GAL II*, wiosna 2012 Zadania domowe, grupa 1 (prowadzący H. Toruńczyk).

Uwaga a) Na zajęciach proszę zgłaszać też rozwiązania nieomawianych dotąd zadań z porcji wcześniejszych, a także rozwiązania części zadań.

b) W każdym zadaniu można korzystać z poprzednich jego części i innych zadań, nawet, jeśli się ich nie rozwiązało.

c) Gdy nie zaznaczono inaczej, zadania są ustne – nie wymaga się oddania na piśmie.

Proszę się nie zrażać duża ilością zadań – najwyżej pewne z nich „spadną" na dalsze ćwiczenia. Skany rozwiązań pisemnych prac domowych są tu: http://students.mimuw.edu.pl/ lr306321

Dwudziesta dziewiąta porcja zadań.

1. Zbadać, czy istnieje punkt stały przekształcenia afinicznego $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i opisać to przekształcenie geometrycznie, jeśli

a) $F(\mathbf{0}) = (-2, 4)$ i w bazie standardowej macierz pochodnej [1] dF jest równa $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $F(\mathbf{0}) = (1, 1)$ i macierz pochodnej dF (w bazie standardowej) jest równa $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Znaleźć proste niemiennicze i punkty stałe przekształcenia afinicznego $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, zadanego warunkami $F(p_i) = q_i$ dla $i = 0, 1, 2$, jeśli $p_0 = (2, 1), p_1 = (1, 2), p_2 = (1, 1)$ oraz

a) $q_0 = (1, 1), q_1 = (1, 2), q_2 = (0, 1)$;

b) $q_0 = (4, 1), q_1 = (3, 3), q_2 = (2, 1)$;

c) $q_0 = (3, 1), q_1 = (3, 2), q_2 = (2, 1)$.

3. Niech $\mathbb{A}_1$ i $\mathbb{A}_2$ będą podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{A}$, zaś $V_1, V_2 \subset V_{\mathbb{A}}$ ich podprzestrzeniami kierunkowymi. Obierzmy punkty $a_i \in \mathbb{A}_i$ $(i = 1, 2)$ i przyjmijmy $s := \dim(V_1 + V_2)$ i $t := \dim(\mathbb{A}_1) + \dim(\mathbb{A}_2)$. Dowieść, że:

a) $\mathrm{af}(\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2) = a_1 + \mathbb{F}(a_1 - a_2) + V_1 + V_2$ i $(a_1 - a_2 \in V_1 + V_2) \Leftrightarrow (\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2) \neq \emptyset)$.

b) Jeśli $\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2 \neq \emptyset$, to $\dim \mathrm{af}(\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2) = s \leq t$ i $\dim(\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2) = t - s \geq \max(0, t - \dim(\mathbb{A}))$. Tak więc wtedy $\dim(\mathrm{af}(\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2)) = \dim \mathbb{A}_1 + \dim \mathbb{A}_2 - \dim(\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2)$.

c) Jeśli $\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2 = \emptyset$, to $\dim(\mathrm{af}(\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2)) = 1 + s = 1 + \dim \mathbb{A}_1 + \dim \mathbb{A}_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$.

Pozostały jeszcze pewne zadania zaległe. Do kanonu wykształcenia GALowego* należą zadania 28.1, 27.3 (nie zostały dokończone), 26.2, 21.2; chętnie widziane są też Państwa sugestie omówienia konkretnych zagadnień, np. z wywieszonych ostatnio licznych materiałów przygotowawczych. Jedne jeszcze ćwiczenia jestem Państwu winien – proszę między sobą wybrać ich termin.

Dwudziesta ósma porcja zadań. Dodaję tylko jedno, kilkuczęściowe zadanie. Proszę też pamiętać o zaległościach!

1. a) Niech $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, a L będzie obrotem liniowym płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, różnym od identyczności. Dowieść, że przekształcenie $L + \mathbf{u}$ ma punkt stały i w dowolnej mapie euklidesowej, zaczepionej w tym punkcie, odpowiada mu obrót liniowy.

b) Dowieść podobnej tezy przy L będącym odbiciem prostej $\mathbb{R}$ względem zera.

c) Dowieść, że każda izometria przestrzeni $\mathbb{R}^k$ zapisuje się w pewnej mapie euklidesowej jako suma ortogonalna przekształceń, z ktorych wszystkie poza być może jednym są przesunięciami prostych lub obrotami liniowymi płaszczyzn, a pozostałe (jeśli istnieje) jest liniowym odbiciem prostej. (Wskaz"owka: zapisać izometrię w postaci $L+\mathbf{u}$, gdzie $L \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^k)$ i $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$; do L zastosować wniosek 1 w §VI.3.3, a $\mathbf{u}$ rozbić na składowe w rozważanej we wniosku sumie prostej płaszczyzn i prostych.)

