowanej tylko tym, że wyrazem prowadącym jej ostatniego niezerowego wiersza niekoniecznie jest 1.

[1] Postać schodkowa nie jest jedyna, zaś zredukowana jest, co za Hermitem zauważymy w następnym rozdziale. Z jednoznaczności tej jednak nie będziemy korzystać, poza przypadkiem macierzy niesobliwych, omówionym w §5.1.

3. Metoda rugowania niewiadomych

Metoda ta, ujęta w pewien schemat przez Gaussa, polega na zastąpieniu układu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ układem $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$, gdzie $\mathbf{A}'$ jest postacią schodkową, lub zredukowaną, macierzy $\mathbf{A}$. Ponieważ układy te są równoważne, więc pozostaje zająć się układami o schodkowej macierzy współczynników.

Definicja. Gdy macierz $\mathbf{A}$ układu równań $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jest schodkowa i jej j–ta kolumna zawiera wyraz prowadzący pewnego wiersza, to tak tę kolumnę, jak i niewiadomą x_j nazywamy **prowadzącymi**. Pozostałe niewiadome i kolumny nazwiemy **wtórnymi**.

Twierdzenie 1. *Niech w układzie równań* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *o schodkowej macierzy* $\mathbf{A}$ *nie występują równania postaci* $0 = b_i$*, gdzie* $b_i \neq 0$*. Wówczas układ jest niesprzeczny i każde jego rozwiązanie jest jednoznacznie wyznaczone przez wartości niewiadomych wtórnych, a te mogą być dowolne. (Gdy nie ma niewiadomych wtórnych oznacza to, że rozwiązanie jest jedyne.)*

Dowód. Załóżmy wpierw, że macierz $\mathbf{A}$ jest zredukowana. Wtedy każda niewiadoma prowadząca występuje w jednym równaniu układu, ze współczynnikiem 1. (Gra rolę brak równań $0 = b_i$, gdzie $b_i \neq 0$.) Pozostawmy te niewiadome po lewych stronach, a pozostałe wyrażenia $a_{ij}x_j$ przenieśmy na strony prawe; równania zaś $0 = 0$ (jeśli takie są) pomińmy. Zakładając dla ustalenia uwagi, że wtórnymi są niewiadome $x_{r+1}, ..., x_k$, otrzymujemy następujący układ równań, równoważny wyjściowemu

$$x_i = b_j - \sum_{j=r+1}^{k} a_{ij}x_j \text{ dla } i = 1, ..., r. \tag{10}$$

Nadając niewiadomym wtórnym zadane wartości $v_{r+1}, ..., v_k$, a wcześniejsze wyznaczając zgodnie z (10), otrzymujemy jedyne rozwiązanie $\mathbf{v}$ takie, że v_j jest jego j–tą współrzędną dla $j = r + 1, ..., k$.

Przypadek schodkowej macierzy $\mathbf{A}$ sprowadzamy do powyższego, redukując klatkę $\mathbf{A}$ macierzy $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ w oparciu o lemat 3 z p.2. $\square$

Wniosek 1. *Układ* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *o schodkowej macierzy* $\mathbf{A}$ *wtedy i tylko wtedy jest niesprzeczny, gdy nie występuje w nim równanie postaci* $0 = b_i$ *dla* $b_i \neq 0$*. Układ ten ma jedyne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy jest niesprzeczny i macierz* $\mathbf{A}$ *nie ma kolumn wtórnych.* $\square$

Wniosek 2. *Układ* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *ma rozwiązanie niezerowe wtedy i tylko wtedy, gdy postać schodkowa* $\mathbf{A}'$ *macierzy* $\mathbf{A}$ *ma kolumny wtórne.*

Dowód. Wynika to z wniosku 1, zastosowanego do równoważnego układu $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Wniosek 3. *a) Gdy* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$ *i* $l < k$*, to układ* $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}_l$ *ma rozwiązanie niezerowe.*
b) Dla $l < k$ *nie istnieje różnowartościowe przekształcenie liniowe* $\mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$*.*

Dowód. a) Wynika to z wniosku 2, bo postać schodkowa $\mathbf{A}'$ macierzy $\mathbf{A}$, mając więcej kolumn niż wierszy, musi mieć kolumny wtórne.

b) Niech przekształcenie liniowe $L : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ będzie liniowe i niech $\mathbf{A} = [L]$. Jeśli $l < k$, to $\mathbf{Av} = \mathbf{0}_l$ dla pewnego niezerowego wektora $\mathbf{v}$. Zachodzi więc $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_l = L(\mathbf{0}_k)$, gdzie $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_k$, tzn. przekształcenie L nie jest różnowartościowe. $\square$

Przykład 1. Rozwiążemy układ równań:

$$(u) \qquad \begin{cases} x + 2y - z + 5p + 12q = 1 \\ 2z + 4p - 6q = 2 \\ x + 2y - 2z + 3p + 15q = 0 \\ 2x + 4y + z + 16p + 15q = 5 \end{cases}$$

Jego rozszerzoną macierzą jest macierz $\mathbf{M}$ z przykładu 2 w p.2. Korzystając z lematu z p.1 stwierdzamy więc, że jest on równoważny układowi następującemu:

$$(u') \qquad \begin{cases} x + 2y + 7p + 9q = 2 \\ z + 2p - 3q = 1 \end{cases}$$

Pozostaje rozwiązać układ (u'), którego macierz współczynników jest zredukowana. Pozostawienie po jednej stronie tylko niewiadomych prowadzących, zgodnie z dowodem twierdzenia, daje $x = 2 - 2y - 7p - 9q$ i $z = 1 - 2p + 3q$. Stąd $R = \{(x, y, z, p, q) \in \mathbb{R}^5 : (2 - 2y - 7p - 9q, y, 1 - 2p + 3q, p, q) : y, p, q \in \mathbb{R}\}$.

