GAL II, wiosna 2010

Zadania domowe, grupa 13 (wtorkowo–czwartkowa, prowadzący H. Toruńczyk).
Gdy nie zaznaczono inaczej, zadania są ustne –nie wymaga się oddania na piśmie.

<u>Seria 26 (na 1.VI, a pisemne na 2 VI).</u>

Proszę obejrzeć nierozwiązywane dotąd zadania skryptu TK, II:
a) 3 i 4 ze stron 14-15,
b) 1-7 ze strony 39,
c) 1-3 na str. 49.

Zadania, budzące wątpliwości, możemy rozwiązywać na ostatnich ćwiczeniach.

1. a) Dowieść, że funkcja kwadratowa $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ o sygnaturze (s, t) jest równa zeru na pewnej podprzestrzeni wymiaru $l := k - \min(s, t)$, lecz nie na podprzestrzeni wyższego wymiaru.

b) Niech $g : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ będzie symetryczną funkcją dwuliniową o sygnaturze (s, t). Dowieść, że liczba l z a) jest największym wymiarem podprzestrzeni $V \subset \mathbb{R}^k$ takich, że $g(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0$ dla wszystkich $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$. (Można korzystać z a) nawet, jeśli się a) nie rozwiązało.)

c) Jaki jest największy wymiar podprzestrzeni $W \subset \mathbb{R}^k$, na której funkcja f jest nieosobliwa (tzn. $\mathrm{rk}(f_{|W}) = \dim W$)?

Poniższe zadania są pisemne (na środę 2 VI do godz. 13.45). Ewentualne wątpliwości dotyczące sposobu rozwiązania możemy omówić we wtorek.

21. Niech $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - z^2 - 2xz - 2yz - 2y - 1 = 0\}$.

a) Podać nazwę kwadryki X, naszkicować ją i znaleźć zbiór jej środków.

b) Znaleźć wzór na izomorfizm afiniczny $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dla którego $F(X) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax^2 + by^2 + cz^2 + dz + s\}$, dla pewnych współczynników $a, b, c, d, s \in \{0, 1, -1\}$ takich, że $cd = 0$.

22. W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ niech P będzie rzutem na płaszczyznę $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 2z = 4\}$ wzdłuż prostej $L = \mathrm{af}((1, 1, 1), (3, 5, 4))$, a J będzie jednokładnością o środku w $(5, 5, 5)$ i skali 3.

a) Znaleźć obraz q punktu $p = (0, 1, 1)$ przy przekształceniu $J \circ P$ oraz przeciwobraz punktu q przy tym przekształceniu

a) Znaleźć równanie płaszczyzny M, będącej sumą (mnogościową) wszystkich prostych, które przecinają prostą $K = (1, 0, -1) + \mathbb{R}(1, 2, 1)$ i są równoległe do powyższej prostej L.

<u>Seria 25 (na 27 V).</u>

1. Niech $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2$ dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

a) Podać przykład podprzestrzeni 2-wymiarowej, na której q jest dodatnio określona, i takiej, na której ma sygnaturę $(1,1)$.

b) Niech $Z_t = \mathrm{lin}((1,0,0),(0,1,t))$. Dla jakich t zachodzi $\mathbb{R}^3 = Z_t \oplus Z_t^{\perp}$, gdzie ortogonalność jest wyznaczona przez formę biegunową formy q?

Proszę rozwiązać następujące zadania ze skryptu T. Koźniewskiego (część II):

2. zadania 1-3 na stronach 8-9.

3. zadanie 3 na str. 80.

4. zadanie 4 na str. 81.

Seria 24 (na 25 V), a pisemne na 27 V).

Uwaga: ponieważ mało jest już czasu na omawianie pewnych rzeczy na ćwiczeniach, odwołuję się niżej do pewnych fragmentów pliku AFI.pdf (niektóre są dopisane dziś).

1. Rozwiązać zadania 1b),c) i 2 z poprzedniej serii również na tej drodze, by $a - a_0$ (i ew. $b - b_0$) wyrażać jako kombinacje liniowe wektorów $\mathbf{v}_i = a_i - a_0$ czy $\mathbf{w}_i = b_i - b_0$; patrz w AFI tożsamość (2) i część w nawiasach wniosku 3 na str. 15.

2. (TK II, str.9.) Znaleźć w $\mathbb{R}^3$ prostą L, przechodzącą przez punkt $(2,1,4)$ i przecinającą proste $(0,1,1) + \mathbb{R}(1,-1,1)$ i $(2,0,1) + \mathbb{R}(1,3,0)$.

3. W zadaniach 17 i 18 (pisemnych) z ub. serii utożsamijmy podane wielomiany z wyznaczonymi przez nie funkcjami kwadratowymi na $\mathbb{R}^3$. Wskazać układy odniesienia, w których funkcjom tym odpowiadają znalezione wielomiany kanoniczne. (Patrz w AFI stwierdzenie 1 i uwaga 1 na str.20.)

4. Oznaczmy przez A płaszczyznę $x + 2y + 3z = 1$ w $\mathbb{R}^3$, traktowaną jako podprzestrzeń euklidesowej przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ (rozpatrywanej ze standardowym iloczynem skalarnym). Przyjmijmy też $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2$ dla $(x,y,z) \in A$.

a) Znaleźć pewien układ odniesienia (a_0, a_1, a_2) w A, dla którego $a_0 = (0,-1,1)$.

b) Znaleźć wielomian, odpowiadający funkcji u w tym układzie. (Patrz w AFI uwaga 2 na str. 21.)

c) Znaleźć w A układ odniesienia $(b_i)_{i=0}^{3}$, w którym funkcji u odpowiada wielomian afinicznie–kanoniczny. (Str. 18 w AFI.)

d) Jaką krzywą zadaje równanie $u(a) = 0$ w A? Wskazać zbiór środków tej krzywej.

5. a) Rozwiązać zadanie 1 na str. 13 w AFI .

b) Udowodnić, że gdy $\mathbf{u} \in \mathbb{F}^k$ i przekształcenie $F : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ jest afiniczne, to istnieje wektor $\mathbf{u}' \in \mathbb{F}^l$ taki, że $F(x + \mathbf{u}) = F(x) + \mathbf{u}'$ dla wszystkich $x \in \mathbb{F}^k$. (Wskazówka: postać przekształceń afinicznych opisana jest w stwierdzeniu 1 na str. 9-10 w AFI.)

c) Dowieść, że wówczas $F(X + \mathbf{u}) = F(X) + \mathbf{u}'$ dla każdego zbioru $X \subset \mathbb{F}^k$.

Poniższe zadania są pisemne (na czwartek 27 V).

19. W oparciu o powyższe zadanie, znaleźć

a) wszystkie przekształcenia euklidesowe (inaczej: izometrie afiniczne), które są identycznością na prostej $(0,0,1)+\mathbb{R}(0,1,-1)$ i przeprowadzają płaszczyznę P, zadaną równaniem $y+z=1$, na nią samą.

b) jakikolwiek przekształcenie euklidesowe, przeprowadzające P na płaszczyznę Q, zadaną równaniem $2x+y-z=1$.

20. (TK II, str. 86.) a) Zbadać, dla jakich wartości parametru t kwadryka $X \subset \mathbb{R}^3$, zadana równaniem $5x^2+3y^2+6xy+4xz+4x+4z+8=0$, jest afinicznie równoważna kwadryce Y_t, zadanej równaniem $-x^2+y^2+(t+2)z^2-4y+2=0$.

b) Wyznaczyć nazwę kwadryki Y_t (w zależności od parametru t) i X.

Seria 23 (na 18 V)

1. a) Niech $\mathbf{v}, \mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_n \in \mathbb{F}^k$. Dowieść, że $\mathbf{v}$ jest kombinacją afiniczną $\mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(1, \mathbf{v})$ jest kombinacją liniową $(1, \mathbf{v}_0), ..., (1, \mathbf{v}_n)$, a także wtedy i tylko wtedy, gdy wektor $\mathbf{v}-\mathbf{v}_0$ jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_k-\mathbf{v}_0$.

b) Dla jakich wartości parametru t punkt $(5,t,4,3)$ jest kombinacją afiniczną punktów $(1,0,1,0), (1,1,2,1), (0,1,1,0)$? (Skorzystać z a).)

c) Niech $a=(1,1,0), b=(0,1,2), a'=(3,1,3), b'=(1,0,1)$. Czy istnieje punkt, będący kombinacją afiniczna tak punktów a, b, jak i punktów a', b'? Dać interpretację w terminach przecinania się (lub nie) pewnych prostych.

2. Znaleźć wzór na przekształcenie afiniczne $F: A \to B$, jeśli:

a) $A=\mathbb{R}^3, B=\mathbb{R}^4$ i $F(1,1,1)=(2,0,1,0), F(2,1,1)=(0,0,1,3), F(1,2,1)=(0,0,1,3)$ i $F(1,1,2)=(0,1,0,1)$. Sprawdzić też, że $((1,1,1),(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2))$ jest układem odniesienia w A. (Patrz wniosek 2 na str. 15 w pliku AFI.pdf.)

b) $A=\mathbb{R}^3=B$ i wiadomo, że $F(1,1,1)=(0,0,1)$ i dla płaszczyzny H o równaniu $x+y-z=1$ zachodzi $F(H)=\{(1,1,4)\}$. (Wskazówka: obrać w $\mathbb{R}^3$ układ odniesienia (a_0,a_1,a_2,a_3) taki, że $a_i \in H$ dla $i \leq 3$ i $a_3=(1,1,4)$. Do znalezienia takiego układu posłużyć się uwagą 3 na str. 14 wywieszonego pliku AFI.pdf .)

Poniższe zadania są pisemne. Można je oddawać we wtorek na zajęciach lub w czwartek w godzinach mych konsultacji lub wrzucając do wywieszonej przy drzwiach pokoju 5560 koperty przed godz. 12.15 w czwartek. Wątpliwości co do sposobów rozwiązań możemy omówić we wtorek.

17. Znaleźć podstawienie afiniczne, sprowadzające wielomian $4x_1^2+x_2^2+9x_3^2+4x_1x_2-12x_1x_3-6x_2x_3+5x_3+7$ do postaci afiniczno–kanonicznej.

18. Znaleźć podstawienie euklidesowe, sprowadzające wielomian $2x_1^2-7x_2^2-4x_3^2+$

$4x_1x_2 - 16x_1x_3 + 20x_2x_3 + 60x_1 - 12x_2 + 12x_3 - 90$ do postaci euklidesowo–kanonicznej. (Por. zadanie II.6.27e) u Kostrykina).

Seria 22 (na 13 V) Zadań daję trochę na wyrost – najwyżej „spadną” na później.

1. Znaleźć bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, która jest ortogonalna względem standardowego iloczynu skalarnego i diagonalizuje formę kwadratową $2x^2+5y^2+5z^2-4xy-4xz+8yz$. (Wskazówka: jedną z wartości własnych macierzy o wierszach $(2,-2,-2), (-2,5,4), (-2,4,5)$ jest 10.)

2. Niech forma dwuliniowa $g : V \times V \to \mathbb{F}$ będzie symetryczna. Podprzestrzeń $W \subset V$ nazywamy **niesosobliwą**, jeśli forma $g_{|W\times W}$ jest nieosobliwa.

a) Dowieść, że g–ortogonalna baza podprzestrzeni nieosobliwej nie zawiera wektorów izotropowych, i że można ją rozszerzyć do g–ortogonalnej bazy przestrzeni V.

b) Dowieść, że gdy podprzestrzeń W jest nieosobliwa, to $V = W \oplus W^\perp$.

c) Dowieść, że jeśli $V = W \oplus W^\perp$ i przestrzeń V jest nieosobliwa, to i podprzestrzeń W też jest taka.

3. Proste K, L w przestrzeni afinicznej A nazwiemy **równoległymi**, jeśli dla pewnej mapy S tej przestrzeni, wektor kierunkowy prostej $S(K)$ jest zarazem wektorem kierunkowym prostej $S(L)$. Dowieść, że bez zmiany znaczenia można w tej definicji zastąpić słowo „pewnej” przez „każdej”.

4. Dla punktu a przestrzeni afinicznej A utwórzmy przekształcenie $J_a : A \to A$ takie, że w pewnej mapie, zaczepionej w a, odpowiada mu symetria $-I_{\mathbb{F}^k}$ przestrzeni $\mathbb{F}^k$. Udowodnić, że gdy $F \in \mathrm{Af}(A,B)$, to przy $b = F(a)$ zachodzi $FJ_a = J_bF$. (Tu B też jest przestrzenią afiniczną, a J_b utworzono analogicznie jak J_a.)

Seria 21 (na 11 V)

Niech V będzie przestrzenią z wyróżnioną formą dwuliniową $g : V \times V \to \mathbb{F}$, która jest symetryczna lub jest antysymetryczna. Piszemy $\mathbf{v}\perp\mathbf{w} \Leftrightarrow g(\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0$ (wektory $\mathbf{v},\mathbf{w}$ nazywamy wtedy g–ortogonalnymi). Przyjmujemy też $A^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{a}\perp\mathbf{v} \text{ dla każdego } \mathbf{a} \in A\}$ (tu $A \subset V$). Wektor $\mathbf{v}$ nazywamy izotropowym, jeśli $g(\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0$. a nieizotropowym w przeciwnym razie.