[1] Pochodna dF jest omówiona w §VIII.6.3, w przykładzie 1.

e) Wywnioskować, że zmieniająca orientację izometria płaszczyzny $\mathbb{E}^2$ jest **symetrią z poślizgiem**, tzn. w pewnej (euklidesowej) mapie odpowiada jej przekształcenie $(x_1, x_2) \mapsto (-x_1, x_2 + c)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$. Podobnie, **ruch** (czyli zachowująca orientację izometria) 3-wymiarowej przestrzeni $\mathbb{E}^3$ jest **ruchem śrubowym**, tzn. w pewnej mapie odpowiada mu przekształcenie, będące złożeniem obrotu wokół osi $\mathbb{R}\mathbf{e}_3$ z przesunięciem wzdłuż tej osi. (Jest to **twierdzenie Chaslesa**.) Opisać też ruchy płaszczyzny $\mathbb{E}^2$.

Dwudziesta siódma porcja zadań.

Jak powiedziałem na ćwiczeniach, zajęcia w piątek 1 VI nie odbędą się. Mimo tego daję daję poniższe zadania, by się Państwo nie nudzili; w sobotę je uzupełnię porcją na wtorek.

Proszę przeczytać na str. 45 o równoległości, a na 47 o twierdzeniu Talesa i jego wysłowieniu przy pomocy „ilorazu odległości wzdłuż prostej” (co jest nazwą umowną, bo odległość w rozważnej przestrzeni nie musi być zdefiniowana; chodzi tu o omawiany na str. 47 iloraz $(a' - b')/(a - b)$). Może to być pomoce w poniższych zadaniach.

1. Dowieść, że gdy każda prosta leżąca w podprzestrzeni $\mathbb{A}_0$ jest równoległa do podprzestrzeni $\mathbb{A}_1$, to podprzestrzeń $\mathbb{A}_0$ jest równoległa do $\mathbb{A}_1$.

2. Niech $a_i \in \mathbb{A}$ i $b_i \in a_i a_{i+1}$ dla $i \in \mathbb{Z}_3$, przy czym punkty a_0, a_1, a_2 nie leżą na jednej prostej. Przyjmijmy $\lambda_i := (b_i - a_i)/(b_i - a_{i+1})$. Udowodnić, że:

a) Jeśli punkty b_0, b_1, b_2 są współliniowe, to $\lambda_0\lambda_1\lambda_2 = 1$. (**Twierdzenie Menelaosa**).

b) Jeśli proste a_0b_1, a_1b_2 i a_2b_0 przecinają się w jednym punkcie lub są parami równoległe, to $\lambda_0\lambda_1\lambda_2 = -1$. (**Twierdzenie Cevy**).

c) Twierdzenia odwrotne są też prawdziwe.

3. Nazwijmy przekształcenie $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ **dylatacją**, jeśli jest afiniczne i $dF = \lambda I_{V_{\mathbb{A}}}$ dla pewnego skalara $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

a) Dowieść, że przekształcenie $F \in A(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ jest dylatacją wtedy i tylko wtedy, gdy jest bijektywne i dla każdej prostej $L \subset \mathbb{A}$, proste L i $F(L)$ są równoległe.

b) Dowieść, że dylatacje tworzą grupę przekształceń i każda dylatacja jest przesunięciem lub jednokładnością.

Dwudziesta szósta porcja zadań.

Uwaga. Przed oddaniem zadań pisemnych do sprawdzenia przejrzałem je i zauważyłem, że sporo osób nie oddało ich, a jest też niemało błędów. Ponieważ jest to chyba ostatnia możliwość sprawdzenia się przed egzaminem, więc przedłużam termin oddania tych zadań do najbliższego piątku; kto już oddał, a chce coś poprawić lub uzupełnić, może podmienić swą pracę. Do piątkowej porcji zadań dodaję też zadania P 21 i P 22 jednego z egzaminów (poniżej).

Zasadnicze usterki popełniane w zadaniach P18-P20: a) bycie powierzchnią obrotową jest własnością euklidesową, nie afiniczną; sprawdzając ją musimy używać ortonormalnych (inaczej: euklidesowych) układów odniesienia czy podstawień euklidesowych; b) pdobnie jest w zadaniu P19.