Zadanie uzupełniające 1. Układ równań liniowych wtedy i tylko wtedy jest sprzeczny, gdy 0=1 jest kombinacją liniową jego równań. (t.j. istnieją skalary c_i takie, że po pomnożeniu pierwszgo równania układu przez c_1, drugiego przez c_2 itd. i dodaniu otrzymanych równań, otrzymujemy równanie $0 = 1$).

Zadania ze zbioru Kostrykina: z §I.2.3: 3,6 (zaniedbać polecenie o wzorach Cramera), 7,8,9,10.

4. Opis zbioru rozwiązań

Definicja. **Rozwiązaniem ogólnym** układu równań liniowych w $\mathbb{F}^k$ nazywamy każdą różnowartościową funkcję $f : T \to \mathbb{F}^k$, gdzie T jest dowolnym zbiorem, taką, że $f(T)$ jest zbiorem rozwiązań rozważanego układu. Jak dla każdej funkcji, w miejsce „$f : T \to \mathbb{F}^k$ ” piszemy też „$f(t)$ $(t \in T)$” lub „$T \ni t \mapsto f(t)$”, jak wygodniej.

Gdy T jest zbiorem skończonym (co ma miejsce, gdy $\#\mathbb{F} < \infty$) możemy o rozwiązaniu ogólnym myśleć jako o liście, na której każde rozwiązanie pojawia się jeden raz. W pozostałym przypadku też możemy tak myśleć, lecz lista jest nieskończona.

Nie zawsze rozwiązanie ogólne przekazuje użyteczne informacje. Dlatego będziemy dążyć do tego, by dziedzina T funkcji f była postaci $\mathbb{F}^s$ dla pewnego s, a funkcja f była zadana prostymi wzorami.

Przykład 1. Rozważmy ponownie układ równań z przykładu 1 z p.3. Dowiedliśmy, że za rozwiązanie ogólne można przyjąć $\mathbb{R}^3 \ni (y,p,q) \mapsto (2-2y-7p-9q, y, 1-2p+3q, p, q)$. (Dlaczego funkcja ta jest różnowartościowa?) Rozwiązanie to można zapisać tak:

$$(x,y,z,p,q) = (2,0,1,0,0) + y(-2,1,0,0,0) + p(-7,0,-2,1,0) + q(-9,0,3,0,1)$$

gdzie $y,p,q \in \mathbb{R}$. $\square$

Okazuje się, że każdy układ równań liniowych ma rozwiązanie ogólne takiej postaci:

Twierdzenie 1. *Niesprzeczny układ równań linowych w $\mathbb{F}^k$ ma rozwiązanie ogólne postaci*

$$\mathbf{w} + c_1\mathbf{w}_1 + ... + c_s\mathbf{w}_s \quad (c_1, ..., c_s \in \mathbb{F}),$$

dla pewnej liczby $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i pewnych wektorów $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_s \in \mathbb{F}^k$.

Dodatek: *Można uzyskać, by współrzędne tych wektorów należały do każdego podciała ciała $\mathbb{F}$, które zwiera wszystkie współczynniki i prawe strony układu.*

Dowód. Zredukujmy klatkę $\mathbf{A}$ rozszerzonej macierzy $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ badanego układu, otrzymując układ $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ równoważny wyjściowemu. Możemy założyć, że kolumny wtórne macierzy $\mathbf{A}'$ występują na końcowych miejscach $r+1, ..., k$. (Gdy tak nie jest, zmieniamy numerację niewiadomych.)

Z dowodu twierdzenia 1 w p.3 wiemy, że każde rozwiązanie jest postaci $\mathbf{v} = (b'_1 - \sum_{p>r} a'_{1p}v_p, ..., b'_r - \sum_{p>r} a'_{rp}v_p, v_{r+1}, ..., v_k)$, gdzie na $v_{r+1}, ..., v_k \in \mathbb{F}$ nie są nałożone żadne warunki. Przez proste przektałcenie otrzymujemy dalej $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \sum_{j=1}^{k-r} v_{r+j}\mathbf{w}_j$, dla $\mathbf{w} := (b'_1, ..., b'_r, 0, ..., 0)$ i $\mathbf{w}_j = (-a'_{1j}, ..., -a'_{rj}, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (wyraz 1 jest na $r+j$-tym miejscu). Z równości tych wynika, że dla dowolnych $c_1, ..., c_{k-r} \in \mathbb{F}$ wektor $\mathbf{v} = \mathbf{w} + c_1\mathbf{w}_1 + ... + c_{k-r}\mathbf{w}_{k-r}$ jednoznacznie wyznacza $c_1, ..., c_{k-r}$ (bo c_j jest jego $(r+j)$–tą współrzędną). Wobec tego $(c_1, ..., c_{k-r}) \mapsto \mathbf{w} + c_1\mathbf{w}_1 + ... + c_{k-r}\mathbf{w}_{k-r}$ jest przekształceniem różnowartościowym, którego obraz jest zbiorem rozwiązań układu.

By uzasadnić „Dodatek" zauważmy, że wyrazy macierzy $[\mathbf{A}'|\mathbf{b}']$ otrzymujemy z wyrazów macierzy $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ przez wykonywanie dzielenia, mnożenia i dodawania. Wraz z podanymi wzorami na wektory $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_s$ dowodzi to, że mają one żądaną własność. $\square$

Zajmiemy się bliżej przypadkiem jednorodnym.

Definicja. Powiemy, że wektory $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_s \in \mathbb{F}^k$, gdzie $s \geq 1$, tworzą **fundamentalny zbiór rozwiązań** jednorodnego układu równań w $\mathbb{F}^k$, gdy

i) $c_1\mathbf{w}_1 + ... + c_s\mathbf{w}_s$ ($c_1, ..., c_s \in \mathbb{F}$) jest rozwiązaniem ogólnym (równoważnie: każde rozwiązanie jednoznacznie przedstawia się jako kombinacja $c_1\mathbf{w}_1 + ... + c_s\mathbf{w}_s$, dla $c_1, ..., c_s \in \mathbb{F}$, i każda taka kombinacja jest rozwiązaniem), oraz

ii) współrzędne wektorów $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_s$ leżą w każdym podciele ciała $\mathbb{F}$, które zawiera współczynniki układu.