1. Przemyśleć następujące (łatwe, lecz ważne) stwierdzenia, które pojawiły się na ćwiczeniach:

Forma symetryczna g jest w g–ortogonalnej bazie $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ zadana wielomianem $\sum \lambda_i x_i y_i$, gdzie $\lambda_i = g(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)$. Liczba nieizotropowych wektorów $\mathbf{v}_i$ jest równa $\mathrm{rk}(g)$, zaś gdy V jest przestrzenią rzeczywistą, to $\sigma_+(g) = \#\{i : g(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i) > 0\}$ oraz $\sigma_-(g) = \#\{i : g(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i) < 0\}$. Baza g–ortogonalna diagonalizuje więc formę g, a implikacja przeciwna też zachodzi.

2. a) Udowodnić, że $A^\perp$ jest podprzestrzenią liniową i $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.

b) Udowodnić, że $(A^\perp)^\perp \supseteq A$, $(\mathrm{lin}(A))^\perp = A^\perp = \bigcap_{a \in A} a^\perp$ oraz gdy $\mathbf{0} \in A \cap B$, to $(A+B)^\perp = (A \cup B)^\perp$.

c) Dowieść, że jeśli zbiór A liczy p elementów, to $\dim(A^\perp) \geq \dim(V) - p$ i wywnioskować, że $\dim(V_0^\perp) \geq \dim(V) - \dim(V_0)$ dla każdej podprzestrzeni liniowej V_0 przestrzeni V.

3. Dowieść, że gdy forma g jest symetryczna i $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p$ jest ortogonalnym układem wektorów nieizotropowych, to wzór $\mathbf{v} \mapsto \sum_{i=1}^{p} \frac{g(\mathbf{v},\mathbf{v}_i)}{g(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)} \mathbf{v}_i$ zadaje przekształcenie liniowe, które jest rzutowaniem przestrzeni V na podprzestrzeń $W := \mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p)$, wzdłuż podprzestrzeni $W^\perp$.

Przypominam też o zaległych zadaniach i o przemyśleniu materiału z „rozdziałów" VI i VII – możemy dyskutować ew. pytania.

Seria 20 (na 6 V)

1. $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie funkcją dwuliniową, której macierz w standardowej bazie ma wiersze równe $(2,2,1), (2,5,2), (1,2,1)$. Znaleźć, jeśli istnieje, g–ortogonalną bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, której pierwsze dwa wektory leżą w przestrzeni $\{(x_i) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2\}$.

2. Część b) zadania z poprzedniej serii (w poprawionej obecnie wersji).

3. Niech $p = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{k} c_k x_k$, przy czym współczynniki $\lambda_1, ..., \lambda_s$ są dodatnie, dla pewnego $s \geq 1$. Dowieść, że jeśli $r < k$ i $c_k \neq 0$, to dla każdej podprzestrzeni liniowej $V_0 \subset \mathbb{R}^k$ takiej, że $\dim(V_0) > k - s - 1$, zachodzi $p(V_0) \supset [0, \infty)$.

(Wskazówka: zbadać zachowanie się funkcji $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto p(\lambda \mathbf{v})$ dla $\mathbf{v} \in \mathrm{lin}(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_s, \mathbf{e}_k)$.)

4. a) Dowieść, że każda izometria liniowa przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ma wektor własny, odpowiadający wartości 1 lub -1.

b) Oryginalne twierdzenie Eulera orzeka, że każda izometria liniowa przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest obrotem wokół prostej lub złożeniem obrotu z odbiciem zwierciadlanym względem płaszczyzny, prostopadłej do osi obrotu. Dowieść tego i uzyskać taki rozkład dla izometrii, zadanej macierzą o wierszach $(2/3, 2/3, -1/3), (2/3, -1/3, 2/3), (-1/3, 2/3, 2/3)$.

Przypominam też o zadaniach 3 i 4 z serii 16.

Seria 19 (na 4 V, a pisemne na 6 V).

1. Niech $q = 2x_1x_2 + 2x_3x_4 \in \mathbb{R}_2[x_1, x_2, x_3, x_4]$ i niech $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją dwuliniową, określoną wzorem $g((x_i)_{i=1}^4, (y_i)_{i=1}^4) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 + x_4y_3$.

a) Znaleźć podstawienie ortogonalne, diagonalizujące formę q (tzn. przeprowadzające ją w formę o macierzy diagonalnej).

b) Zbadać, czy istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^4$, w której macierzą funkcji g jest $\mathrm{diag}(\mathbf{A}, \mathbf{A})$, gdzie $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Jeśli baza istnieje, wskazać ją. (Wystarcza wskazać szczegółowy sposób jej wyznaczenia.)

c) Znaleźć bazę przestrzeni $\mathbb{R}^4$, ortogonalną względem g i względem standardowego iloczynu skalarnego.

d) Czy istnieje w $\mathbb{R}^4$ podprzestrzeń trójwymiarowa, na której funkcja g jest dodatnio określona?

Przypominam też o zadaniach 3 i 4 serii 16 i o dokończeniu zadania 3 serii 18 (ustalenie obrazu i jądra rzutu Q). Poniższe zadanie jest pisemne (na 6 V):

16. a) (3p.) Znaleźć podstawienie ortogonalne, diagonalizujace formę $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$.

b) (3p.) Wyznaczyć maksymalny wymiar podprzestrzeni, na której forma ta jest dodatnio określona. Odpowiedź uzasadnić.

Seria 18 (na 29 IV)

1. Udowodnić, że gdy operatory $K \in \mathcal{L}(V)$ i $L \in \mathcal{L}(W)$ są podobne, to $\chi_K = \chi_L$.

2. Wyposażmy przestrzeń $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ w iloczyn skalarny $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \mathrm{tr}(\mathbf{X}\mathbf{Y}^*)$ i odpowiadającą mu normę. Udowodnić, że gdy macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{M}_k(\mathbb{C})$ są unitarnie podobne, to $||\mathbf{A}|| = ||\mathbf{B}||$.

3. Udowodnić, że jeśli jeden z operatorów podobnych P, Q jest rzutem, to drugi też. Ściślej, gdy P jest rzutem przestrzeni X na U wzdłuż W, a $S : X \to Y$ jest izomorfizmem takim, że $Q = SPS^{-1}$, to Q jest rzutem przestrzeni Y na $S(U)$ wzdłuż $S(W)$. (Być może już to zadanie omawialiśmy.)

Ponadto nierozwiązane są jeszcze zadania 3 i 4 z serii 16 oraz 3 z serii 15.

Seria 17 (na 27 IV, a pisemne na 29 IV).

1. Powtórzyć pisemne z serii 15, lecz z $f(x, y, z, t) = 2xy - z^2$.

2. Niech $\mathbf{J}(\lambda, s_1), \mathbf{J}(\lambda, s_2), ..., \mathbf{J}(\lambda, s_t)$ będą tymi klatkami jordanowskimi macierzy Jordana operatora L, które odpowiadają wartości λ. Dowieść, że

a) t jest wymiarem przestrzeni własnej $V_L(\lambda)$.

b) $n_\lambda := s_1 + ... + s_t$ jest krotnością λ jako pierwiastka wielomianu χ_L,

c) liczba $m_\lambda = \max_i s_i$ (wskazująca rozmiar największej spośród wymienionych klatek) jest równa $\inf\{n : \mathrm{rk}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^n = \mathrm{rk}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{n+1}\}$.

Proszę też pamiętać o nierozwiązanych dotąd zadaniach ustnych.

Poniższe dwa zadania są pisemne (na 29 IV).

14. Niech $\mathbb{F} = \mathbb{R}, V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i $f(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$ dla $\mathbf{A} \in V$.

a) (2p) Dowieść, że jest to funkcja wielomianowa stopnia 2 i wyznaczyć wielomian, którym jest zadana w pewnej bazie przestrzeni V. (Wybór bazy jest pozostawiony do uznania.)

b) (2p.) Wyznaczyć macierz funkcji f w tej bazie i sygnaturę funkcji f.

c) (4p.) Powtórzyć a) i b) przy V zastąpionym przez $W := \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_2 : \mathrm{tr}(\mathbf{A}) = 0\}$, zaś f przez $f_{|W}$.

15. (5p.) Znaleźć macierz $\mathbf{B}$, której trzecia potęga ma wiersze $(1, 0, 3), (2, 1, -1), (0, 0, 1)$.

Seria 16 (na 22 IV)

1. Dowieść, że:

a) Jeśli $V_0 \supset \mathrm{im}(L)$ lub $V_0 \subset \ker(L)$, to podprzestrzeń V_0 jest L-niezmiennicza.

b) Podprzestrzeń L–niezmiennicza jest i $p(L)$–niezmiennicza, dla $p \in \mathbb{F}[x]$.

c) Gdy operatory $K, L \in \mathcal{L}(V)$ są przemienne (tzn. $KL = LK$) i podprzestrzeń V_0 jest L–niezmiennicza, to $K(V_0)$ i $K^{-1}(V_0)$ też są L–niezmiennicze

Poniższe zadania pochodzą z dawniejszych kolokwiów. Proszę się z nimi zapoznać; będziemy je omawiać na kolejnych ćwiczeniach w miarę postępów w rozwiązywaniu. Pierwsze z nich jest standardowe, a kolejne dwa trudniejsze.

2. Niech

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & t \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Znaleźć bazę Jordana dla operatora $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, zadanego macierzą $\mathbf{A}$. (Równoważnie: znaleźć, jeśli istnieje, macierz nieosobliwą $\mathbf{C}$ taką, że $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ jest macierzą Jordana.)

b) Dla jakich t istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^4$, w której macierz operatora $L_{\mathbf{A}}$ jest równa $\mathbf{B}_t$?

3. * Niech $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ będą kwadratowymi macierzami rzeczywistymi tego samego rozmiaru $k \times k$.

a) Dowieść, że jeśli $\mathrm{rk}\mathbf{A} = 1$ i $\mathbf{A}^2 \neq \mathbf{0}$, to macierz $\mathbf{A}$ jest diagonalizowalna.

b) Dowieść, że jeśli ponadto $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, to $\mathbf{B}$ ma przynajmniej jeden wektor własny, a dla k parzystych ma przynajmniej dwa liniowo niezależne wektory własne.

4. * Niech $L \in \mathcal{L}(V)$, gdzie $\dim V = k$, będzie operatorem o wielomianie charakterystycznym $\chi_L = (\lambda_1 - x)^{n_1} ... (\lambda_s - x)^{n_s}$, dla parami różnych $\lambda_1, ..., \lambda_s$. Niech wymiar przestrzeni własnej operatora L, odpowiadający wartości λ_i, wynosi k_i. Niech $K = L - \lambda_1 I$ i niech $K' = K_{|\mathrm{im}(K)} \in \mathcal{L}(\mathrm{im}(K))$. Znaleźć stopień wielomianu charakterystycznego operatora K' oraz jego pierwiastki i ich krotności.

Seria 15 (na 20 IV) , a pisemne na 22 IV).

Komunikat z wykładu, który zapomniałem powtórzyć na ćwiczeniach:

Osobom, które uzyskały niesatysfakcjonujące je wyniki z kolokwium, przypominam o dokształcaniu w grupach 5-osobowych pod kierunkiem studentów starszych lat, organizowanym przez dra Strojnowskiego. Aktywne uczęszczanie na te zajęcia będzie mogło być „językiem u wagi" przy końcowej ocenie tych, którzy przekażą mi terminy swych zajęć i nazwisko osoby prowadzącej grupę, do której uczęszczają. Zwłaszcza osobom, które uzyskały mniej niż 44p. z ostatniego kolokwium, lub mniej niż 50% na koniec poprzedniego semestru, zalecam skorzystanie z tej możliwości.

1. Niech $\mathbf{A}$ oznacza macierz z serii 12. Dowieść istnienia ośmiu macierzy $\mathbf{B}$ takich, że $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$. (Wskazówka: sprowadzić zadanie do analogicznego, lecz dotyczącego macierzy diagonalnej.)

2. Operator $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ zadany jest wzorem $L(x,y,z) = (x+y-z, -3x-3y+3z, -2x-2y+2z)$. Znaleźć a) jego macierz Jordana, b) bazę Jordana przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dla tego operatora.

3. (poprawione) Niech $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ będą wektorami własnymi operatora $L \in \mathcal{L}(V)$, odpowiadającymi parami różnymi wartościom własnym. Dowieść, że jeśli suma $\sum_i \mathbf{v}_i$ należy do L–niezmienniczej podprzestrzeni $W \subset V$, to każdy z tych wektorów do niej należy.

Poniższe zadanie jest pisemne (na czwartek 22 IV).

13. Niech

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad f(x,y,z,t) = x^2 + 2xy - z^2 - 2zt - 2t^2$$

a) Zbadać sygnaturę macierzy $\mathbf{A}$.

b) Zbadać, czy istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^4$, w której $\mathbf{A}$ jest macierzą powyższej formy $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

c) Znaleźć bazę, o której mowa w b) (jeśli istnieje).