1. a) Udowodnić, że gdy $\mathbb{E}_0$ jest podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}$, to wzór $u(\mathbf{x}) = (\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbb{E}_0))^2$ zadaje funkcję kwadratową $u : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$.

b) W przestrzeń $\mathbb{R}^3$ dane są proste $K = -\mathbf{e}_3 + \mathbb{R}\mathbf{e}_1$ i $L = \mathbf{e}_3 + \mathbb{R}\mathbf{e}_2$. Niech X będzie zbiorem tych punktów z $\mathbb{R}^3$, które są równoodległe od K i L, tzn. $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \operatorname{dist}(\mathbf{x}, K) = \operatorname{dist}(\mathbf{x}, L)\}$. Dowieść, że X jest kwadryką, nazwać ją i znaleźć afiniczny układ odniesienia, w którym jest ona zadana równaniem afinicznie kanonicznym.

2. Adaptując rozumowania z ostatnich wykładów dowieść, że:

a) Każda kwadryka w k–wymiarowej zespolonej przestrzeni afinicznej jest w pewnej mapie zadana równaniem jednej z dwóch postaci: $\sum_{i=1}^r x_i^2 = c$, gdzie $c \in \{0,1\}$ i $1 \le r \le k$, lub $\sum_{i=1}^r x_i^2 = x_k$, gdzie $1 \le r \le k-1$.

b) Jeśli kwadryka $X \subset \mathbb{C}^k$ jest podprzestrzenią afiniczną, to w pewnej mapie jest zadana równaniem $x_1^2 = 0$.

c) Równanie w a) jest przez kwadrykę wyznaczone jednoznacznie.

P 21. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$, rozpatrywanej ze standardową strukturą, dana jest prosta $L = (1,0,0) + \mathbb{R}(1,1,1)$. W każdym z poniższych przypadków znaleźć równanie (liniowe, wyrażone we współrzędnych kartezjańskich przestrzeni $\mathbb{R}^3$) płaszczyzny P takiej, że

a) $P \supset L$ i $(3,1,0) \in P$;

b) $P \supset L$ i P zawiera prostą, równoległą do prostej, opisanej układem równań $x_2 - x_3 = 0 = x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2$.

c) P jest równoodległa od punktów $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$. Czy $P \supset L$?

P 22. Tym razem w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ dana jest płaszczyzna P, zadana równaniem $x_2 - x_3 = 2$. W każdym z poniższych przypadków znaleźć wzór (we współrzednych kartezjańskich przestrzeni $\mathbb{R}^3$) na przekształcenie afiniczne $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że:

a) $F(P) = \{(1,2,0)\}$ i $F(1,3,-1) = (1,0,2)$;

b) F jest rzutem prostopadłym na prostą $(1,1,1) + \mathbb{R}(0,1,-1)$.

c) F jest izometrią zmieniającą orientację, będącą identycznością na P.

Dwudziesta piąta porcja zadań. Zacznę od poprawki do mego rozwiązania zadania 23.1. Sprawdzaliśmy, dla jakich t równanie $y(at^2 + bt + c) = at - d$ nie ma rowiązań $y \neq 0$ i wyszło nam, że takich t może być nie więcej, niż 3. To było poprawne, ale nie gdy $a = d = 0$ – bo wtedy rozumowanie zawodzi. Jednak w tym pominiętym przypadku cała prosta $y = 0$ jest zawarta w X.

1. Po dwóch prostych skośnych w $\mathbb{R}^3$ poruszają się ruchem jednostajnym pojazdy, i w każdej chwili $t \in \mathbb{R}$ łączy je naprężona (lecz rozciągliwa) nić. Dowieść, że nić zakreśli fragment paraboloidy hiperbolicznej.

2. Czy paraboloida eliptyczna ma płaskie przekroje hiperboliczne? A paraboloida hiperboliczna i walec paraboliczny, czy mają eliptyczne?

3. Wydaje mi się, że nie omawialiśmy następującego „lematu Eulera”, dotyczącego przestrzeni euklidesowych (liniowych). Jeśli tak jest, to najwyzsza pora się z nim zmierzyć. Oto ten lemat:

Niech zarówno $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, jak i $(\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}')$ będą ortonormalnymi bazami przestrzeni E^3. Jeśli bazy te są zgodnie zorientowane, to istnieją obroty $L_{\mathbf{w}1}, L_{\mathbf{w}2}$ wokół prostej $\mathbb{R}\mathbf{w}$ i obrót $L_{\mathbf{u}}$ wokół prostej $\mathbb{R}\mathbf{u}$, takie, że złożenie $L_{\mathbf{w}2} L_{\mathbf{u}} L_{\mathbf{w}1}$ przeprowadza $\mathbf{u}'$ na $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}'$ na $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}'$ na $\mathbf{w}$.