Wniosek 1. *Jeśli jednorodny układ równań liniowych ma rozwiązanie niezerowe, to ma i fundamentalny zbiór rozwiązań.*

Dowód. Przy oznaczeniach dowodu twierdzenia mamy teraz $\mathbf{b} = \mathbf{0}_l$. Stąd $\mathbf{b}' = \mathbf{0}_l$ (patrz uwaga 1 w p. 2) i wobec tego $\mathbf{w} = \mathbf{0}_k$. Ponadto, $s > 0$, bo inaczej $\mathbf{0}_k$ byłoby jedynym rozwiązaniem. □

Przykład 2. a) Rozpatrzmy jednorodny układ równań nad $\mathbb{C}$, którego lewe strony są jak w przykładzie 1 z p.3. Wcześniejsze rachunki pokazują, że fundamentalny zbiór rozwiązań tworzą wektory $\mathbf{w}_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{w}_2 = (-7, 0, -2, 1, 0)$, $\mathbf{w}_3 = (-9, 0, 3, 0, 1)$. Rozwiązanie ogólne jest postaci

$$y(-2, 1, 0, 0, 0) + s(-7, 0, -2, 1, 0) + t(-9, 0, 3, 0, 1) \quad (y, s, t \in \mathbb{C}) \tag{11}$$

Gdyby układ był rozpatrywany nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ zmieniłoby się tylko to, że w (11) należałoby zastąpić $\mathbb{C}$ przez $\mathbb{Q}$, dla tych samych wektorów $\mathbf{w}_i$.

b) W równaniu $x_1 + x_2 = 0$, rozpatrywanym nad $\mathbb{R}$, rozwiązaniem ogólnym jest $c\mathbf{w}$ ($c \in \mathbb{R}$), gdzie $\mathbf{w} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Jednak współrzędne wektora $\mathbf{w}$ nie należą do ciała $\mathbb{Q}$, zawierającego współczynniki równania, i dlatego $\{\mathbf{w}\}$ nie jest fundamentalnym zbiorem rozwiązań. Oczywiście rozwiązanie ogólne nad $\mathbb{Q}$ nie ma już postaci $c\mathbf{w}$ ($c \in \mathbb{Q}$), bo $c\mathbf{w}$ nie ma współrzędnych wymiernych np. dla $c = 1$.

Zadanie uzupełniające 1. Niech wszystkie współczynniki i stałe układu równań liniowych leżą w pewnym podciele $\mathbb{G}$ ciała $\mathbb{F}$. Wówczas:

a) Jeśli układ ten jest niesprzeczny w $\mathbb{F}^k$, to jest niesprzeczny i w $\mathbb{G}^k$,

b) Jeśli układ ma w $\mathbb{F}^k$ jedyne rozwiązanie, to leży ono w $\mathbb{G}^k$.

c) Jeśli układ ma jedyne rozwiązanie w $\mathbb{G}^k$, to ma i jedyne rozwiązanie w $\mathbb{F}^k$.

Zadania ze zbioru Kostrykina: §I.2.3, zadania 1,2,4,24 *.

5. Równania macierzowe $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ i $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$.

Niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$ i $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{p,q}$. Pytamy: czy istnieją i jakie są macierze $\mathbf{X}$, dla których $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$?

Możemy założyć, że $p = l$ (inaczej rozwiązań brak). Szukana macierz $\mathbf{X}$ musi mieć k wierszy i q kolumn. Jeśli jej kolumny oznaczyć przez przez $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_q$, a macierzy $\mathbf{B}$ przez $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_q$, to równość $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ możemy zapisać w postaci układu równości

$$\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}_1, \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{Ax}_q = \mathbf{b}_q.$$

(Patrz uwaga 1 w §1.3.) Każde z równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_j$ można rozwiązać opisaną w poprzednim paragrafie metodą i w ten sposób ustalić, czy żądana macierz istnieje i jakiej postaci są jej kolumny. Redukcję klatki $\mathbf{A}$ macierzy $[\mathbf{A}|\mathbf{b}_j]$ można przy tym wykonać dla wszystkich j równocześnie, biorąc macierz $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ powstałą z $\mathbf{A}$ przez dopisanie <u>wszystkich</u> kolumn $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_q$ i wykorzystując następujący

Lemat 1. *Niech macierze* $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ *i* $[\mathbf{A}'|\mathbf{B}']$ *będą wierszowo równoważne i niech* $\mathbf{X}$ *będzie dowolną macierzą. Wówczas* $\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A}'\mathbf{X} = \mathbf{B}'$.

<u>Dowód.</u> Oznaczmy kolumny $\mathbf{B}'$ przez $\mathbf{b}'_1, ..., \mathbf{b}'_q$. Na mocy lematu 1 w §3.2, równania $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_j$ i $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'_j$ są równoważne. Jak wyżej, równość $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ (odp. $\mathbf{A}'\mathbf{X} = \mathbf{B}'$) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy j–ta kolumna macierzy $\mathbf{X}$ jest rozwiązaniem równania $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_j$ (odp. równania $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'_j$), dla $j = 1, ..., q$. Stąd wynika teza. $\square$

Można więc równanie $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ badać przez doprowadzenie macierzy $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ do postaci $[\mathbf{A}'|\mathbf{B}']$, gdzie klatka $\mathbf{A}'$ jest zredukowana, i zastąpienie go równaniem $\mathbf{A}'\mathbf{X} = \mathbf{B}'$.