Seria 14 (na 15 IV)

Bardzo proszę o przyswojenie sobie najważniejszych twierdzeń dotyczących macierzy endomorfizmów liniowych. (Postać Jordana, diagonalizacja „zwykła" i unitarna, znajdowanie baz diagonalizujących, funkcje macierzy.) Proponowane zadania zakładają opanowanie tego materiału, i podobnie będzie na kolokwium czy egzaminie.

1. Niech macierz $\mathbf{A}$ będzie rzeczywista i symetryczna. Dowieść, że

a) Liczba $M := \sup\{\langle \mathbf{Av}, \mathbf{v}\rangle : ||\mathbf{v}|| = 1\}$ jest jej największą wartością własną, a liczba $m := \inf\{\langle L(\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle : ||\mathbf{v}|| = 1\}$ –najmniejszą.

b) Jeśli $\langle \mathbf{Av}, \mathbf{v}\rangle = m||\mathbf{v}||^2$ i $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, to $\mathbf{v}$ jest wektorem własnym macierzy $\mathbf{A}$, i tak samo przy m zastąpionym przez M.

Wskazówka zadania 1 jest jak w ub. serii. Proszę też przemyśleć nierozwiązane jeszcze zadania 3 i 4 z ub. serii.

2. (Zadanie ze str. 71 skryptu doc. Koźniewskiego.) Znaleźć podstawienie liniowe przeprowadzające formę q w formę q' o macierzy diagonalnej, gdy $q = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_4^2 + 4x_1x_2 + 8x_3x_4$. (Ciałem skalarów jest $\mathbb{R}$.) Wyznaczyć też otrzymaną formę q'.

Seria 13 (na 13 IV)

Ponieważ na kolokwium nieźle wypadły zadania rachunkowe, a teoretyczne gorzej, będę teraz dawał mniej tych pierwszych, kosztem drugich. Tym razem nie ma więc zadania pisemnego, a ustnych daję trochę na wyrost –możemy je omawiać na kilku ćwiczeniach.

Zadania łączy wspólna wskazówka: starać się zbadać wpierw przypadek „prostych” macierzy, a potem wykorzystać podobieństwo unitarne. Co oznacza „prosta macierz” należy sobie dopowiedzieć – może to być np. macierz diagonalna, jeśli założenia zadania wykazują unitarne podobieństwo do takiej macierzy; gdy tak nie jest, musimy niekiedy uznać n.p. macierz trójkątną za „prostą”. Tak więc każde z zadań dzieli się na dwie części i w zależności od ilości czasu i od upodobania można wybrać tak zadania, jak i części, nad którymi chcemy się zastanawiać.

1. Udowodnić **nierówność Schura**: dla kwadratowej macierzy zespolonej $\mathbf{A}$ mamy $\sum |a_{ij}|^2 \geq \sum |\lambda_i|^2$, gdzie $\lambda_1, \lambda_2, ...$ są wszystkimi pierwiastkami wielomianu $\chi_{\mathbf{A}}$, każdy powtórzony tyle razy, ile wynosi jego krotność.

2. Dowieść, że gdy macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ jest symetryczna i różna od $\mathbf{0}$, to $\langle \mathbf{Av}, \mathbf{v}\rangle_{\mathbb{R}^k} \neq 0$ dla pewnego wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$.

3. Jeśli $\mathbf{v}$ jest wektorem własnym macierzy normalnej $\mathbf{A}$, odpowiadającym wartości λ, to jest też wektorem własnym macierzy $\mathbf{A}^*$, odpowiadającym wartości $\overline{\lambda}$.

4. Dowieść równoważności warunków:

a) macierz $\mathbf{A}$ jest normalna i $\mathrm{spec}(\mathbf{A}) \subset [0, \infty)$;

b) macierz $\mathbf{A}$ jest samosprzężona i dodatnio półokreślona (tzn. $\langle \mathbf{Av}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{Av}\rangle \geq 0$ dla wszystkich $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$);

c) $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$ dla pewnej macierzy samosprzężonej $\mathbf{B}$;

Seria 12 (na 8 IV 2010). Proszę ponownie przemyśleć nierozwiązane jeszcze zadania z ostatniej serii. Poniższe zadanie jest pisemne:

12. (4p.) Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą stopnia 3, której wyrazy na przekątnej są równe 5, a pozostałe -1. Wyznaczyć macierz diagonalną $\mathbf{D}$, ortogonalną $\mathbf{C}$ i odwrotność $\mathbf{C}^{-1}$ macierzy $\mathbf{C}$, dla których $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$.

Seria 11 (na 30 III 2010).

1. Niech $\mathbf{E}_{ij} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ oznacza $k \times k$–macierz, której ij–ty wyraz jest równy 1, a pozostałe są równe 0. Przyjmując wpierw $k = 2$ dowieść, że:

a) Macierze $\mathbf{E}_{ii}$ i $\mathbf{E}_{jj}$ są podobne (nad $\mathbb{F}$).

b) Gdy $i \neq j$, to macierz $\mathbf{E}_{ij}$ jest podobna do $\lambda\mathbf{E}_{ij}$ dla $\lambda \neq 0$.

c) Gdy $\#\mathbb{F} > 2$ i $f : \mathcal{M}_k(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ jest funkcją liniową, przyjmującą na każdych dwóch macierzach podobnych tę samą wartość, to $f(\mathbf{A}) = f(\mathbf{E}_{11})\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$.

W zadaniach 2 i 3 zacząć od przypadku, gdy $\mathbf{A}$ jest macierzą Jordana (a w razie kłopotu – od przypadku macierzy diagonalnej, a następnie diagonalizowalnej).

2. Niech wielomian charakterystyczny macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ rozkłada się nad $\mathbb{F}$ na czynniki liniowe: $\chi_{\mathbf{A}} = (\lambda_1 - x)...(\lambda_k - x)$, gdzie $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{F}$. Dowieść, że dla każdego wielomianu $p \in \mathbb{F}[x]$ mamy $\chi_{p(A)} = (p(\lambda_1) - x)...(p(\lambda_k) - x)$; w szczególności, $\mathrm{tr}(p(\mathbf{A})) = \sum_i p(\lambda_i)$ oraz $\det(p(\mathbf{A})) = \prod_i p(\lambda_i)$.

3. Dla kwadratowej macierzy zespolonej $\mathbf{A}$ dowieść, że $\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n = \mathbf{0} \Leftrightarrow |\lambda| < 1$ dla $\lambda \in \mathrm{spec}(\mathbf{A})$. (Piszemy tu $\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n = \mathbf{0}$ jeśli $(\mathbf{A}^n)_{ij} \to 0$ dla każdych i, j, gdzie $(\mathbf{A}^n)_{ij}$ to ij–ty wyraz macierzy $\mathbf{A}^n$.)

Poniższe zadania są pisemne (na 1 IV)

11. Niech $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, 2x_1 - 4x_3 + 2x_4, -2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4, -2x_1 - x_4)$.

a) (3p.) Znaleźć wartości własne i bazy podprzestrzeni własnych operatora L.

b) (3p.) Znaleźć macierz Jordana tego operatora.

c) (3p.) Znaleźć postać Jordana macierzy $\mathbf{A}$ o kolejnych wierszach
$(2, 3, 0, 1), (0, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 2), (0, 0, 0, -1)$.

d) (2p.) Zbadać, czy $\mathbf{A}$ może być macierzą operatora L w pewnej bazie.

Seria 10 (na 23 III 2010).

W związku z kolokwium, proszę przejrzeć też zadania ze skryptu doc. Koźniewskiego (część II), dotykające przestrzeni unitarnych. Są to zadania 1-5 ze str. 19-20, 1-6 ze str. 26-27, 1-6 ze stron 30-31, 1-5 ze stron 49 i 3 ze strony 39. Te, które będą sprawiały kłopot, lub którekolwiek z wcześniejszych zadań pisemnych domowych, możemy omówić.

1. (Zadanie 2 str. 19 ze skryptu TK) Zbadać, dla jakich parametrów $t \in \mathbb{R}$ zachodzi

$W_t \subset W^\perp$, a dla jakich $W = W_t^\perp$, gdy $W_t = \mathrm{lin}\{(2,5,0,0),(t+2,4+3t,-2+t,(t-2)^2)\}$, zaś podprzestrzeń W jest opisana układem równań $x_1+2x_2-x_3+x_4=0,\ x_1+3x_2+x_3-x_4=0$.

2. Jakie wektory własne, wartości własne i podprzestrzenie własne ma operator $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}^t$, działający z $\mathcal{M}_k$ do $\mathcal{M}_k$?

Przypominam też o zadaniach 2 i 3 z serii 9, i 2 z serii 7.

Poniższe zadania są pisemne (na czwartek 25 III).

10. Zbadać diagonalizowalność $\mathbf{A}$ jako macierzy nad $\mathbb{F}$, gdy

a) (3p.) $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ i wierszami $\mathbf{A}$ są $(-1,3,-1),(-3,5,-1),(-3,3,1)$.

b) (3p.) $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ i wierszami $\mathbf{A}$ są $(4,2,-5),(6,4,-9),(5,3,-7)$.

Seria 9 (na 18 III 2010).

1. Dowieść, że gdy operatory K, L na przestrzeni unitarnej V są unitarnie podobne i $\langle K(\mathbf{v}),\mathbf{v}\rangle \geq 0$ dla każdego $\mathbf{v}\in V$, to i $\langle L(\mathbf{v}),\mathbf{v}\rangle \geq 0$ dla każdego $\mathbf{v}\in V$.

2. Niech operatory $K\in\mathcal{L}(V)$ i $L\in\mathcal{L}(W)$ oraz izomorfizm $S\in\mathcal{L}(V,W)$ spełniają warunek $K=S^{-1}LS$. Dowieść, że dla dowolnego wielomianu $p\in\mathbb{F}[x]$ zachodzi równość $p(K)=S^{-1}p(L)S$, skąd $\ker(p(L))=S(\ker(p(K)))$ i $\mathrm{im}(p(L))=S(\mathrm{im}(p(K)))$.

3. Dowieść, że każda 2×2–macierz $\mathbf{A}$ jest podobna do $\mathbf{A}^t$. (Tak samo większa macierz, lecz dowód jest trudny.)

4. Proszę przejrzeć „,ćwiczeniowe" tematy kolokwialne zamieszczone na końcu pliku UNI.pdf. W ostatniej przed kolokwium serii zadań mogę zamieścić zadania ze wskazanych przez Państwo tematów.

Seria 8 (na 16 III 2010) i pisemne na 18 III.

Przypominam o nierozwiązanych zadaniach z poprzednich serii!

1. (zadanie ze strony A. Webera.) Korzystając z dwuliniowości iloczynu skalarnego i wektorowego dowieść dla wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że

a) $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v},(\mathbf{u}+\mathbf{w})\times\mathbf{v}\rangle = -\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\times\mathbf{w}\rangle$

b) $\langle \mathbf{u}+2\mathbf{v}-\mathbf{w},(\mathbf{u}-\mathbf{v})\times(\mathbf{u}-\mathbf{v}-\mathbf{w})\rangle = 3\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\times\mathbf{w}\rangle$.

2. Niech $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ będzie taką macierzą, że wzór $\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle_{\mathbf{A}} = \mathbf{v}^t\mathbf{A}\mathbf{w}$ dla $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^k$ zadaje iloczyn skalarny na przestrzeni $\mathbb{R}^k$. (Wektory traktujemy jako macierze o jednej kolumnie.) Dowieść, że

a) Macierz $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa;

b) Gdy $L\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k)$ jest przekształceniem liniowym, którego macierz oznaczmy przez $\mathbf{B}$, to macierz przekształcenia sprzężonego do L, względem iloczynu skalarnego $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{A}}$, jest równa $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{A}$. (Macierze przekształceń rozpatrujemy w standardowej bazie przestrzeni $\mathbb{R}^k$.)

3. Dowieść równości $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}-\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\mathbf{w}-\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle\mathbf{u}$ dla $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$.

Zadania pisemne (na 18 III). Zadania pisemne będą miały jednolitą numerację. Ponieważ dotąd było ich 6, więc teraz zaczynamy od 7.

7. Obliczyć odległość od warstwy $A = (0,-1,7)+\mathbb{R}(0,3,4)$ do osi x–ów w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (ze standardowym iloczynem skalarnym), a także wyznaczyć wektor $\mathbf{a}\in A$, minimalizujący pole powierzchni równoległoboku $R(\mathbf{a},(5,0,0))$.

8. Obliczyć odległość wektora $\mathbf{v} = (2,4,-4,2)$ do zbioru rozwiązań układu równań $x_1+2x_2+x_3-x_4 = 1,\ x_1+3x_2+x_3-3x_4 = 2$, a także wskazać rozwiązanie tego układu, najbliższe wektorowi $\mathbf{v}$. (Iloczyn skalarny jest standardowy.)

9. Podać we współrzędnych kartezjańskich wzór na:

a) Symetrię ortogonalną względem prostej $\mathbb{R}(1,2,3)$ i symetrię ortogonalną względem płaszczyzny $x+2y+3z = 0$.

b) Obrót wokół wektora $(1,1,-1)$ o $\pi/2$.