Przypominam, że zadania 21.2, 17.2, 14.4, 11.4, 8.4, 6.5, 1.3 wciąż „wiszą”. Zadania pisemne są w serii 24.

Dwudziesta czwarta porcja zadań.

1. a) Dowieść, że przecięcie dwóch hiperpowierzchni w X, Y w $\mathbb{R}^k$ jest hiperpowierzchnią stopnia $\le 2\max(\deg(X), \deg(Y))$.

b) Czy można wyżej zastąpić prawą stronę przez $\max(\deg(X), \deg(Y))$?

c) Czy przecięcie hiperpowierzchni w $\mathbb{C}^k$ musi być hiperpowierzchnią?

2. Dla kwadryki z zadania 3e) na str. 86 w [TK, II] wskazać układ odniesienia, w której jest ona zadana równaniem afiniczno–kanonicznym, wskazac to równanie oraz określić typ afiniczny kwadryki.

3. a) Dowieść, że każdych $k(k+3)/2$ punktów k–wymiarowej przestrzeni afinicznej leży na pewnej kwadryce.

b)** Dowieść, że gdy $k = 2$, to kwadryka ta jest jedyna lub 4 z pięciu punktów leży na prostej. (To proszę na razie odłożyć na później.)

Poniższe zadania są pisemne; należy je oddać w piątek 25 V na początku ćwiczeń i numerować jak niżej. Proszę jednak zapoznać się z nimi wcześniej – jeśli trzeba, wątpliwości dotyczące sposobu rozwiązania omówimy we wtorek.

P19. (3p.) Znaleźć środki i określić typ afiniczny kwadryki, zadanej w $\mathbb{R}^3$ równaniem $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_2x_3 - 4x_1x_3 - 8x_1 + 10x_2 = 0$.

P19. (5p.) Znaleźć równanie euklidesowo–kanoniczne kwadryki, zadanej w $\mathbb{R}^3$ równaniem $2x_1^2 - 7x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 16x_1x_3 + 20x_2x_3 + 60x_1 - 12x_2 + 12x_3 - 90$, określić jej typ afiniczny i wskazać ortonormalny układ odniesienia, w którym zadana jest ona równaniem euklidesowo–kanonicznym.

P20. (3p.) Dowieść, że w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ równanie

$$2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1 = 0$$

zadaje powierzchnię obrotową; znaleźć oś obrotu i ortonormalny układ odniesienia, w którym powierzchnia ta jest zadana równaniem euklidesowo–kanonicznym.

Dwudziesta trzecia porcja zadań.

1. Udowodnić, że gdy X jest niepustą kwadryką na płaszczyźnie afinicznej nad ciałem $\mathbb{F}$ i $\#X > 1$, to $\#X \geq \#\mathbb{F} - 1$. Rozumować następujaco: przez wybór odpowiedniej mapy przejść do przypadku, gdy $A = \mathbb{F}^2$ i $(0,0),(1,0) \in X$ i dowieść, że wtedy

i) $X = \{(x,y) \in \mathbb{F}^2 : ax^2 + bxy + cy^2 - ax + dy = 0\}$, dla pewnych $a,b,c,d \in \mathbb{F}$;

ii) jeśli dla ≥ 4 wartości $t \in \mathbb{F}$ prosta $x = ty$ przecina X tylko w $(0,0)$, to $\mathbb{F} \times \{0\} \subset X$.

2. Dowieść, że gdy $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5\}$, to kwadryka $x_1^2+x_2^2 = 1$ w $\mathbb{F}^2$ liczy tylko 4 punkty, a na płaszczyźnie $\mathbb{F}^2$ istnieją wzajemnie nieproporcjonalne funkcje kwadratowe, takie, że zbiór zer jednej z nich jest zawarty w zbiorze zer drugiej.

3. Niech $\mathbb{A}$ będzie k–wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem $\mathbb{F}$, liczącym $n < \infty$ elementów.

a) Jakiej mocy jest każda prosta w $\mathbb{A}$? Jakiej mocy jest przestrzeń $\mathbb{A}$?

b) Ile prostych przechodzi przez dany punkt ?

c) Ile jest prostych w $\mathbb{A}$?

d)* Ile jest płaszczyzn w $\mathbb{A}$?

Pozostały też zadania zaległe, w tym wszystkie z serii 22.

Dwudziesta druga porcja zadań.