Wniosek 1. *Gdy postać zredukowana macierzy* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ *jest macierzą jednostkową, to dla każdej macierzy* $\mathbf{B}$ *o* k *wierszach, równanie* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *ma jedyne rozwiązanie.*

<u>Dowód.</u> Powyżej, $\mathbf{A}' = \mathbf{I}_k$, więc jedynym rozwiązaniem równania $\mathbf{A}'\mathbf{X} = \mathbf{B}'$ jest $\mathbf{B}'$. $\square$

<u>Przykład 1.</u> Rozwiązać równanie $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

<u>Rozwiązanie.</u> $\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right]$ $\to \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -2 \end{array}\right]$. Ostatnia klatka jest jedynym rozwiązaniem równania. $\square$

Uwaga 1. Gdy klatka $\mathbf{A}'$ nie jest jednostkowa (np. gdy macierz $\mathbf{A}$ nie jest kwadratowa), to i tak otrzymujemy równania $\mathbf{A}'\mathbf{x}_j = \mathbf{b}'_j$ na kolejne kolumny macierzy $\mathbf{X}$, ze <u>zredukowaną</u> macierzą $\mathbf{A}'$.

By rozwiązać równanie $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$ zauważamy, że jest ono równoważne równaniu $\mathbf{A}^t\mathbf{X}^t = \mathbf{B}^t$, a to umiemy badać. (Skorzystaliśmy z lematu 3iii) w §1.3.) Dla przykładu, z przeprowadzonych rachunków wynika, że jedynym rozwiązaniem równania $\mathbf{X}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ jest macierz $\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -2 & 3/2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

Uwaga 2. Równanie $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$ wiąże się z następującym zagadnieniem. Niech dane będą wektory $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in \mathbb{F}^l$ i $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k \in \mathbb{F}^n$. Zapytajmy: czy istnieją i jak wyznaczyć przekształcenia liniowe $L : \mathbb{F}^l \to \mathbb{F}^n$ takie, że $L(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ dla $i = 1, ..., k$? Gdy macierz szukanego przekształcenia oznaczyć przez $\mathbf{X}$, to stwierdzimy, że ostatnie warunki są równoważne temu, by $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$, gdzie $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$ i $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n,k}$ to macierze o kolumnach $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ i $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k$, odpowiednio. Np. z przeprowadzonych wyżej rachunków wynika, że istnieje jedyne przekształcenie liniowe $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ takie, że $L(1, 2) = (0, 1, -1)$ i $L(3, 4) = (1, 0, 1)$, i że jest ono zadane wzorem $L(x, y) = (x - \frac{1}{2}y, -2x + \frac{3}{2}y, 3x - 2y)$.

Zadania ze zbioru Kostrykina: 1 i 3 z §I.4.2.

§ 4. Zastosowania do opisu obrazu przekształcenia liniowego $\mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$.

1. Obraz przekształcenia liniowego $\mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ a układy równań liniowych.

Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą o kolumnach $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in \mathbb{F}^l$. Jak wiemy z zad. 1b) w §1.2,

$$L_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + ... + v_k\mathbf{a}_k \text{ dla } \mathbf{v} = (v_1, ..., v_k) \in \mathbb{F}^k \qquad (*)$$

Każde rozwiązanie $\mathbf{v}$ układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ można więc interpretować jako ciąg współczynników pewnego przedstawienia $\mathbf{b}$ w postaci kombinacji liniowej wektorów $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$, a także jako element zbioru $L_{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{b})$.

Definicja. a) **Przestrzenią kolumn** macierzy $\mathbf{A}$ nazywamy zbiór $\{\sum_{j=1}^k c_j\mathbf{a}_j : c_1, ..., c_k \in \mathbb{F}\}$ wszystkich kombinacji liniowych jej kolumn $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$. (Jest to podzbiór zbioru $\mathbb{F}^l$.)

b) **Obrazem** przekształcenia $L_{\mathbf{A}}$, oznaczanym przez $\mathrm{im}(L_{\mathbf{A}})$, nazywamy zbiór $\{L_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathbb{F}^k\}$. (Jest to podzbiór zbioru $\mathbb{F}^k$.)

Uwaga 1. Z równości (*) wynika równoważność warunków:
a) układ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jest niesprzeczny;
b) $\mathbf{b}$ leży w obrazie przekształcenia $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$, tzn. $\mathbf{b} \in L_{\mathbf{A}}(\mathbb{F}^k)$;
c) $\mathbf{b}$ leży w przestrzeni kolumn macierzy $\mathbf{A}$ (czyli jest ich kombinacją liniową).

Poprzez a), warunki te możemy badać rozwiązując układ równań liniowych. Z wniosku 1 w §3.3 otrzymujemy np.

Wniosek 1. *Niech* $\mathbf{A}$ *będzie macierzą schodkową o* l *wierszach, z których* r *jest niezerowych. Układ równań* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy* $b_{r+1} = ... = b_l = 0$. *(Równoważnie: przestrzenią kolumn tej macierzy jest* $\{\mathbf{b} \in \mathbb{F}^l : b_{r+1} = ... = b_l = 0\}$.*)* $\boxminus$

Zadania ze zbioru Kostrykina: w §I.2.1: 3,7,8,9,11,17,18,19*,20* (w dwóch ostatnich zadaniach, końcowe „niezależne" ma zbędne „nie".)

2. Opisanie obrazu przekształcenia układem równań.

Definicja. Mówimy, że dany zbiór jest **opisany** układem równań, gdy jest równy zbiorowi rozwiązań tego układu.

Niekiedy użyteczne jest opisanie przestrzeni kolumn danej macierzy $\mathbf{A}$, czyli obrazu przekształcenia $L_{\mathbf{A}}$, jednorodnym układem równań liniowych. Na przykład, warto tak zrobić już wtedy, gdy spośród wielu wektorów $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n$ chcemy wybrać te, które należą do $\mathrm{im}(L_{\mathbf{A}})$. Wielokrotne bowiem sprawdzanie niesprzeczności kolejnych układów $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_i$ szybko okaże się zbyt czasochłonne.