(Iloczyn skalarny i orientacja w $\mathbb{R}^3$ są standardowe.)

Seria 7 (na 11 III 2010).

1. Dla wielomianu $p = c_0+c_1x+...+c_kx^k$ i zespolonej macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ przyjmujemy $\overline{p} = \overline{c_0}+\overline{c_1}x+...+\overline{c_k}x^k$ i $p(\mathbf{A}) = c_0\mathbf{I}+c_1\mathbf{A}+...+c_k\mathbf{A}^k$. Udowodnić, że $(p(\mathbf{A}))^* = \overline{p}(\mathbf{A}^*)$.

2. Niech $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ będzie macierzą antysymetryczną (tzn. $\mathbf{A}^t = -\mathbf{A}$). Dowieść istnienia wektora $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3$ takiego, że $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{a}\times\mathbf{v}$ dla $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$.

3. Udowodnić, że $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = a\mathbf{u}+b\mathbf{v}$ dla pewnych $a,b\in\mathbb{R}$ (to jedna z hipotez, postawionych na ćwiczeniach). Jako zadanie z $*$: dowieść, że należy przyjąć $a = -\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle$ i $b = \langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle$.

4. Niech $L\in\mathcal{L}(V,W)$ będzie zanurzeniem izometrycznym. (Przestrzenie V i W są unitarne). Dowieść, że

a) $L^*L = I_V$.

b) Gdy P jest rzutowaniem ortogonalnym przestrzeni V na jej podprzestrzeń V_0, to LPL^* jest rzutowaniem ortogonalnym przestrzeni W na podprzestrzeń $W_0 := L(V_0)$.

Seria 6 (na 9 III 2010).

W **1** i **2**, V jest przestrzenią z iloczynem skalarnym (rzeczywistą lub zespoloną).

1. Gdy $W\subset V$ jest podprzestrzenią i wektor $\mathbf{v}\in V$ spełnia warunek $\mathrm{Re}\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = 0$ dla każdego $\mathbf{w}\in W$, to $\mathbf{v}\perp W$.

2. Gdy podprzestrzenie $U, W \subset V$ są skończonego wymiaru, to $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

3. Gdy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{C})$ i $\mathrm{rk}(\mathbf{A}) = k$, to istnieje górnie trójkątna $k \times k$-macierz $\mathbf{S}$ taka, że $\mathbf{AS}$ jest macierzą zanurzenia izometrycznego.

Poniższe zdania są pisemne, z terminem 11 III (czwartek).

1. Niech $\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' + xy' + x'y + 2yy'$ dla $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$.

a) Zbadać, czy jest to iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^2$ i jeśli jest, to znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

b) Dla każdej liczby $t \in \mathbb{R}$ wyznaczyć wzorem (we współrzędnych kartezjańskich) sprzężenie przekształcenia $L_t : (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle) \to (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, zadanego wzorem $L_t(x, y) = (x + 2y, -x + ty)$.

c) Zbadać dla jakich $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie L_t jest izometrią, a dla jakich jest przekształceniem samosprzężonym.

2. Przestrzeń $\mathbb{R}^3$ rozważamy ze standardowym iloczynem skalarnym.

a) Obliczyć odległość wektora $\mathbf{v} = (2, 1, 2)$ od warstwy $A = (0, 1, 1) + \mathrm{lin}((1, 0, 1), (2, 1, 0))$.

b) Wyznaczyć na krzywej $\{(r^2 - 5, r, 2r^2) : r \in \mathbb{R}\}$ wektor $\mathbf{w}$ minimalizujący objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $(1, 0, 1), (2, 1, 0), \mathbf{w}$.

Seria 5 (na 4 III 2010). Nie wyznaczam nowych zadań, bo zapisanie wcześniejszych zadań pisemnych zajmie Państwu trochę czasu. Na ćwiczeniach będziemy rozwiązywać m.in. zadania 4.2.4, 4.2.1 e), f) i niektóre część zadań 4.1.14, 4.1.15 i 4.1.17 ze zbioru Kostrykina (cześć II, strony 121 i 125)–mam nadzieję, że znajdą Państwo czas na przemyślenie ich, by dyskusja przeszła sprawniej. (Ochotnicy uzyskują punkty za aktywność!)

Seria 4 (na 2 III 2010).

1. Niech $\mathbf{v}'$ będzie rzutem ortogonalnym wektora $\mathbf{v}$ na podprzestrzeń liniową W i niech $\mathbf{w} \in W$. Dowieść, że $\angle(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \leq \angle(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

2. Dla $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ niech $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^t)$. Dowieść, że

a) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest iloczynem skalarnym na $(\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$

b) $\mathbf{A} \mapsto \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^t)$ jest rzutem ortogonalnym przestrzeni $\mathcal{M}_k$ na podprzestrzeń $U = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k : \mathbf{A} = \mathbf{A}^t\}$ (wszystkich macierzy symetrycznych).

c) $U^\perp = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k : \mathbf{A} = -\mathbf{A}^t\}$ (podprzestrzeń macierzy antysymetrycznych).

3. Przy oznaczeniach powyższego zadania, znaleźć dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni $W = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(\mathbf{A}) = 0\}$.

Poniższe zdania są pisemne, z terminem 4 III (czwartek). Również termin oddania zadania pisemnego z poprzedniej serii jest zmieniony na 4 III.

Uwaga: W zadaniach pisemnych proszę dawać wyczerpujące wyjaśnienia!

1. (Każdy podpunkt może przynieść 2p.)
Niech $U = \mathrm{lin}((1,1,1,1),(1,2,2,-1),(1,0,0,3))$ i $\mathbf{v} = (4,-1,-3,4)$.
a) Wyznaczyć bazę ortogonalną przestrzeni $U^\perp$.
b) Wyznaczyć rzut ortogonalny wektora $\mathbf{v}$ na U.
c) Wyznaczyć odległości od wektora $\mathbf{v}$ do U i od $\mathbf{v}$ do $U^\perp$.
d) Wyznaczyć obraz wektora $\mathbf{v}$ w symetrii ortogonalnej względem U.

2. (3p.) Przyjmijmy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_4y_4 + x_1y_4 + x_4y_1$. Dowieść, że jest to iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^4$ i znaleźć bazę przestrzeni $\mathbb{R}^4$, ortogonalną względem niego.

Seria 3 (na 25 II 2010).

1. Przestrzeń $\mathbb{C}^k$ rozpatrujemy ze standardowym iloczynem skalarnym i dla $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_k) \in \mathbb{C}^k$ piszemy $\mathrm{Re}(\mathbf{v}) = (\mathrm{Re}(v_1), ..., \mathrm{Re}(v_k))$ i podobnie dla $\mathrm{Im}(\mathbf{v})$ i $\overline{\mathbf{v}}$. Dowieść, że
a) Jeśli $\mathbf{v} \perp \overline{\mathbf{v}}$, to $||\mathrm{Re}(\mathbf{v})|| = ||\mathrm{Im}(\mathbf{v})|| = ||\mathbf{v}||/\sqrt{2}$ oraz $\mathrm{Re}(\mathbf{v}) \perp \mathrm{Im}(\mathbf{v})$.
b) $\mathrm{Re}(\lambda\mathbf{v}) \perp \mathrm{Im}(\lambda\mathbf{v})$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2. W przestrzeni z iloczynem skalarnym dane są wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ takie, że $||\mathbf{u}|| = ||\mathbf{v}||$ i $\mathbf{v} \neq \pm\mathbf{u}$. Dowieść, że $\angle(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}) = \pi/2$. (Tu $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ oznacza wprowadzoną na wykładzie miarę kąta wyznaczonego przez wektory $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$.)

3. Uogólnić nierówność równoległoboku następująco: dla $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ zachodzi $\sum_\varepsilon || \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbf{v}_i||^2 = 2^n \sum_{i=1}^n ||\mathbf{v}_i||^2$, gdzie sumowanie jest po wszystkich ciągach $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$. (Inaczej: średnią arytmetyczną liczb $c_\varepsilon := || \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbf{v}_i||^2$, $\varepsilon \in \{-1,1\}^n$, jest $\sum_{i=1}^n ||\mathbf{v}_i||^2$.)

Zadanie pisemne (na wtorek 2 III).

1. Niech U oznacza powłokę liniową wektorów $(1,1,-1,-2), (5,8,-2,-3), (3,9,3,8)$ w $\mathbb{R}^4$. (Na $\mathbb{R}^4$ rozpatrujemy standardowy iloczyn skalarany.)
a) Znaleźć bazę ortonormalną tej podprzestrzeni i w oparciu o to wyznaczyć ortogonalny rzut wektora $(0,1,0,-1)$ na U.
c) Wyznaczyć ten rzut nie korzystając z bazy ortogonalnej w U.

Seria 2 (na 23 II 2010).

1. Udowodnić, że gdy $\langle\cdot,\cdot\rangle_U$ i $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ są iloczynami skalarnymi na przestrzeniach U i V, odpowiednio, to wzór $\langle(\mathbf{u}, \mathbf{v}), (\mathbf{u}', \mathbf{v}')\rangle := \langle\mathbf{u}, \mathbf{u}'\rangle_U + \langle\mathbf{v}, \mathbf{v}'\rangle_V$ zadaje iloczyn skalarny na przestrzeni $U \times V$.

2. Udowodnić, że gdy $L : U \to V$ jest zanurzeniem liniowym, to iloczyn skalarny $\langle .,. \rangle$ na przestrzeni V zadaje wzorem $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \mapsto \langle L(\mathbf{u}_1), L(\mathbf{u}_2) \rangle$ iloczyn skalarny na U. W szczególności, każda podprzestrzeń liniowa $V_0 \subset V$ jest przestrzenią unitarną z „obciętym" iloczynem skalarnym $V_0 \times V_0 \ni (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \mapsto \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$.

3. Wyrazić ten iloczyn gdy $U = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}_2[x]$ i $L(\mathbf{a}) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ dla $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$, zaś $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ dla $f, g \in V$.

4. Przyjmijmy $\mathbf{v}' = \frac{1}{||\mathbf{v}||^2}\mathbf{v}$ dla $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. (Przekształcenie $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}'$ nazywane jest **inwersją** względem sfery $||\mathbf{v}|| = 1$.) Dowieść, że $||\mathbf{v}' - \mathbf{w}'|| = ||\mathbf{v} - \mathbf{w}||/||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||$.

5. Dowieść, że gdy V jest przestrzenią unitarną i $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, to ma miejsce tożsamość Apolloniusza:

$||\mathbf{u} - \mathbf{v}||^2 = 2||\mathbf{u} - \mathbf{w}||^2 + 2||\mathbf{v} - \mathbf{w}||^2 - 4||\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{2} - \mathbf{w}||^2.$

(Wskazówka: można wykonywać rachunki bezpośrednio na $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, lecz można też starać się zredukować zadanie do przypadku $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. W każdym razie rozwiązanie w tym przypadku będzie już częściowo uznawane.)

Gdy $V = \mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym, dać interpretację tożsamości Apolloniusza w terminach długości boków i środkowej trójkąta.

Seria 1 (na 18 II 2010).

1. =I.3.2.7 ze zbioru zadań Kostrykina [Ko] (numeracja wg wydania z 1995r, chodzi o zad. 3.2.7 w rozdziale I).

2. =I.3.2.2 z [Ko]: wybrać wartości i, j, k tak, by iloczyn $a_{51}a_{i6}a_{1j}a_{35}a_{44}a_{6k}$ wystąpił ze znakiem minus w rozwinięciu wyznacznika stopnia 6.

3. (=I.1.3.10 z [Ko]): Dowieść, że każdą permutację $\sigma \in S_n$ można przedstawić jako iloczyn transpozycji postaci

a) $(1\ j)$, gdzie $j = 2, 3, ..., n$.

b) $(j-1\ j)$, gdzie $j = 2, 3, ..., n$.

4. a) Dowieść, że $u(x_1, ..., x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n}(x_j - x_i)$ jest antysymetryczną funkcją zmiennych rzeczywistych $x_1, ..., x_n$. (Wskazówka: zadanie 3b).)

b) Wywnioskować, że permutacja $\sigma \in S_n$ jest parzysta, gdy taka jest jej **liczba przestawień**, zdefiniowana jako liczba tych par $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$, dla których $i < j$ i $\sigma(i) > \sigma(j)$.

GAL I, jesień 2009

Zadania domowe, grupa 13 (czwartkowo–wtorkowa, prowadzący H. Toruńczyk).

Seria 26 (na 19 I 2010).

Przypominam, że nie omówiliśmy jeszcze ważnych zadań 3 i 5 z serii 24 –proszę je ponownie przemyśleć i zgłaszać wraz z poniższymi na najbliższych ćwiczeniach.

1. Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & s & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. W zależności od wartości parametru s wyznaczyć a) $\det(\mathbf{A})$, b) $\mathrm{rk}(\mathbf{A})$.

2. Niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ będzie macierzą, której pierwszy wiersz i pierwsza kolumna są równe $(0, 1, ..., 1)$, a pozostała klatka ma wszystkie wyrazy przekątnej równe 0, a pozostałe równe s. Wyznaczyć $\det(\mathbf{A})$, $\det(\mathbf{I} - \mathbf{A})$, $\det(\mathbf{A}^3)$ i $\det(\mathbf{A} - \mathbf{A}^2)$.

3. Obliczyć wyznacznik $k \times k$–macierzy, której ostatnim wierszem jest $(y, 0, ..., 0, x)$, pierwszym $(x, y, 0, ..., 0)$, drugim $(0, x, y, 0, ..., 0)$ itd. aż do wiersza przedostatniego, równego $(0, ..., 0, x, y)$.

4. Czy to, że przekształcenie $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ jest różnowartościowe, można wyrazić przez rząd macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$? (Por. dyskusję na ćwiczeniach zadania 2 z serii 24.)

Poniższe zadanie może być rozwiązywane jako pisemne przez tych, którzy rozwiązania zadania 2b) z poprzedniej serii nie dali lub chcą je zastąpić lepszym:

5. Podprzestrzeń $U \subset \mathbb{R}^3$ jest równa $\mathrm{lin}((1, 0, 1), (1, 1, 2))$. Opisać układem równań jej przeciwobraz $L^{-1}(U)$ przy przekształceniu $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$, którego macierzą (w standardowych bazach) jest $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & -5 & -5 & -14 \end{bmatrix}$.

Seria 25 (na 14 I 2010).

1. Zdaje się, że zadanie pisemnie z poprzednie serii sprawia kłopoty rachunkowe (nie biorę odpowiedzialności za odpowiedź, jest przepisana z Kostrykina). Jako konkurencyjne z nim (do wyboru) proponuję następujące zadanie nie wymagające rachunków:

Dowieść, że gdy klatki $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$ są kwadratowe, to wyznacznik macierzy $\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}$ jest równy iloczynowi $\det(\mathbf{P})\det(\mathbf{Q})$. (Wskazówka: sprowadzić klatki $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$ do postaci schodkowej operacjami typu (I).)

2. W oparciu o dyskusję z ćwiczeń podać opis (uwikłany lub parametryczny, do wyboru) przestrzeni W, gdy (przyjmujemy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$):

a) $W = L_{\mathbf{A}}(V)$, gdzie $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, a V to zbiór rozwiązań układu równania $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

b) $W = L_{\mathbf{A}}^{-1}(U)$, gdzie macierz $\mathbf{A}$ jest jak wyżej, a U jest powłoką liniową wektorów $(1, 0, 1, 0)$ i $(1, 1, 0, 1)$.

Powyższe zadania są pisemne, przy czym a) i b) w zadaniu 2 liczone są jako pełne zadania. (Czyli można uzyskać 3×3 punkty: 3 za wybrane zadanie 1–to lub z poprz. serii, i po 3 za każdą z części zad. 2.)

Przypomnę, że w zad. 2 wygodnie jest V przedstawić w postaci parametrycznej, a U – uwikłanej. (Uzyskanie takiego opisu daje część punktów.) Dyskusja z ćwiczeń oparta była o rzecz następującą: gdy dane są przekształcenia $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ oraz zbiór $Z_0 \subset Z$, to $(g \circ f)^{-1}(Z_0) = f^{-1}(g^{-1}(Z_0))$. (Stosowaliśmy to, gdy przekształcenia i przestrzenie są liniowe, a $Z_0 = \{\mathbf{0}\}$.) Proszę tę ogólną własność przekształceń przemyśleć jako zadanie ustne.

Seria 24 (na 12 I 2010, a pisemne na 14 I).

1. Obliczyć wyznacznik macierzy $\mathbf{A}$, gdy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{bmatrix}$$

Powyższe zadanie jest pisemne (a odpowiedź wg. zbioru Kostrykina to 301). o czytelne wyjaśnienia poszczególnych przekształceń macierzy i wykonywanych rachunków!

Co do zadań ustnych i przygotowania do kolokwium, zmieniłem nieco koncepcję. Zadania ze skryptu T. Koźniewskiego mogą Państwo samodzielnie przeglądać i wskazane przez Państwa możemy omawiać na ćwiczeniach, poza oznaczonymi literą D w „kluczu” z następnej strony (te też możemy, ale przy nadmiarze czasu). To samo dotyczy zadań ze strony A. Webera. Na ćwiczeniach wtorkowych przedstawię natomiast pewne zadania z kolokwiów z ub. lat. Proszę też o przemyślenie następujących zadań:

2. Dowieść, że gdy przekształcenie $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ jest „na”, to wiersze macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$ są liniowo niezależne, i odwrotnie.

3. i) Jaki jest związek między $[L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$ a $[L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}'}$, jeśli $\mathcal{V}'$ otrzymano z bazy $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ przez a) zastąpienie wektora $\mathbf{v}_i$ wektorem $c\mathbf{v}_i$? b) zastąpienie go wektorem $\mathbf{v}_i + c\mathbf{v}_j$?

c) zamianę wektorów $\mathbf{v}_i$ i $\mathbf{v}_j$ miejscami? (Tu $1 \leq i, j \leq k$ i $c \in \mathbb{F}$.)

ii) A pomiędzy $[L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$ a $[L]_{\mathcal{W}'}^{\mathcal{V}}$, jeśli $\mathcal{W}'$ w podobny sposób otrzymano z $\mathcal{W}$?

4. Rozpatrujemy przestrzeń $\mathcal{M}_{2,4}$ wszystkich 2×4–macierzy rzeczywistych i jej podprzestrzeń złożoną z tych macierzy $\mathbf{A}$, dla których $a_{12} + a_{21} = 0 = a_{12} + 2a_{21} = a_{12} + 3a_{21}$. Jaki jest wymiar tej podprzestrzeni?

5. a) Jaka jest macierz rzutu $V = U \oplus W$ na U wzdłuż W w bazach $\mathcal{V}, \mathcal{V}$, gdzie $\mathcal{V} = (\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l)$, zaś $(\mathbf{u}_i)$ i $(\mathbf{w}_j)$ to bazy podprzestrzeni U i W, odpowiednio?

b) A jaka jest macierz, nadal w bazach $\mathcal{V}, \mathcal{V}$, symetrii względem U wzdłuż W?

c) Dla przekształcenia $L \in \mathcal{L}(V, W)$ i baz $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p$ przestrzeni $\ker(L)$ i $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_q$ przestrzeni $L(V)$, obierzmy bazę $\mathcal{V} = (\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_q, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p)$ przestrzeni V z dowodu lematu 1 w §5.1 pliku WEKT.pdf z mej strony, i rozszerzmy układ $(\mathbf{w}_i)_{i=1}^q$ do bazy $\mathcal{W} = (\mathbf{w}_i)_{i=1}^r$ przestrzeni W. Jaka jest macierz $[L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$?

Klucz do stopnia trudności zadań w skrypcie T. Koźniewskiego:
A podstawowe, B łatwe typowe, C łatwe uzupełniające, D trudniejsze

Rozdział 1. Wszystkie zadania A

Rozdział 2.
1: 1 C, 2 B, 3 B, 4 B2: 1 B, 2 B
3: 1 A, 2 B, 3 A
4: 1 A, 2 B, 3 B
5: 1 A, 2 B, 3 A, 4 A, 5 C, 6 D

Rozdział 3. (Przestrz. liniowe)
1: 1 B, 2 C, 3 C, 4 B
2: 1 A, 2 A, 3 A, 4 A, 5 B
3: 1 A, 2 A, 3 A, 4 B, 5 B
4: 1 A, 2 A, 3 B, 4 C, 5 C, 6 D, 7 B, 8 D, 9 D
5: 1 A, 2 A, 3 A, 4 B, 5 A, 6 A, 7 C, 8 B, 9 C
6: 1 A, 2 A, 3 A, 4 A, 5 B, 6 C,
7: 1 B, 2 C, 3 C, 4 B, 5 C,
8: 1 A, 2 A, 3 A, 4 B, 5 C, 6 B, 7 B, 8 C, 9 C

Rozdział 4. (Przekszt. liniowe)
1: 1 A, 2 A, 3 A, 4 A, 5 C
2: 1 A, 2 B, 3 C, 4 B
3: 1 A, 2 A, 3 C, 4 C
4: 1 A, 2 B, 3 A, 4 C, 5 C
5: 1 A, 2 A, 3 B, 4 C, 5 B
6: 1 A, 2 A, 3 A, 4 B, 5 C
7: 1 A, 2 B, 3 D

Rozdział 5 (Wyznaczniki etc.)
1: 1 A, 2 A, 3 B
2: 1 A, 2 B, 3 B, 4 A, 5 A, 6 C, 7 B, 8 C, 9 B, 10 D
3; 1 A, 2 A, 3 A, 4 C

Seria 23 Dobrego Nowego Roku!

Ale po nim, ponieważ zbliżamy się już do końca semestru i do kolokwium, dobrze chyba zacząć powtórkę materiału. Myślę więc w styczniu dawać, poza pisemnymi, nieliczne tylko zadania, prosząc równocześnie o przeglądanie wyznaczonych porcji zbiorów zadań. Zadania, sprawiające kłopoty, omawialibyśmy na ćwiczeniach. (Tak więc od Państwa zależy, czy i które będziemy omawiać – należy przed ćwiczeniami zadania przemyśleć, by sensownie zdecydować.)

Na pierwszy tydzień zajęć w styczniu proponuję przejrzenie

a) zadań ze skryptu T. Koźniewskiego, ze stron 22, 25, 29/30 (poza 6, 8, 10) i 35-37;

b) zadań wywieszonych na stronie A. Webera pod adresem

http://duch.mimuw.edu.pl/ aweber/zadania/gal/gaza.pdf

–w tym tygodniu z rozdziałów 4,5,6, a w szczególności zadań 4.6, 5.5, 6.5 i od 6.8 do 6.10.

Poniższe zadania są zaś pisemne (na czwartek 8 I)

1. Znaleźć jądro i obraz przekształcenia $K \in \mathcal{L}(V)$, gdy

a) $V = \mathbb{F}[x]$ i $K(f) = f - f'$, gdzie f' to pochodna wielomianu f,

b) $V = \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ i $K(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^t)$.

W obu przypadkach zbadać, czy K jest rzutem liniowym.

2. Dla największych możliwych liczb p, q, s znaleźć nieosobliwą $s \times s$ – podmacierz macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix}$, a także p liniowo niezależnych wierszy i q liniowo niezależnych kolumn macierzy $\mathbf{A}$. (Jak zawsze, odpowiedź uzasadnić!)

3. Niech $L : \mathbb{R}_7[x] \to \mathbb{R}[x]$ oznacza przekształcenie, które każdemu wielomianowi przyporządkowuje jego trzecią pochodną.

a) Dowieść, że $\{f : (x^3 + x + 1)|L(f)\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}_7[x]$ i znaleźć jej wymiar. (Tu $g|h$ oznacza „wielomian g dzieli h".)

b) Dowieść istnienia niezerowego wielomianu $f \in \mathbb{R}_7[x]$ takiego, że jego trzecia pochodna dzieli się przez $x^3 + x + 1$, a on sam przez $x^4 + x - 2$.

Seria 22 (na 15 XII). W związku z przedświątecznym nastrojem, nie ma nowych zadań ustnych (pisemne były ogłoszone wcześniej). Proszę o przemyślenie dotychczasowych zadań i wcześniejszego materiału; jeśli są związane z tym pytania, to dobrze jest je omówić.

Wskazówka do pisemnych zadań 2 i 3: $K \in Z \Leftrightarrow \mathrm{im}(K) \subset \ker(L)$.

Seria 21 (na 15 XII, a pisemne na 17 XII).

Niech $L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem takim, że $[L] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.
(To L jest wspólne dla zadań 1-3.)

1. Znaleźć a) bazę obrazu $\mathrm{im}(L)$ przekształcenia L i b) wymiar jądra $\ker(L)$ tego przekształcenia.

2. Niech $Z = \{K \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^5) : L \circ K = 0\}$. Dowieść, że Z jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^5)$ i wyznaczyć $\dim(Z)$.

3. Określić wzorem we współrzędnych kartezjańskich takie przekształcenie $K \in Z$, które ma maksymalny rząd (wśród przekształceń ze zbioru Z, określonego wyżej).

Powyższe zadania są pisemne. Proszę też o przemyślenie takich zadań ustnych:

4. a) Jakiego wymiaru jest przestrzeń Z, złożona z tych wielomianów stopnia ≤ 4, które są podzielne przez $x^2 + x + 1$?

b) Jakiego wymiaru jest jądro przekształcenia $L : \mathbb{R}_5[x] \to \mathbb{R}_4[x]$, które przyporządkowuje każdemu wielomianowi $f \in \mathbb{R}_5[x]$ jego pochodną $f' \in \mathbb{R}_4[x]$?

c) Jakiego wymiaru jest przestrzeń Y tych wielomianów $f \in \mathbb{R}_5[x]$, których pochodna jest podzielna przez $x^2 + x + 1$?