1. a) Niech $V = U \oplus W$, a forma kwadratowa $f : V \to \mathbb{R}$ będzie dodatnio określona na U i ujemnie półokreślona na W. Udowodnić, że $\sigma_+(f) = \dim(U)$.

b) Wyznaczyć rząd i sygnaturę formy $f : \mathcal{M}_k(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, danej wzorem $f(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^2)$.

2. (z §VII.3.2.) Niech macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ będą symetryczne, przy czym $\mathbf{A}$ dodatnio określona.

a) Dowieść, że $\det(\mathbf{A} + i\mathbf{B}) \neq 0$, oraz

b) Gdy $\mathbf{B}$ jest dodatnio półokreślona, to $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \geq \det(\mathbf{A})$ i nierówność jest ostra dla $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$.

3. Niech g będzie symetryczną formą dwuliniową na rzeczywistej przestrzeni wektorowej V. Dowieść, że gdy V jest g–ortogonalną sumą prostą podprzestrzeni V_1 i V_2, to $\sigma(g) = \sigma(g_1) + \sigma(g_2)$, gdzie σ oznacza sygnaturę oraz $g_i := g|_{V_i \times V_i}$ dla $i = 1, 2$.

4. Niech V i g będą jak w poprzednim zadaniu. Dowieść, że:

a) Istnieją podprzestrzenie V_+, V_- i V_{nul} takie, że $V = V_{nul} \bigoplus V_+ \bigoplus V_-$ i forma g jest na V_+ określona dodatnio, na V_- ujemnie, a na V_{nul} jest zerowa.

b) Gdy V_+, V_- i V_{nul} są takimi podprzestrzeniami, to $\sigma(g) = (\dim(V_+), \dim(V_-))$.

Uwaga 1. Zadanie to daje jeszcze jedną (ważną) wersję twierdzenia o bezwładności.

Poniższe zadania są pisemne; należy je oddać we wtorek 15 V na początku ćwiczeń i numerować jak niżej.

P**15.** a) Czy przestrzenie $(\mathbb{R}^4, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)$ i $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \det)$ są izometryczne?

b) Jeśli przestrzenie te są izometryczne, wskazać izometrię jednej z nich na drugą; jeśli nie są, zrobić to przy $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ zastąpionym przez $\sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} x_i^2$, dla odpowiednich liczb s, t.

P**16.** Niech $p \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ będzie wielomianem, użytym w zadaniu 4c) na str. 81 w skrypcie TK (część II). Znaleźć podstawienie afiniczne, przeprowadzające p w wielomian postaci $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i x_i^2 + \varepsilon x_4 + c$, gdzie $\lambda_4 \varepsilon = 0 = c\varepsilon$ oraz $\lambda_i \in \{0, 1, -1\}$ dla $i = 1, ..., 4$. Wyznaczyć też $\mathrm{rk}(p)$ i $\sigma(p)$.

P**17.** a) Udowodnić, że gdy $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$ jest przestrzenią euklidesowo–afiniczną, to $\mathcal{E}$ jest zbiorem wszystkich izometrii z $\mathbb{E}$ do $\mathbb{R}^k$, gdzie $k = \dim \mathbb{E}$.

b) Odwrotnie, niech X będzie dowolną przestrzenią izometryczną z $\mathbb{R}^k$, i niech $\mathcal{E}$ oznacza zbiór wszystkich izometrii z X na $\mathbb{R}^k$. Udowodnić, że $(X, \mathcal{E})$ jest przestrzenią euklidesowo–afiniczną. (Wyjaśnienie: założenie oznacza, że przestrzeń X wyposażona jest w funkcję $d : X \times X \to \mathbb{R}$ i dla pewnej bijekcji $F : X \to \mathbb{R}^k$ zachodzi $d(x_1, x_2) = \|f(x_1) - f(x_2)\|$ $\forall x_1, x_2 \in X$; bijekcje takie nazywamy izometriami.)

Dwudziesta pierwsza porcja zadań.

1. Rozważmy następujące własności niezerowej formy kwadratowej $q \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_k]$:

a) q jest kwadratem wielomianu stopnia 1;

b) q jest iloczynem dwóch takich wielomianów (niekoniecznie różnych).

Dowieść, że dla $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ własność a) jest równoważna temu, by $\mathrm{rk}(q) = 1$, a b) temu, by $\mathrm{rk}(q) \in \{1, 2\}$; zaś dla $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ własność a) jest równoważna temu, by $\sigma(q) = (1, 0)$, a b) temu, by $\sigma(q) \in \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$. (Wskaz"owka: użyć odpowiednich podstawień liniowych.)