Cel nasz możemy osiągnąć następująco.

Traktujmy $\mathbf{b}$ jako ciąg l zmiennych $b_1, ..., b_l$. Utwórzmy macierz $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ i operacjami wierszowymi przeprowadźmy ją w $[\mathbf{A}'|\mathbf{b}']$, gdzie klatka $\mathbf{A}'$ jest schodkowa. Każdy wyraz otrzymanej kolumny $\mathbf{b}'$ jest pewną kombinacją liniową zmiennych $b_1, ..., b_l$. (Współczynniki kombinacji zależą tylko od wykonywanego ciągu operacji i od tego, który wyraz kolumny $\mathbf{b}'$ rozpatrujemy.) Szukanym układem równań jest $b'_i = 0$ dla $i = r+1, ..., l$, gdzie r to liczba niezerowych wierszy macierzy $\mathbf{A}'$ i gdzie b'_i traktujemy jako wymienioną kombinację zmiennych $b_1, ..., b_l$. (Wynika to z wniosku 1 w §3.3.)

Przykład 1. Znajdziemy układ równań, którego zbiorem rozwiązań jest przestrzeń kolumn macierzy $\mathbf{A}$ o kolumnach $(1, 2, 2, 3)$ i $(1, -1, 3, -2)$.

Przeprowadzamy więc w macierz schodkową klatkę $\mathbf{A}$ macierzy $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 2 & -1 & b_2 \\ 2 & 3 & b_3 \\ 3 & -2 & b_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -3 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 1 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & -5 & b_4 - 3b_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & -3 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -5 & b_4 - 3b_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 3b_3 + b_2 - 8b_1 \\ 0 & 0 & b_4 + 5b_3 - 13b_1 \end{bmatrix}$$

Układ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ wtedy i tylko wtedy jest niesprzeczny, gdy spełnione są obie równości $3b_3 + b_2 - 8b_1 = 0$ i $b_4 + 5b_3 - 13b_1 = 0$. Jest to szukany układ równań, w zmiennych $b_1, ..., b_4$, opisujący badaną przestrzeń kolumn. (Można te zmienne w równaniach jeszcze uporządkować.)

§ 5. Macierze nieosobliwe.

1. Macierze nieosobliwe a układy równań i przekształcenia liniowe.

Zadanie 1. Wierszowo zredukowana macierz kwadratowa albo jest jednostkowa, albo ma ona kolumny wtórne i jej ostatni wiersz jest zerowy.

Twierdzenie 1. *Następujące warunki są równoważne dla $k \times k$–macierzy $\mathbf{A}$:*

a) dla każdego wektora $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^k$*, układ równań* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *ma jedyne rozwiązanie;*
b) układ równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ *ma tylko zerowe rozwiązanie;*
c) każda postać zredukowana macierzy $\mathbf{A}$ *jest macierzą jednostkową;*
d) macierz $\mathbf{A}$ *jest wierszowo równoważna macierzy jednostkowej;*
e) dla każdego wektora $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^k$*, układ* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *jest niesprzeczny.*

Dowód. Implikacje a)⇒b) , a)⇒e) i c) ⇒d) są oczywiste.

b)⇒c) . Jeśli zachodzi b) , to postać zredukowana $\mathbf{A}'$ macierzy $\mathbf{A}$ nie ma kolumn wtórnych, patrz wniosek 2 w §3.3. Na podstawie zadania, $\mathbf{A}' = \mathbf{I}$.

d)⇒a) . Niech $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^k$. Zredukujmy klatkę $\mathbf{A}$ macierzy $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$, uzyskując macierz $[\mathbf{I}|\mathbf{b}']$. Układ $\mathbf{Ix} = \mathbf{b}'$ ma oczywiście jedyne rozwiązanie, więc jest tak i dla równoważnego z nim układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Z powyższego wynika, że warunki od a) do d) są równoważne i implikują e).

Nie c)⇒ nie e). Przypuśćmy, że $\mathbf{A}$ można operacjami wierszowymi przeprowadzić w zredukowaną macierz $\mathbf{A}' \neq \mathbf{I}_k$. Z zadania 1 wynika, że układ $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{e}_k$ jest sprzeczny, a z zadania 1a) w §3.2 –że pewien ciąg operacji wierszowych przeprowdzi $\mathbf{A}'$ w $\mathbf{A}$, a przez to $[\mathbf{A}'|\mathbf{e}_k]$ w $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$, dla pewnego $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^k$. Układ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ będzie sprzeczny, jako równoważny układowi $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{e}_k$. □

Definicja. Macierz kwadratowa $\mathbf{A}$ jest **nieosobliwa**, gdy spełnia któryś z powyższych warunków (a wtedy spełna je wszystkie). Macierze nieosobliwe pojawiły się już niejawnie we wniosku 1 w §3.5. W dalszej części wykładu odgrywają one znaczną rolę.

Wniosek 1. *Dla przekształcenia liniowego* $L : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^k$ *równoważne są warunki:*
a′) przekształcenie L jest bijektywne;
b′) przekształcenie L jest różnowartościowe;
e′) przekształcenie L jest „na”;
d′) Macierz $\mathbf{A} := [L]$ *tego przekształcenia jest nieosobliwa.*

Dowód. Niech $\mathbf{A} := [L]$. Wówczas $L(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$ dla $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$, wobec czego warunek b′) pociąga za sobą warunek b) z twierdzenia, a warunki a′) i e′) są przeformułowaniem warunków a) i e), odpowiednio. Ponieważ ponadto a′)⇒b′), więc teza wniosku wynika z twierdzenia. □

Zadanie uzupełniające 1. a) Każdą macierz nieosobliwą można operacjami wierszowymi typu (I) przeprowadzić w macierz diagonalną, mającą niezerowe wyrazy na przekątnej.

b) * Można uzyskać, by wszystkie poza pierwszym wyrazy tej przekątnej były równe 1. (Wskazówka: zbadać wpierw 2×2 – macierze diagonalne.)