5. Jaki jest warunek konieczny i wystarczający dla istnienia przekształcenia $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ takiego, że $\mathrm{im}(L) = \ker(L)$? Gdy przekształcenie takie istnieje, określić je wzorem.

6. a) Dowieść, że $\mathrm{rk}([\mathbf{A}|\mathbf{B}]) \leq \mathrm{rk}(\mathbf{A}) + \mathrm{rk}(\mathbf{B})$, oraz

b) $\mathrm{rk}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \mathrm{rk}(\mathbf{A}) + \mathrm{rk}(\mathbf{B})$ gdy suma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ istnieje. (Użyć a).)

7. a) Dowieść, że gdy T jest zbiorem skończonym, a funkcje $f_1, ..., f_n : T \to \mathbb{F}$ są liniowo niezależne w przestrzeni $\mathbb{F}^T$, to istnieje n–elementowy zbiór $T_0 \subset T$ taki, że obcięcia tych funkcji do T_0 są liniowo niezależne.

b)* Dowieść tego dla nieskończonego zbioru T.

Seria 20 (na 10 XII).

Zadania pisemne były sformułowane w poprzedniej serii. (W zadaniu 4 jest jednak poprawka–w jednym miejscu było L zamiast K; teraz jest dobrze.) Proszę też o przemyślenie następujących zadań ustnych:

5. Niech $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ i $\mathcal{W} = (\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l)$ będą bazami przestrzeni V i W, odpowiednio. Na ćwiczeniach ustalono, że bazą przestrzeni $\mathcal{L}(V, W)$ jest zbiór $\{L_{ij} : 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq k\}$, gdzie L_{ij} jest przekształceniem takim, że $[L_{ij}]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} = \mathbf{E}_{ij} \in \mathcal{M}_{l,k}$.

a) Podać wzór na przekształcenie L_{ij}.

b) Ustalić, jaka jest macierz $[L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$, jeśli znane są współczynniki c_{ij} w przedstawieniu $L = \sum_{i,j} c_{ij} L_{ij}$.

6. Dokończyć rozwiązywanie zadania 7 z poprzedniej serii.

Seria 19 (na 8 XII, a pisemne na 10 XII).

Zadania 1-4 są pisemne (na czwartek 10 XII).

W zadaniach 1-3 znaleźć bazy i wymiary podprzestrzeni $V_1 \cap V_2$ i $V_1 + V_2$, gdy

1. $V_1 = \mathrm{lin}(2,1,3,4),(3,9,3,9),((-1,7,-3,1)),\ V_2 = \mathrm{lin}((1,-3,3,0),(2,5,3,5),((1,8,0,5))$

2. $V_1 = \mathrm{lin}((3,2,1,0),(4,3,0,2),(1,2,2,-3))$, a V_2 jest zbiorem rozwiązań układu równań $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 5x_4 = 0$.

3. V_1 i V_2 to zbiory rozwiązań układów $2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0,\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$ (dla V_1) i $-x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0,\ 2x_2 - 4x_2 + 10x_3 - 6x_4 = 0$ (dla V_2).

4. Niech przekształcenie $K \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ma w bazach $\mathcal{V} = ((1,1,0),(0,1,1),(1,2,0))$, $\mathcal{W} = ((1,2),(1,3))$ macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, i niech $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane wzorem $L(x,y) = (x-y, x+2y)$.

a) Znaleźć ciąg współrzędnych $[L(K(\mathbf{v}))]_{\mathcal{W}}$ wiedząc, że $[\mathbf{v}]_{\mathcal{V}} = (2,1,1)$.

b) Zbadać, czy istnieje przekształcenie $K_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ takie, że $K \circ K_1$ jest identycznościowym przekształceniem przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Jeśli K_1 istnieje, zadać je wzorem (we współrzędnych kartezjańskich).

5. Niech $K \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ będzie zadane wzorem $K(x,y) = (x,y,0)$. Zbadać, dla jakich wektorów $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ istnieje przekształcenie $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ takie, że $L \circ K = 0$ i $\mathrm{im}(K \circ L) = \mathrm{lin}(\mathbf{v})$.

6. Niech $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, gdzie V to przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{F}$, skończonego wymiaru. Dowieść istnienia funkcji liniowej $\ell : V \to \mathbb{F}$ takiej, że $\ell(\mathbf{v}) = 1$. (Wskazówka: posługując się twierdzeniem z ostatniego wykładu o możliwości przedłużania przekształceń liniowych, sprowadzić zadanie do przypadku, gdy $V = \mathrm{lin}(\mathbf{v})$.)

7. Niech V_1, V_2, V_3 będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Dowieść, że jeśli $V_1 \subset V_2$, to $V_2 \cap (V_1 + V_3) = V_1 + V_2 \cap V_3$.

Seria 18 (na 3 XII)

Zadania pisemne ogłoszone były w poprzedniej serii. Proszę też o przemyślenie następujących zadań ustnych:

1. a) Zauważyć, że gdy podprzestrzenie U i W przestrzeni $\mathbb{F}^k$ są zadane w postaci uwikłanej, to łatwo tak zadać i $U \cap W$. (Natomiast nie byłoby tak, jeśliby „uwikłanej" zastąpić przez „parametrycznej".)

b) W oparciu o a) obmyśleć sposób znajdywania bazy w $U \cap W$, w zależności od tego, jak zadano każdą z przestrzeni U i W.

2. Niech macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{l,k}$ będą wierszowo równoważne. Dowieść, że:

a) Macierz $\mathbf{A}$ ma tę samą przestrzeń wierszy, co $\mathbf{B}$.

b) Jeśli kolumny macierzy $\mathbf{A}$ o numerach $k_1, ..., k_s$ są liniowo niezależne, to jest tak i dla macierzy $\mathbf{B}$.

Seria 17 (na 1 XII, a pisemne na 3 XII)

1. Dla zbiorów $A_1, ..., A_k \subset V$ przyjmijmy $\sum_{i=1}^{k} A_i := \{\mathbf{v}_1 + ... + \mathbf{v}_k : \mathbf{v}_1 \in A_1, ..., \mathbf{v}_k \in A_k\}$. Dowieść, że

a) $\mathrm{lin}(A \cup B) = \mathrm{lin}(A) + \mathrm{lin}(B)$, skąd $\mathrm{lin}(A \cup B) = \mathrm{lin}(A' \cup B)$ gdy $\mathrm{lin}(A) = \mathrm{lin}(A')$.

b) Jeśli $V_1, ..., V_k$ są podprzestrzeniami, to $\mathrm{lin}(V_1 \cup ... \cup V_k) = \sum_{i=1}^{k} V_i$.

Zbiór $A \subset V$ nazywamy liniowo zależnym, jeśli istnieją wektory $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in A$ i skalary $c_1, ..., c_k$, nie wszystkie równe 0, dla których $\sum_i c_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$.

2. Niech $L \in \mathcal{L}(V, W)$ i niech $A \subset V$. Udowodnić, że

a) Jeśli zbiór A jest liniowo zależny, to $L(A)$ też.

b) Implikacja przeciwna jest słuszna gdy $\ker(L) = \{\mathbf{0}\}$.

c) Ma miejsce równość $L(\mathrm{lin}(A)) = \mathrm{lin}(L(A))$.

3. Niech V będzie k–wymiarową przestrzenią nad ciałem skończonym, liczącym q elementów.

a) Ile jest wektorów w przestrzeni V? A ile w jej s–wymiarowej podprzestrzeni?

b) Dla $s = 1, ..., k$, ile jest liniowo niezależnych układów $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_s)$?

c) A ile jest s–wymiarowych podprzestrzeni przestrzeni V, dla s j.w.?

Wskazówka: zauważyć, że układ $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^{s+1}$ jest liniowo niezależny $\Leftrightarrow$ układ $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^{s}$ jest taki i $\mathbf{v}_{s+1} \notin \mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., v_s)$; wykorzystać a) do wyznaczenia mocy zbioru $\mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_s)$.

Poniższe zadania są pisemne (na 3 XII)

1. Oznaczmy przez $\mathcal{M}_2$ przestrzeń 2×2–macierzy rzeczywistych, a przez $\mathcal{V}$ jej bazę $(\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22})$. (Macierz $\mathbf{E}_{ij}$ ma jedynkę w miejscu ij–tym, a poza nim zera.) Dla macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ i przekształcenia $L : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ zadanego wzorem $L(\mathbf{X}) = \mathbf{XA}$ wyznaczyć $[L]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}$.

2. Niech dla bazy $\mathcal{V} = (1, x, x^2)$ przestrzeni $V = \mathbb{R}_2[x]$ i przekształcenia $L \in \mathcal{L}(V, V)$

zachodzi $[L]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dowieść, że $\mathcal{W} := (3x^2+2x+1, x^2+3x+2, 2x^2+x+3)$ jest bazą przestrzeni V i wyznaczyć $[L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}$.

3. Dowieść, że istnieje jedyne przekształcenie $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, przeprowadzające $(1,1,1)$ na $(1,1,1)$, $(0,1,0)$ na $(0,1,0)$ i $(1,0,2)$ na $(1,0,1)$. Wyznaczyć to przekształcenie wzorem (we współrzędnych kartezjańskich).

4. Niech $\mathcal{V} = ((1,0,1,0),(0,1,1,1),(0,1,1,0),(1,1,1,1))$ i $\mathcal{W} = ((5,4),(4,3))$, i niech przekształcenia $K \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ i $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$ będą zadane warunkami

$$K(x,y,z) = (3x - y - 2z, 3x + 4y + z, 5x + 2z, x + y + z), \quad [L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Znaleźć wzór na $L \circ K$ we współrzędnych kartezjańskich.

Seria 16 (na 26 XI)

1. Zadanie pisemne sformułowane w poprzedniej serii; patrz też uwaga po nim. (Zadanie to ma 4 części, każde punktowane jako oddzielne zadanie.)

Proszę o przemyślenie następujących zadań ustnych:

2. Dokończyć rozwiązywanie zadania z ćwiczeń: jeśli $K \in \mathcal{L}(U,V)$ i $L \in \mathcal{L}(U,W)$, przy czym $\ker(K) \subset \ker(L)$, to $L = S \circ K$ dla pewnego przekształcenia $S \in \mathcal{L}(K(U),W)$.

(Przypominam, że pozostała do udowodnienia taka własność: jeśli dla danego wektora $\mathbf{v} \in K(U)$ obierzemy wektor $\mathbf{u} \in U$ tak, by $K(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$, to wartość $S(\mathbf{v}) := L(\mathbf{u})$ nie zależy od dokonanego wyboru.)

3. Przypomnieć sobie, jak możemy tworzyć bazę przestrzeni rozwiązań układu równań jednorodnych, i jak z postaci zredukowanej macierzy tego układu odczytać wymiar przestrzeni rozwiązań.

Seria 15 (na 24 XI, a pisemne na 26 XI)

1. Rozpatrzmy operator różniczkowania $L : \mathbb{R}^4[x] \to \mathbb{R}^4[x]$, zadany wzorem $L(f) = f'$ (pochodna wielomianu f).

a) Wyznaczyć macierz $[L]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}$, gdzie $\mathcal{V} = (1, x, x^2, x^3, x^4)$.

b) Sprawdzić prawdziwość tożsamości $[L]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}[f]_{\mathcal{V}} = [L(f)]_{\mathcal{V}}$ dla $f \in \mathbb{R}_4[x]$.

2. a) Niech $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ i $(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l)$ będą bazami przestrzeni V i W, odpowiednio. Dowieść, że układ $(\mathbf{v}_1, \mathbf{0}), ..., (\mathbf{v}_k, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, \mathbf{w}_1), ..., (\mathbf{0}, \mathbf{w}_l)$ jest bazą przestrzeni $V \times W$.

b) Wyznaczyć wzór na $\dim(V_1 \times ... \times V_n)$ dla przestrzeni $V_1, ..., V_n$, posiadających bazy skończone.

3. Dowieść, że przestrzeń rzeczywista $\mathbb{R}[x]$ nie ma bazy skończonej.

4. Dowieść, że baza $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ przestrzeni rzeczywistej V pozostaje też bazą jej „kompleksyfikacji", opisanej w zadaniu 2 serii 11. (Ta kompleksyfikacja jest przestrzenią zespoloną.)

Poniższe zadanie jest pisemne (na 26 XI); każda jego część będzie traktowana jako oddzielne zadanie (do 3p.).

1. a) Niech $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$ i $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Wyznaczyć współrzędne, względem bazy $\mathcal{V}$, wektora $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$.

Określmy następnie przekształcenie $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wzorem $L(x, y, z) = (2y + x, x - 4y, 3x)$, i dla danych baz $\mathcal{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ i $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oznaczmy przez $\mathbf{C}$ macierz, której j–tą kolumną jest ciąg $[L(\mathbf{a}_j)]_{\mathcal{B}}$ współrzędnych wektora $L(\mathbf{a}_j)$ względem bazy $\mathcal{B}$. W każdym z poniższych przypadków wyznaczyć macierz $\mathbf{C}$ i bezpośrednio sprawdzić prawdziwość tożsamości $\mathbf{C}[\mathbf{w}]_{\mathcal{A}} = [L(\mathbf{w})]_{\mathcal{B}}$ dla $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$:

b) $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{V}$ (baza zdefiniowana wyżej),

c) $\mathcal{A} = \mathcal{V},\ \mathcal{B} = \mathcal{E}$ (baza standardowa)

d) $\mathcal{A} = \mathcal{E}, \mathcal{B} = \mathcal{V}$.