2. Niech $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową, a $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ ciągiem wszystkich wartości własnych (z powtórzeniami) jej macierzy w ortonormalnej bazie przestrzeni $\mathbb{R}^k$. Dowieść, że:

a) Dla $\lambda \in \mathbb{R}$, liczba $\#\{i : \lambda_i \geq \lambda\}$ jest równa maksimum wymiarów podprzestrzeni W takich, że $f_{|W \cap S} \geq \lambda$, gdzie $S := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k : ||\mathbf{v}|| = 1\}$ oznacza sferę jednostkową.

b) Jeśli $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_k$, to ma miejsce następująca **równość Couranta–Fischera**:

$$\lambda_i = \inf\{c_W : W \subset \mathbb{R}^k \text{ jest podprzestrzenią wymiaru } i\}, \text{ gdzie } c_W := \sup f(W \cap S).$$

(Oczywiście, w razie trudności warto zbadać wpierw przypadek formy o macierzy diagonalnej, a potem starać się to uogólnić – być może korzystając z odpowiednich twierdzeń. Inna możliwość, to zauważenie, że część a) dla $\lambda = 0$ jest znana, a dla innych λ można rozważyć formę $f - \lambda\| \ \|^2$.)

3. : zadanie 1 w §VII.4.2 (tzn. na str. 28 wywieszonego pliku VII-kw.pdf).

Przypominam o zadaniach zaległych: 17.2, 17.4, 18.2, 18.4 (nie dokończyliśmy go), 20.4, 20.5 oraz wcześniejszych, wymienionych w serii 17.

Dwudziesta porcja zadań.

1. W tym zadaniu przenosimy na przestrzenie z wyróżnionymi formami dwuliniowymi konstrukcję i własności sprzężenia hermitowskiego. Niech na przestrzeniach V i W wyróżnione będą funkcje dwuliniowe g i g', odp., i niech $K \in \mathcal{L}(V, W), L \in \mathcal{L}(W, V)$.

a) Obierzmy bazy $\mathcal{V}$ przestrzeni V i $\mathcal{W}$ przestrzeni W, i niech $\mathbf{K} := [K]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$, $\mathbf{L} := [L]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}$ oraz niech $\mathbf{G}$ będzie macierzą formy g w bazie $\mathcal{V}$, a $\mathbf{G}'$ – macierzą formy g' w bazie $\mathcal{W}$. Dowieść, że tożsamość

$$g(\mathbf{v}, L(\mathbf{w})) = g'(K(\mathbf{v}), \mathbf{w}) \text{ dla wszystkich } \mathbf{v} \in V,\ \mathbf{w} \in W$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{K}^t\mathbf{G}' = \mathbf{G}\mathbf{L}$.

b) Dowieść, że gdy funkcja g jest nieosobliwa, to istnieje jedyne przekształcenie $K^h \in \mathcal{L}(W, V)$ takie, że

$$g(\mathbf{v}, K^h(\mathbf{w})) = g'(K(\mathbf{v}), \mathbf{w}) \text{ dla wszystkich } \mathbf{v} \in V,\ \mathbf{w} \in W. \tag{1}$$

Mówimy, że K^h jest **sprzężeniem** przekształcenia K, działającego pomiędzy przestrzeniami z funkcjami dwuliniowymi.

c) Dowieść, że gdy ponadto $V = W$ i $g = g'$, to $\det(K^h) = \det(K)$.

2. W zadaniach 2 i 3 rozpatrujemy płaszczyznę Minkowskiego: $\mathbb{R}^2$ z formą kwadratową $f = x^2 - t^2$.

a) Dowieść, że operator $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ wtedy i tylko wtedy jest izometrią (względem formy f), gdy jego macierz w bazie standardowej jest postaci $\begin{pmatrix} a & \varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix}$ dla $\varepsilon = \pm 1$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$ takich, że $a^2 - b^2 = 1$. (x traktujemy jako pierwszą, a t jako drugą zmienną.) Ponadto, $\varepsilon = 1$ gdy L zachowuje orientację i $\varepsilon = -1$ w przeciwnym razie.

b) Naszkicować zbiory postaci $\{\mathbf{v} : f(\mathbf{v}) = c\}$, dla $c = 0, \pm 1, \pm 2$, będące odpowiednikami pewnych sfer o środku w $\mathbf{0}$ w geometrii euklidesowej (dlaczego?). Dowieść, że są one niezmiennicze względem każdej izometrii liniowej płaszczyzny Minkowskiego na nią samą i naszkicować analogiczne zbiory dla przestrzeni $\mathbb{R}^3$ z formą $x^2 + y^2 - t^2$.