2. Odwrotność macierzy i odwrotność przekształcenia.

Definicja. a) Jeśli macierze $\mathbf{A}, \mathbf{C} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ spełniają warunek $\mathbf{AC} = \mathbf{I}_k = \mathbf{CA}$, to każdą z macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{C}$ nazywamy **odwrotnością** drugiej i piszemy $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}$. Macierz, posiadającą odwrotność, nazywamy **odwracalną**.

b) Podobnie, gdy przekształcenia $F : X \to Y$ i $G : Y \to X$ spełniają warunki $G \circ F = I_X$ i $F \circ G = I_Y$, to powiemy, że są one **odwracalne** i każde z nich jest **odwrotnością** drugiego; piszemy też $G = F^{-1}, F = G^{-1}$.

Zadanie 1. a) Przekształcenie $F : X \to Y$ wtedy i tylko wtedy jest odwracalne, gdy jest 1-1 i „na".

b) Gdy przekształcenia $F : X \to Y$ i $G : Y \to X$ spełniają warunek $G \circ F = I_X$, przy czym F jest „na" lub G jest 1-1, to $F \circ G = I_Y$.

c) Przy $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2$ oraz $F(a) = (a, 0), G(a, b) = a$ $(a, b \in \mathbb{R})$ zachodzi $G \circ F = I_X$, lecz $F \circ G \neq I_Y$.

d) Podobnie, dla $\mathbf{A} = [1\ 0], \mathbf{B} = \mathbf{A}^t$ zachodzi $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_1$, lecz $\mathbf{BA} \neq \mathbf{I}_2$.

Zadanie 2. Odwrotność odwracalnej macierzy jest jedyna, i tak samo dla przekształceń. (Wskazówka: wykorzystać łączność mnożenia czy składania.)

Uwaga 1. Dla macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$ równość $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_k$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $L_\mathbf{A} \circ L_\mathbf{B} = I_{\mathbb{F}^k}$. (Patrz stwierdzenie 1' w §1.3.)

Twierdzenie 1. *Gdy macierze* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$ *spełniają warunek* $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_k$, *to* $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_k$, *tzn. każda z tych macierzy jest odwrotnością drugiej.*

Dowód. Niech $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_k$. Wówczas $L_\mathbf{A} \circ L_\mathbf{B} = L_{\mathbf{AB}} = I_{\mathbb{F}^k}$, skąd przekształcenie $L_\mathbf{A}$ jest „na". Z wniosku 1 w p.1 wynika więc, że jest ono różnowartościowe, a z zadania 1b) – że $L_\mathbf{A}$ i $L_\mathbf{B}$ są wzajemnie odwrotne. Zatem $L_\mathbf{B} \circ L_\mathbf{A} = I_{\mathbb{F}^k}$ i wobec tego $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_k$. ⊟

Twierdzenie 2. *Gdy macierz kwadratowa* $\mathbf{A}$ *jest odwracalna, to odwracalne jest przekształcenie* $L_\mathbf{A}$. *Zachodzi też wtedy* $L_{\mathbf{A}^{-1}} = (L_\mathbf{A})^{-1}$ *i* $\mathbf{A}^{-1} = [(L_\mathbf{A})^{-1}]$. ⊟

Dowód. Wyżej dowiedliśmy, że gdy $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_k$, to $L_\mathbf{A} \circ L_\mathbf{B} = I_{\mathbb{F}^k} = L_\mathbf{B} \circ L_\mathbf{A}$. □

Twierdzenie 3. *Macierz kwadratowa* $\mathbf{A}$ *wtedy i tylko wtedy jest odwracana, gdy jest nieosobliwa.*

Dowód. Gdy macierz $\mathbf{A}$ jest odwracalna i $\mathbf{B} := \mathbf{A}^{-1}$, to $L_\mathbf{A} \circ L_\mathbf{B} = I_{\mathbb{F}^k}$, więc przekształcenie $L_\mathbf{A}$ jest „na" –a tym samym $\mathbf{A}$ jest macierzą nieosobliwą na podstawie wniosku 1 w p.1. Odwrotnie, gdy macierz $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa, to $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_k$ dla pewnej macierzy $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_k$, patrz wniosek 1 w §3.5 –wobec czego macierz $\mathbf{A}$ jest odwracalna na podstawie twierdzenia 1. □

Uwaga 2. a) Nazw „macierz odwracalna" i „macierz nieosobliwa" będziemy więc używać wymiennie.

b) Uzyskane wyniki umożliwiają ustalenie, czy macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ jest odwracalna, a także wskazanie $\mathbf{A}^{-1}$, przez zbadanie równania $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_k$. Postępujemy następująco:

1. Tworzymy macierz $[\mathbf{A}|\mathbf{I}_k]$ i wykonując ciąg wierszowych operacji elementarnych doprowadzamy ją do postaci $[\mathbf{N}|\mathbf{C}]$, gdzie klatka $\mathbf{N}$ jest zredukowana;

2. Macierz $\mathbf{A}$ wtedy i tylko wtedy jest odwracalna, gdy $\mathbf{N} = \mathbf{I}_k$ (twierdzenie 3 wraz z równoważnością d)⇔e) w twierdzeniu 1 z p.1); przy tym jeśli $\mathbf{N} = \mathbf{I}_k$, to $\mathbf{C}$ jest na podstawie twierdzenia 2 odwrotnością macierzy $\mathbf{A}$ (bo jest rozwiązaniem równania $\mathbf{AX} = \mathbf{I_k}$, patrz §3.5.)