Seria 14 (na 19 XI)

W związku z kolokwium, nie ma dalszych zadań pisemnych, poza podanymi w serii 13.

Proszę też o przemyślenie następujących zadań ustnych:

1. W zadaniu 3 z serii 13 przyjmijmy $s = t = 1$. Podać bazę przestrzeni $L_{1,1}^{-1}(\mathbf{0}) := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : L_{1,1}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$.

2. a) Niech wielomiany $f_0, ..., f_n \mathbb{F}[x]$ spełniają warunek $\deg(f_i) = i$ dla $i = 0, 1, ..., n$. Dowieść, że tworzą one bazę przestrzeni $\mathbb{F}_n[x]$.

b) Obmyśleć sposób wyznaczenia współrzędnych wielomianu f w tej bazie, gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ i $f_i = (x - a)^i$ dla $i = 0, ..., n$.

Seria 13 (na 17 XI, a pisemne na 19 XI)

Poniżej, U, V, W to przestrzenie liniowe nad tym samym ciałem skalarów.

1. Dowieść, że:

a) Złożenie przekształceń $L \circ K$ liniowych $K : U \to V$ i $L : V \to W$ jest przekształceniem liniowym z U do W.

b) Odwrotność izomorfizmu liniowego $L : V \to W$ jest izomorfizmem liniowym

2. Dowieść, że gdy $K_1, K_2 \in \mathcal{L}(U, V)$ i $L \in \mathcal{L}(V, W)$, to $L \circ (K_1 + cK_2) = L \circ K_1 + c(L \circ K_2)$ dla $c \in \mathbb{F}$. ($\mathcal{L}(X, Y)$ to zbiór przekształceń liniowych z X do Y. Przekształcenia dodajemy i mnożymy przez skalar jak opisano na wykładzie.)

3. Dla $s, t \in \mathbb{R}$ oznaczmy przez $L_{s,t} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ przekształcenie liniowe, dane wzorem $L_{s,t}(x, y, z) = (sx + ty + tz, tx + sy + sz, tx + ty + sz)$.

a) Zbadać, dla jakich par (s, t) przekształcenie to ma odwrotność $L_{s,t}^{-1}$.

b) Jeśli ta odwrotność istnieje dla $s = 1, t = 2$, wyrazić ją wzorem.

Zadania pisemne (na 19 XI).

1. Znaleźć współrzędne wektora $\mathbf{v} \in V$ w bazie $\mathcal{V}$ i uzasadnić, że $\mathcal{V}$ jest bazą, gdy

a) $V = \mathbb{R}^2,\ \mathbf{v} = (1, 1),\ \mathcal{V} = ((1, -1), (-2, 3))$;

b) $V = \mathbb{R}_2[x],\ \mathbf{v} = 1 + x + x^2,\ \mathcal{V} = (x + x^2, x - x^2, 1 + x)$.

2. Wyznaczyć bazę i wymiar poniższych przestrzeni rzeczywistych V; uzasadnić też, że mamy do czynienia z bazą:

a) $V = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{10} : v_1 = v_{10} \text{ i } v_2 = 2v_3\}$.

b) $V = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(\mathbf{A}) = 0\}$.

Seria 12 na 12 XI)

Poniższe zadanie proszę przyjąć jako zadanie pisemne, prócz podanych wcześniej zadań 1 i 2.

1. Przedstawić macierz $\mathbf{A}$ w postaci iloczynu macierzy elementarnych, opowiadających wierszowym operacjom elementarnym typów I i II, gdy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Uwaga 1. Jeśli to wygodne, można w rachunkach dotyczących powyższego zadania wykorzystać zadanie następujące

2. Dowieść, że gdy na macierzy jednostkowej $\mathbf{I}_k$ wykonano jedną wierszową operację elementarną e, otrzymując macierz $\mathbf{E}$, to w wyniku wykonania na $\mathbf{I}_k$ operacji odwrotnej do e otrzymamy macierz $\mathbf{F}$ taką, że $\mathbf{EF} = \mathbf{FE} = \mathbf{I}_k$. (Patrz zadanie 3 w serii 7.)

3. W zadaniu 5 poprzedniej serii, uzyskać część c) w oparciu o b) i twierdzenie, że część wspólna rodziny podprzestrzeni jest podprzestrzenią.

Zadania 2 i 3 są do przemyślenia jako ustne.

Seria 11 (zadania pisemne 1 i 2 na 12 XI, a pozostałe proszę przemyśleć na 10. XI.)

1. Rozpatrujemy następujący układ równań nad $\mathbb{R}$, w którym $a, b \in \mathbb{R}$:

$3x - 2y + z = b$

$5x - 8y + 9z = 3$

$2x + y + az = -1$

Zbadać, dla jakich wartości a i b zbiór rozwiązań jest a) zbiorem skończonym, b) nieskończonym, c) pustym. W pierwszych dwóch przypadkach podać rozwiązanie ogólne.

2. Udowodnić stwierdzenie z wykładu: jeśli V jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$, to zbiór wyrażeń $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$, gdzie $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, tworzy przestrzeń nad $\mathbb{C}$, gdy działania w niej określić wzorami $(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) + (\mathbf{u}' + i\mathbf{v}') := \mathbf{u} + \mathbf{u}' + i(\mathbf{v} + \mathbf{v}')$ oraz $(a + bi)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) := a\mathbf{u} - b\mathbf{v} + i(b\mathbf{u} + a\mathbf{v})$.

3. Nazwijmy **elementarną** każdą macierz $\mathbf{E}$, otrzymaną z macierzy jednostkowej przez wykonanie jednej wierszowej operacji elementarnej. Z twierdzenia z wykładu wynika, że pomnożenie macierzy $\mathbf{A}$ z lewej strony przez $\mathbf{E}$ skutkuje wykonaniem odpowiadającej $\mathbf{E}$ operacji na $\mathbf{A}$.

a) Sprawdzić to bezpośrednio, wykonując mnożenie.

b) Sprawdzić, że gdy $\mathbf{E}$ jest macierzą elementarną, to $\mathbf{E}^t$ też.

4. Pierścień $\mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ jest też przestrzenią wektorową nad $\mathbb{F}$, bo określone jest mnożenie macierzy przez skalar, spełniające (wraz z dodawaniem macierzy) wymagane warunki. Zbadać, które z poniższych zbiorów macierzy stopnia k są podprzestrzenią tej przestrzeni:

a) zbiór macierzy symetrycznych;

b) zbiór macierzy diagonalnych;

c) zbiór macierzy odwracalnych;

d) zbiór macierzy, które nie są odwracalne;

e) zbiór macierzy przemiennych z daną macierzą;

f) zbiór macierzy przemiennych ze wszystkimi $k \times k$–macierzami.

5. Zbadać, które z poniższych zbiorów funkcji są podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ wszystkich funkcji $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) zbiór funkcji, przyjmujących w danym punkcie ustaloną wartość $a \neq 0$;

b) zbiór funkcji, przyjmujących w danym punkcie wartość 0;

c) zbiór funkcji, zerujących się na danym zbiorze $S \subset \mathbb{R}$;

d) zbiór funkcji, mających tylko skończenie wiele punktów nieciągłości.

e) zbiór funkcji, zerujących się poza zbiorem skończonym (zależnym od funkcji).

Seria 10 (na 5 XI)

Przepraszam, chyba omyliłem się wypisując macierze w zadaniu 3b1) poprzedniej serii (które jest zadaniem pisemnym w tej). Proszę przyjąć w nim

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Tak więc zadania pisemne to:

1. = drugie z serii 9,

2. = 3b1),b2) z serii 9 (z powyższą zmianą),

3. = 4b) z serii 9, oraz następującego

4. Niech $\mathbf{v}_1 = (0,0,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{v}_3 = (1,0,1,0)$, $\mathbf{v}_4 = (2,1,3,2)$.
Ustalić, czy wektory te są liniowo zależne, a jeśli są, to znaleźć współczynniki c_i, nie wszystkie równe 0, dla których $\sum c_i\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, a także wyrazić jeden z wektorów $\mathbf{v}_i$ jako kombinację pozostałych.

Proszę też o przemyślenie następującego zadania ustnego:

5. Z macierzy $\mathbf{A}$ w wyniku wykonania ciągu kolumnowych operacji elementarnych otrzymano macierz jednostkową. Czy macierz $\mathbf{A}$ jest odwracalna, a jeśli tak, to w jaki sposób otrzymać $\mathbf{A}^{-1}$?

Seria 9 (na 3 XI, a zadania pisemne na 5 XI)

Pisemne są zadania 2, 3b1,b2), 4b); jedno jeszcze dodam we wtorek.

1. Rozpatrzmy przekształcenie liniowe $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, zadane wzorem

$$L(x,y,z) = (3x+4y+2z, x+2y, 2x+y+3z, -x+5y-7z)$$

i) Zbadać, czy któryś z wektorów $(9,3,6,-3)$ i $(0,0,0,1)$ (a jeśli tak, to który) leży w obrazie $\mathrm{im}(L)$ przekształcenia L.

ii) Znaleźć układ jednorodnych równań liniowych, opisujący ten obraz (tzn. taki układ, którego zbiór rozwiązań jest równy $\mathrm{im}(L)$).

iii) Zbadać, czy wektory $L(\mathbf{e}_1), L(\mathbf{e}_2), L(\mathbf{e}_3)$ są liniowo niezależne.

iv) Zbadać, czy $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ dla pewnego niezerowego wektora $\mathbf{v}$, i czy przekształcenie L jest różnowartościowe.

2. To samo, przy $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zadanym wzorem
$L(x,y,z,t) = (4x+2y+10z, x+3y-5t, 2x+y+5z, -3x-9y+15t)$.

3. Dla poniższych par macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ rozwiązać równania macierzowe $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ (gdy rozwiązanie jest niejednoznaczne, wyrazić je w zależności od parametrów):

a1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^t$ a2) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

b1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ b2) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$

4. Podać układ fundamentalny rozwiązań $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_s$ i rozwiązanie ogólne $\mathbb{F}^s \ni (c_1, ..., c_s) \mapsto c_1\mathbf{w}_1 + ... + c_s\mathbf{w}_s$ dla układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, gdy ciałem skalarów $\mathbb{F}$ jest i) ciało $\mathbb{C}$ liczb zespolonych, ii) ciało $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych. Za $\mathbf{A}$ przyjmujemy

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & -7 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 10 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ -3 & -9 & 0 & 15 \end{bmatrix}$

5. a) Udowodnić, że przy pomocy elementarnych operacji na wierszach i kolumnach można każdą macierz kwadratową przeprowadzić w taką, która ma niezerowe wyrazy tylko na przekątnej, i są one równe 1. (Mogą pojawiać się i zera na przekątnej.)

b) Jaki jest odpowiednik tej tezy dla macierzy, które nie są kwadratowe?

Seria 8 (na 29 X)

Poniższe zadania są pisemne

1. Rozwiązać równanie $z^4(\overline{z})^2 = i|z|^2/16$.

2. Naszkicować zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z^3) < \mathrm{Re}(z^3)\}$.

3. Jest to zadanie 4b) z poprzedniej serii.

4. Jest to zadanie 5b) z poprzedniej serii.

5. Niech układ wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ przestrzeni $\mathbb{F}^k$ będzie liniowo niezależny (tzn. jeśli skalary c_i spełniają warunek $\sum_{i=1}^4 c_i\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, to $c_1 = ... = c_4 = 0$.) Czy jest to prawdą w odniesieniu do układu

a) $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$, gdzie $\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$, $\mathbf{w}_2 = 2\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4$, $\mathbf{w}_3 = 3\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 + 3\mathbf{v}_4$,

b) $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4$, gdzie $\mathbf{w}_4 = 8\mathbf{v}_1 + 11\mathbf{v}_2 + 6\mathbf{v}_3 + 6\mathbf{v}_4$, a pozostałe $\mathbf{w}_i$ są jak wyżej?

Seria 7 (na 27 X)

Definicja. Dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ i dla $p = a_0 + a_1x + ...a_sx^s \in \mathbb{F}[x]$ przyjmijmy

$$p(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{I}_k + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + ... + a_s\mathbf{A}^s$$

1. Wyznaczyć $p(\mathbf{A})$, gdy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $p = x^2 - (a+d)x + ad - bc$.

2. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ i $p, q \in \mathbb{F}[x]$. Dowieść, że:

a) $(p(\mathbf{A}))^t = p(\mathbf{A}^t)$.

b) Jeśli $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, to $p(\mathbf{A})q(\mathbf{B}) = q(\mathbf{B})p(\mathbf{A})$.

c) $(pq)(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A})q(\mathbf{A})$ i analogicznie dla iloczynu większej liczby wielomianów.