c) Rozpatrzmy w płaszczyźnie Minkowskiego bazę $\mathcal{W}$ utworzoną przez wektory izotropowe $\mathbf{w}_1 = (1, 1)$ i $\mathbf{w}_2 = (1, -1)$; współrzędne w niej wektora $\mathbf{v}$ oznaczmy przez (y, z). Dowieść, że $f(\mathbf{v}) = 4yz$ i każda zachowująca orientację izometria płaszczyzny $(\mathbb{R}^2, f)$ jest zadana w bazie $\mathcal{W}$ macierzą postaci $\pm\mathrm{diag}(e^{\alpha}, e^{-\alpha})$, dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) Operator L_α, którego macierz w bazie $\mathcal{W}$ jest równa $\mathrm{diag}(e^{\alpha}, e^{-\alpha})$, nazwiemy **obrotem hiperbolicznym płaszczyzny Minkowskiego** o α jednostek. Uzasadnić, że $L_{\alpha+\beta} = L_\alpha L_\beta$ dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. (Kontynuacja poprzedniego.) Znaleźć macierz $\mathbf{A}_\alpha$ operatora L_α w standardowej bazie. (Sposób sprawdzenia: jej wyrazy okazują się równe **cosinusowi hiperbolicznemu** $\cosh(\alpha) := (e^{\alpha} + e^{-\alpha})/2$ lub **sinusowi hiperbolicznemu** $\sinh(\alpha) := (e^{\alpha} - e^{-\alpha})/2$.) Wyznaczyć wzory na $\cosh(\alpha + \beta)$ i $\sinh(\alpha + \beta)$, odpowiadające tożsamości $L_{\alpha+\beta} = L_\alpha L_\beta$.

Dla funkcji dwuliniowej $g : V \times V \to \mathbb{F}$ i wektora $\mathbf{v} \in V$ zdefiniujmy funkcjonał $J_g(\mathbf{v}) \in V^*$ wzorem

$$(J_g(\mathbf{v}))(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \text{ dla } \mathbf{x} \in V$$

4. a) Dowieść, że gdy funkcja g jest nieosobliwa, to $J_g : V \to V^*$ jest izomorfizmem liniowym.

b) Odwrotnie, każdemu izomorfizmowi $J : V \to V^*$ odpowiada nieosobliwa funkcja dwuliniowa $g : V \times V \to \mathbb{F}$, dla której $J_g = J$.

c) Dla izomorfizmu $J : V \to V^*$, przeprowadzającego daną bazę $\mathcal{B}$ przestrzeni V na bazę dualną do niej, jaka jest macierz powyższej funkcji g w bazie $\mathcal{B}$?

d)* Gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, czy dla każdego izomorfizmu $J : V \to V^*$ istnieje baza $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_i)_{i=1}^k$ przestrzeni V taka, że $(J(\mathbf{b}_i))_{i=1}^k$ jest bazą dualną do $\mathcal{B}$? A gdy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$?

5. * Zbadamy tu, jak zachowują się indeksy bezwładnosci przy przejściu do podprzestrzeni. Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni rzeczywistej V, a f – formą kwadratową na V. Dowieść, że:

a) $f_{|W} : W \to \mathbb{R}$ jest formą kwadratową, przy czym $\sigma_+(f_{|W}) \le \sigma_+(f)$ i $\sigma_-(f_{|W}) \le \sigma_-(f)$.

b) $\sigma_+(f) - \sigma_+(f_{|W}) \le \dim(V) - \dim(W)$, i tak samo dla σ_-.

Poniższe zadania są pisemne, z terminem oddania w najbliższy wtorek, na początku ćwiczeń. W razie wątpliwości co do sposobów rozwiązania, możemy je omówić w piątek.

P12. Znaleźć bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, która jest ortogonalna względem standardowego iloczynu skalarnego i diagonalizuje formę kwadratową $2x^2+5y^2+5z^2-4xy-4xz+8yz$. (Ułatwienie: 10 jest jedną z wartości własnych macierzy o wierszach $(2,-2,-2),(-2,5,4),(-2,4,5)$.)

P13. Niech $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2$ dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

a) Podać przykład 2-wymiarowej podprzestrzeni liniowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$, na której f jest dodatnio określona, i takiej, na której ma sygnaturę $(1,1)$.

b) Niech $Z_t = \mathrm{lin}((1,0,0),(0,1,t))$. Dla jakich t zachodzi $\mathbb{R}^3 = Z_t \oplus Z_t^{\perp}$, gdzie ortogonalność jest wyznaczona przez formę biegunową formy f?