Przykład 1. Znaleźć $\mathbf{A}^{-1}$ (jeśli istnieje) dla $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie. Tworzymy macierz $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ i redukujemy jej klatkę $\mathbf{A}$:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Macierz $\mathbf{A}$ jest więc odwracalna (bo jej postacią zredukowaną jest $\mathbf{I}_3$) i $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

Zbadajmy pewne własności macierzy odwracalnych (=nieosobliwych):

Twierdzenie 4. *a) Odwrotność macierzy odwracalnej* $\mathbf{A}$ *też jest taką macierzą, i* $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.
b) Iloczyn macierzy odwracalnych $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$ *też jest odwracalny, i* $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.
c) Jeśli macierz $\mathbf{A}$ *jest odwracalna, to macierz* $\mathbf{A}^t$ *też, i* $(\mathbf{A}^t)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^t$.

Dowód. a) wynika z definicji odwrotności macierzy, a b) stąd, że $(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$. Podobnie, $(\mathbf{A}^{-1})^t\mathbf{A}^t = (\mathbf{AA}^{-1})^t = \mathbf{I}^t = \mathbf{I}$, por. lemat 3ii) w §1.3. □

<u>Ćwiczenie.</u> Jeśli iloczyn dwóch macierzy kwadratowych jest macierzą odwracalną, to każda z nich jest odwracalna.

Zadanie 3. a) Macierz trójkątna, bez zer na przekątnej, jest odwracalna.
b) Nieodwracalna jest macierz, mająca zerowy wiersz (lub takąż kolumnę).

Zadanie 4. Gdy macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$ są przemienne i $\mathbf{A}$ jest odwracalna, to $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$.

<u>Zadania uzupełniające.</u> Dowieść, że:

1. Zbiór macierzy górno – trójkątnych, z jedynkami na przekątnej i wyrazami całkowitymi, jest zamknięty ze względu na mnożenie i branie odwrotności.

2. Macierz odwracalna $\mathbf{A}$ ma tę własność, że suma wyrazów jej każdego wiersza jest taka sama (nie zależy od rozpatrywanego wiersza). Dowieść, że $\mathbf{A}^{-1}$ też ma tę własność.

3. Gdy $\mathbb{G}$ jest podciałem ciała $\mathbb{F}$ i macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{G})$ jest odwracalna w $\mathcal{M}_k(\mathbb{F})$, to jej odwrotność leży w $\mathbf{M}_k(\mathbb{G})$.

4. * W każdym z poniższych przypadków macierz kwadratowa $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa:
a) a_{ij} jest liczbą całkowitą nieparzystą gdy $i = j$, a parzystą w przeciwnym razie;
b) a_{ij} jest liczbą całkowitą parzystą gdy $i = j$, a nieparzystą w przeciwnym razie, przy czym liczba wierszy macierzy jest parzysta.

5. Dowieść, że gdy klatki $\mathbf{P}$ i $\mathbf{S}$ są nieosobliwe i $\mathbf{X} = \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}$, to
a) $\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{S}^{-1}\mathbf{X} & \mathbf{S}^{-1} \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} - \mathbf{X}\mathbf{Q} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ -\mathbf{X} & \mathbf{I}_l \end{bmatrix}$.
(Wraz z a), część b) oznacza też, że macierz po lewej w b) jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy odwracalna jest macierz $\mathbf{S} - \mathbf{X}\mathbf{Q}$. Pomysł z b) pochodzi od I. Schura; pozwala on zmniejszać stopień odwracanych macierzy. Por. też zadanie .....)

6. * (J. Hadamard) Gdy macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ ma tę własność, że $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ dla $i = 1, ..., k$, to jest ona nieosobliwa.

7. * a) Gdy macierze $\mathbf{A}, \mathbf{A} + \mathbf{M}, \mathbf{A} - \mathbf{M}$ wszystkie są odwracalne, to przy $\mathbf{P} := (\mathbf{A} + \mathbf{M})(\mathbf{A} - \mathbf{M})^{-1}$ i $\mathbf{Q} := (\mathbf{A} + \mathbf{M})^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{M})$ zachodzi $\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{A}$, a macierze $\mathbf{I} + \mathbf{P}$ i $\mathbf{I} + \mathbf{Q}$ są odwracalne. (Wskazówka: dowieść wpierw, że $(\mathbf{A} + \mathbf{M})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{M}) = (\mathbf{A} - \mathbf{M})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{M})$.)
b) Odwrotnie, jeśli $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ są odwracalne i $\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{A}$, to przy założeniu odwracalności macierzy $\mathbf{I} + \mathbf{P}$ i $\mathbf{I} + \mathbf{Q}$ istnieje macierz $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_k$, dla której zachodzą równości z a).

8. * Przy oznaczeniach i założeniach zadania 4a), jeśli macierz $\mathbf{A}$ jest symetryczna, a $\mathbf{M}$ antysymetryczna, to $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^t$ i wobec tego $\mathbf{Q}^t\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{A}$. (Wyniki z zad. 7 i ten

pochodzą od A. Cayley'a, a poniższy uzyskał też Frobenius.)

b) Jeśli $\mathbf{Q}^t\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{A}$, macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{I}+\mathbf{Q}$ są odwracalne, w tym $\mathbf{A}$ jest symetryczna, to $\mathbf{Q} = (\mathbf{A}+\mathbf{M})^{-1}(\mathbf{A}-\mathbf{M})$ dla pewnej macierzy antysymetrycznej $\mathbf{M}$.

Zadania ze zbioru Kostrykina: w §I.4.2: 7 (pominąć polecenia o macierzy dołączonej), 8,9*,10,11*,16*; w §I.4.3: zad.15*

3. Operacje elementarne a mnożenie przez macierz nieosobliwą.

Istotny dla dalszej części jest zaskakujący związek operacji elementarnych z mnożeniem macierzy.