3. a) Wykazać, że do zadanej operacji elementarnej istnieje przeciwna i opisać ją. (Dwie operacje elementarne nazwiemy wzajemnie przeciwnymi, jeśli wykonanie na dowolnej macierzy $\mathbf{A}$ wpierw jednej z nich, a potem drugiej na otrzymanej macierzy $\mathbf{A}'$, w dowolnej kolejności, da wyjściową macierz $\mathbf{A}$.)

b) Otrzymać operację typu (III) (zamiany wierszy) poprzez wykonanie kolejno kilku operacji pozostałych dwóch typów.

4. Rozwiązać podane równania, przy czym rozwiązanie ogólne dać tak w postaci uwidaczniającej zależność niewiadomych prowadzących od wtórnych, jak i w postaci kombinacji liniowych ustalonych wektorów.

a) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 8 & 6 & 3 & 2 \\ -12 & -3 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ \lambda & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

5. Wyznaczyć wszystkie liczby λ, dla których wektor $\mathbf{b}$ jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ (tzn. $\mathbf{b} = \sum_i c_i \mathbf{a}_i$, gdzie $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$), gdy

a) $\mathbf{a}_1 = (2,3,5)$, $\mathbf{a}_2 = (3,7,8)$, $\mathbf{a}_3 = (1,-6,1)$, $\mathbf{b} = (7,-2,\lambda)$

b) $\mathbf{a}_1 = (3,2,5)$, $\mathbf{a}_2 = (2,4,7)$, $\mathbf{a}_3 = (5,6,\lambda)$, $\mathbf{b} = (1,3,5)$

Seria 6 (na 22 X)

1. Wykazać, że $x^n - 1 = (x-1)\prod_{2k<n}(x^2 - 2x\cos(\frac{2k\pi}{n}) + 1)$ dla nieparzystych n. (W razie trudności rozpatrzeć przypadek $n = 7$, wraz rysunkiem.)

2. Niech $a, b, c \in \mathbb{C}$ traktowane będą jako wierzchołki trójkąta. Dowieść, że trójkąt ten wtedy i tylko wtedy jest równoboczny, gdy $(a-b)^2 = (b-c)(c-a) \neq 0$. (Wskazówka: $c = a + (b-a)u$ dla pewnego u.)

3. Dla $a, b \in \mathbb{C}$ oznaczmy przez $\mathbf{Q}(a,b)$ 2×2–macierz zespoloną o pierwszej kolumnie (a,b) i drugiej $(-\overline{b}, \overline{a})$. Niech $\mathbb{H}' := \{\mathbf{Q}(a,b) : \ a, b \in \mathbb{C}\}$. Dowieść, że:

a) Zbiór $\mathbb{H}'$ jest zamknięty tak względem mnożenia macierzy, jak i ich dodawania.

b) Każdy element $\mathbb{H}' \backslash \{\mathbf{0}\}$ jest odwracalny w $\mathbb{H}'$ i odwrotnością $\mathbf{Q}(a,b)$ jest $\frac{1}{|a|^2+|b|^2}\mathbf{Q}(\overline{a}, -b)$.

c) Każdą macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{H}'$ można w dokładnie jeden sposób przedstawić w postaci $\mathbf{A} = t\mathbf{I} + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, gdzie $t, x, y, z \in \mathbb{R}$, a macierze $\mathbf{i}, j, k$ zostały zdefiniowane w poprzedniej serii.

4. * Niech $\mathbf{D}$ będzie $k \times k$ macierzą diagonalną, o parami różnych wyrazach na (głównej) przekątnej. Dowieść, że każda macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$, której przekątna jest zerowa, jest postaci $\mathbf{BD} - \mathbf{DB}$ dla pewnej macierzy $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$.

Poniższe zadanie jest pisemne, wraz z trzema podanymi w poprzedniej serii. Termin oddania: 22 X na początku ćwiczeń. Proszę numerować to zadanie jako czwarte z zadań pisemnych (a pozostałe zgodnie z numerami z serii 5).

5. a) Niech $\mathbf{D}$ będzie $k \times k$ –macierzą diagonalną, której wyrazy stojące na przekątnej są parami różne i różne od zera. Znaleźć wszystkie macierze $\mathbf{A}$ takie, że $\mathbf{AD} = \mathbf{DA}$.

b) Dowieść, że tylko macierze skalarne (tzn. postaci $c\mathbf{I}_k$, gdzie $c \in \mathbb{F}$) są przemienne z każdą macierzą $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$.

Seria 5

1. Rozpatrzmy macierze zespolone

$$\mathbf{i} := \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} := \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Dowieść, że $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{I_2}$ oraz $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$

b) Dowieść, że macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, przemienna z każdą z macierzy $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, jest skalarna (tzn. $\mathbf{A} = c\mathbf{I}_2$, dla pewnej liczby $c \in \mathbb{C}$).

2. Dla kwadratowej macierzy $\mathbf{X}$ przyjmijmy $\mathrm{tr}(\mathbf{X}) := \sum_i x_{ii}$.

a) Dowieść, że gdy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ i $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{k,l}(\mathbb{F})$, to macierze $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{BA}$ istnieją i $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$.

b) Dowieść, że gdy $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{F})$, to

$$\mathrm{tr}(\mathbf{B})\mathbf{A} + \mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathbf{B} - \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = (\mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathrm{tr}(\mathbf{B}) - \mathrm{tr}(\mathbf{AB}))\mathbf{I}.$$

3. Dowieść, $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$, tzn. że gdy jedna ze stron tej równości jest zdefiniowana, to druga też i równość ma miejsce. (Tu $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są macierzami nad tym samym ciałem.)

4. Rozłożyć na czynniki kwadratowe i liniowe wielomian $x^7 - x \in \mathbb{R}[x]$.

Uwaga: poniższe zadania są pisemne i będą zbierane 22 X na początku ćwiczeń. Podaję je już teraz, by nie brało czasu na zapisanie rozwiązań i by zdążyć omówić ewentualne wątpliwości (lecz nie rozwiązania!) we wtorek. (Dołożę też wtedy jedno lub dwa dalsze.)

1. Znaleźć postaci trygonometryczne pierwiastków stopnia 4 z liczby $-9i$.

2. Rozłożyć w $\mathbb{F}[x]$ na czynniki najniższych stopni następujące wielomiany:

a) $x^4 + 4$, przy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$;

b) $x^4 + 4$, przy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$;

c) $x^4 + 3x^2 + 9$, przy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

3. Niech $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z < \mathrm{Im} z\}$ i niech funkcje $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będą zadane wzorami $f(z) = (\sqrt{3} + i)z^3 + 2i$, $g(z) = (z+3)^3$. Naszkicować zbiory $f(D)$ i $g^{-1}(D)$.

Seria 4 (na 15 X). Jest to seria zadań pisemnych; prace należy oddawać na początku ćwiczeń. Proszę o zapisywanie objaśnień, umożliwiających zrozumienie rozwiązania!

1. W każdym z poniższych przypadków zobrazować na płaszczyźnie zbiór punktów odpowiadających liczbom zespolonym z, dla których:
a) $|z + 3 + 4i| \le 5$
b) $|\arg(z)| < \pi/6$
c) $2 < |z - 2i| \le 3$.

2. Przy $p = 1 + i$, $q = 4 + 5i$, wyznaczyć kolejno:
a) punkt $z \in \mathbb{C}$ taki, że trójkąt pqz jest równoboczny (są dwie możliwości);
b) punkt $u \in \mathbb{C}$, leżący na odcinku pz w odległości 1 od punktu p.

3. Udowodnić, że jeśli $|u| < 1$ i $|v| < 1$, to $|u + v| < |1 + u\overline{v}|$.

4. Udowodnić, że jeśli $|z| = 1$ i $z \neq 1$, to liczba $w = \frac{z+1}{z-1}$ jest czysto urojona, oraz że implikacja przeciwna też ma miejsce. (Wskazówka: badać, kiedy $w = -\overline{w}$.)

5. Niech $z = -1 + i\sqrt{3}$, a liczba n będzie podzielna przez 3. Obliczyć z^n korzystając ze wzoru Newtona i ze wzoru de Moivre'a, i podać otrzymane tożsamości.

Seria 3 (na 13 X)

Ta seria jest „teoretyczna", zadania rachunkowe będą na czwartek. Można sięgać do literatury!

1. Dowieść, że w każdym ciele $\mathbb{F}$:

a) wykonywalne jest odejmowanie, tzn. dla $a, b \in \mathbb{F}$ istnieje w $\mathbb{F}$ dokładnie jedno rozwiązanie równania $a + x = b$;

b) wykonywalne jest dzielenie przez elementy niezerowe, tzn. gdy $a, b \in \mathbb{F}$ i $a \neq 0$, to w $\mathbb{F}$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania $a \cdot x = b$;

c) istnieje tylko jeden element neutralny względem dodawania i tylko jeden element neutralny względem mnożenia.

2. Dowieść, że każde ciało liczbowe jest nieskończone.

3. Dowieść, że $\mathbb{Z}_n$ z działaniami określonymi na wykładzie jest pierścieniem przemiennym z jedynka, i że jest on ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n jest pierwsza.

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i dla $k = 0, ..., n-1$ niech liczby $\varepsilon_k \in \mathbb{C}$ będą dane w postaci biegunowej wzorami $\mathrm{Arg}(\varepsilon_k) = k\frac{2\pi}{n}$ i $|\varepsilon_k| = 1$, dla $k = 0, ..., n-1$. (Są to więc rozpatrywane na ćwiczeniach wierzchołki n–kąta foremnego, którego 1 jest jednym z wierzchołków, i wpisanego w okrąg jednostkowy $|z| = 1$.) Są one pierwiastkami wielomianu $x^n - 1$ (wzory de Moivre'a!) i są to wszystkie pierwiastki, bo jest ich n i $n = \deg(f)$.

4. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne dla $z \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$:
a) $z^n = 1$ i $z^l \neq 1$ dla $1 \leq l < n$;
b) $z = \varepsilon_k$ dla liczby k względnie pierwszej z n;
c) $\{z^l : l = 0, 1, ..., n-1\} = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}\}$.

5. Dowieść, że iloczyn wszystkich pierwiastków z 1 stopnia $n \geq 2$ jest równy $(-1)^{n-1}$, a suma jest równa 0. (Wskazówka: wzory Viety.)

Seria 2 (na 8 X)

1. Naszkicować zbiory tych punktów płaszczyzny $\mathbb{C}$, które spełniają zależności
a) $|\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Re}(z)| < 1$,
b) $1 \leq |z - 2i| < 2$,
c) $|z - 2| = \mathrm{Re}(z) + 2$.

2. Dowieść, że jeśli $|u| = |v|$ i $u \neq v$, to istnieją dokładnie 2 liczby zespolone z takie, że $|z - u| = |z - v|$ i $|z| = 1$. Podać interpretację geometryczną i sposób wyznaczenia.

3. a) Dowieść tożsamości $(|u_1|^2 + |u_2|^2)(|v_1|^2 + |v_2|^2) = |u_1 v_1 - u_2 \overline{v_2}|^2 + |u_1 v_2 + u_2 \overline{v_1}|^2$.
b) Wywnioskować, że jeśli każda z liczb naturalnych k, l jest sumą 4 kwadratów liczb całkowitych, to i kl jest taką sumą.

4. Rozpatrzmy równanie $a|z|^2 + \mathrm{Re}(uz) + b = 0$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ i $u \in \mathbb{C}$ są dane.
a) Dowieść, że opisuje ono prostą gdy $a = 0$ i $u \neq 0$, zaś okrąg, punkt lub $\emptyset$ gdy $a \neq 0$.
b) Dowieść, że każdą prostą i każdy okrąg można opisać równaniem takiej postaci.

5. a) Dowieść, że $\cos(n\alpha)$ można wyrazić jako funkcję wielomianową od $\cos(\alpha)$. (Liczna naturalna n jest ustalona i wielomian może tylko od niej zależeć.)
b) Wyznaczyć ten wielomian dla $n = 4$.

Seria 1 (na 6 X)

1. Obliczyć wartość wyrażeń
a) $\left(\frac{\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha}{\cos \alpha + i \sin \alpha}\right)^{30}$ dla $\alpha = \pi/5$
b) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$

2. Udowodnić, że gdy $|z| < 2$, to $|z^2 - z + i| < 7$ oraz $1 < |z^2 - 5| < 9$.

3. Dowieść, że $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$ dla $u, v \in \mathbb{C}$.

4. Dowieść, że gdy $|z| = 1$ i $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$, to $z^{10} + \frac{1}{z^{10}} = 2\cos(10\alpha)$. (Wskazówka: użyć biegunowego przedstawienia liczby z.)

5. * Dowieść w oparciu o równość $i^2 = -1$, że w zbiorze $\mathbb{C}$ <u>nie</u> można określić relacji $<$ spełniającej oba poniższe warunki:
a) dla każdych $z, z' \in \mathbb{C}$ zachodzi $z < z'$ lub $z = z'$ lub $z > z'$, i możliwości te wykluczają się wzajemnie, oraz
b) jeśli $z > 0$ i $z' > 0$, to $zz' > 0$ i $z + z' > 0$, zaś jeśli $z < 0$ i $z' < 0$, to $z + z' < 0$.