Twierdzenie 1. *a) Gdy operacjami wierszowymi zmienimy macierz* $\mathbf{A}$ *o* p *wierszach, to pomnożymy ją z lewej strony przez macierz* $\mathbf{E}$*, powstałą z* $\mathbf{I}_p$ *przez wykonanie tychże operacji, w niezmienionej kolejności. (Tak więc otrzymana macierz* $\mathbf{B}$ *jest równa* $\mathbf{EA}$*.)*

b) Gdy operacjami kolumnowymi zmienimy macierz $\mathbf{A}$ *o* p *kolumnach, to pomnożymy ją z prawej strony przez macierz* $\mathbf{F}$*, powstałą z* $\mathbf{I}_p$ *przez wykonanie tychże operacji.*

Dowód. a) Rozważany ciąg operacji przeprowadza macierz $[\mathbf{I}_p|\mathbf{A}]$ w $[\mathbf{E}|\mathbf{B}]$, skąd równania $\mathbf{I}_p\mathbf{X} = \mathbf{A}$ i $\mathbf{EX} = \mathbf{B}$ mają te same rozwiązania. Ponieważ $\mathbf{A}$ jest rozwiązaniem pierwszego równania, więc jest i rozwiązaniem drugiego: $\mathbf{EA} = \mathbf{B}$.

b) Wykonanie ciągu operacji kolumnowych wychodząc z macierzy $\mathbf{A}$ sprowadza się do wykonania odpowiadającego mu ciągu operacji wierszowych na macierzy $\mathbf{A}^t$ i transponowania otrzymanej macierzy. Ponieważ tą ostatnią jest $\mathbf{EA}^t$, dla macierzy $\mathbf{E}$ nie zależącej od $\mathbf{A}$, więc otrzymamy macierz $(\mathbf{EA}^t)^t = \mathbf{AF}$, gdzie $\mathbf{F} = \mathbf{E}^t$. Jest tak i gdy $\mathbf{A} = \mathbf{I}_p$, skąd wykonując rozważane operacje kolumnowe wychodząc z $\mathbf{I}_p$ otrzymujemy macierz $\mathbf{I}_p\mathbf{F} = \mathbf{F}$. □

Wniosek 1. *Niech* $\mathbf{B}$ *powstaje z macierzy nieosobliwej* $\mathbf{A}$ *przez wykonanie operacji elementarnych, wśród których mogą być wierszowe i kolumnowe. Wówczas macierz* $\mathbf{B}$ *jest nieosobliwa.*

Dowód. Wystarcza rozpatrzeć przypadek pojedyńczej operacji. Gdy $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ i operacja jest wierszowa, teza jest prawdziwa (z definicji macierzy nieosobliwych). Stąd tak samo jest gdy $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ i operacja jest kolumnowa, na podstawie twierdzenia 4c) w p.2. W przypadku dowolnej macierzy $\mathbf{A}$ mnożymy ją więc z lewej lub prawej strony przez macierz nieosobliwą, i teza wynika z twierdzenia 4b) w p.2.

Zadania uzupełniające.

1. Przy oznaczeniach wniosku przypuśćmy, że $\mathbf{B} = \mathbf{I}$. Jak otrzymać $\mathbf{A}^{-1}$?

2. Macierz zmieniono wierszowymi i kolumnowymi operacjami elementarnymi. Wykazać, że ten sam wynik otrzymamy, gdy wpierw wykonamy wszystkie wierszowe, a potem kolumnowe z tych operacji, jedne i drugie w pierwotnej kolejności.

3. Dla $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{l,k}$ dowieść równoważności warunków: a) macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są wierszowo równoważne, oraz b) istnieje macierz nieosobliwa $\mathbf{E} \in \mathcal{M}_l$ taka, że $\mathbf{A} = \mathbf{EB}$.

4. Udowodnić, że dla każdej macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$ istnieją macierze nieosobliwe $\mathbf{E} \in \mathcal{M}_l$ i $\mathbf{F} \in \mathcal{M}_k$ takie, że $\mathbf{B} := \mathbf{EAF}$ jest macierzą następującej postaci: dla pewnej liczby $r \leq \min(k, l)$ mamy $b_{ij} = 1$ gdy $i = j \leq r$, oraz $b_{ij} = 0$ w przeciwnym razie.

5. Nazwijmy **elementarną** każdą macierz powstałą w wyniku wykonania na macierzy jednostkowej jednej wierszowej operacji elementarnej.

a) Jeśli $\mathbf{E}$ jest macierzą elementarną, to $\mathbf{E}^t$ i $\mathbf{E}^{-1}$ również.

b) Macierz nieosobliwa jest iloczynem macierzy elementarnych, i odwrotnie.

6. W wyniku wykonania ciągu wierszowych operacji elementarnych postaci $\mathbf{X}_i \xrightarrow{[q_i]+c_i[p_i]} \mathbf{X}_{i+1}$, gdzie $p_i < q_i$ dla każdego i, z macierzy $\mathbf{A}$ otrzymano macierz $\mathbf{U}$. Dowieść, że $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, gdzie $\mathbf{L}$ jest macierzą dolnie trójkątną, mającą jedynki na przekątnej.

Zadania ze zbioru Kostrykina: §I.4.3, zadanie 2.

§ 6. Możliwe tematy kolokwialne.

„Możliwe" są wszystkie omówione tematy, lecz szczególnie dobrze jest upewnić się co do znajomości następującego materiału:

a) charakteryzacji przekształceń liniowych z §1.2,

b) stwierdzeń z §1.3 i omówionych tam własności działań na macierzach,

c) metody Gaussa rozwiązywania równań liniowych i jej konsekwencji, w tym możliwości znajdywania rozwiązania ogólnego i układu fundamentalnego rozwiązań (w przypadku jednorodnym),

d) własności macierzy odwracalnych (=nieosobliwych), wraz z umiejętnością wyznaczania odwrotności,

e) związku operacji elementarnych z mnożeniem macierzy,

f) zastosowań do badania przekształceń liniowych $\mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$, omówionych w paragrafach 4 i 5.