P14. Zadanie 1 na str. 63/64 w skrypcie Tadeusza Koźniewskiego (cześć II).

Dziewiętnasta porcja zadań.

1. Zadanie na rozgrzewkę: Dla $i=1,2$, niech $\mathbf{A}_i$ będzie macierzą formy kwadratowej f_i w bazie $\mathcal{V}$, zaś $\mathbf{B}_i$ niech będzie macierzą tej formy w bazie $\mathcal{W}$. Dowieść, że jeśli macierze te są nieosobliwe, to $\mathrm{tr}(\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_2)$.

2. Niech V będzie dwuwymiarową rzeczywistą przestrzenią wektorową, niech $g : V \times V \to \mathbb{R}$ będzie symetryczną funkcją dwuliniową i niech wektory $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$ będą liniowo niezależne. Dowieść, że:

i) funkcja g jest dodatnio lub ujemnie określona $\Leftrightarrow$ $(g(\mathbf{u},\mathbf{w}))^2 < g(\mathbf{u},\mathbf{u})g(\mathbf{w},\mathbf{w})$;

ii) funkcja g jest osobliwa$\Leftrightarrow$ $(g(\mathbf{u},\mathbf{w}))^2 = g(\mathbf{u},\mathbf{u})g(\mathbf{w},\mathbf{w})$.

iii) funkcja g jest nieokreślona i nieosobliwa $\Leftrightarrow$ $(g(\mathbf{u},\mathbf{w}))^2 > g(\mathbf{u},\mathbf{u})g(\mathbf{w},\mathbf{w})$.

Wywnioskować, że znak liczby $(g(\mathbf{u},\mathbf{w}))^2 - g(\mathbf{u},\mathbf{u})g(\mathbf{w},\mathbf{w})$ (dodatni, zerowy lub ujemny) nie zależy od wyboru liniowo niezależnych wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$.

3. Nech (V,g) będzie przestrzenią z wyróżnioną formą metryczną g. (Tak więc $g : V \times V \to \mathbb{F}$ jest funkcją dwuliniową, która jest symetryczna lub jest antysymetryczna.) Dowieść, że $\dim(V^{\perp}) = \dim(V) - \mathrm{rk}(g)$. (Przypadek, gdy $\mathrm{rk}(g) = \dim V$, był omówiony na wykładzie; stwierdza on, że forma g jest nieosobliwa, gdy $\mathbf{0}$ jest jedynym wektorem g–ortogonalnym do każdego innego. Jak w tym szczególnym przypadku, można się posłużyć macierzą formy w bazie.)

4. (To zadanie dotyczy semestru I, lecz będzie potrzebne w tym.) Niech V i V' będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{F}$ takim, że $2_{\mathbb{F}} \neq 0_{\mathbb{F}}$ (lub, ogólniej, różnym od $\{0_{\mathbb{F}}, 1_{\mathbb{F}}\}$). Udowodnić, że:

a) Zbiór $X \subset V$ jest podprzestrzenią liniową wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{0} \in X$ i $\lambda\mathbf{v} + (1-\lambda)\mathbf{w} \in X\ \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X,\ \lambda \in \mathbb{F}$.

b) przekształcenie $L : V \to V'$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ i $L(\lambda\mathbf{v}+(1-\lambda)\mathbf{w}) = \lambda L(\mathbf{v}) + (1-\lambda)L(\mathbf{w})\ \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V,\ \lambda \in \mathbb{F}$.

Osiemnasta porcja zadań.

Uwaga: a) Pod wpływem ostatniej dyskusji chciałem podkreślić, że rozwiązywanie zadań służyć ma nie tylko nabyciu praktycznych umiejętności rachunkowych, ale – przede wszystkim –„przetrawieniu" materiału objętego programem. Sporo zadań pomyślanych jest tak, by ich rozwiązanie wymagało zaadaptowanie pomysłu, na którym oparty był któryś z dowodów omawianych na wykładzie twierdzeń. Adaptowanie zaś nietrywialnych pomysłów nie tylko ułatwia ich przyswojenie, ale jest już bliskie temu, do czego studenci nasi powinni starać się przygotować: by w swej przyszłej działaności zawodowej, jakakolwiek będzie, umieć wyjść z pomysłami własnymi.

b) By ten cel poszczególnych zadań uczynić czytelniejszym, będę się starał jawnie wskazywać, z jakim fragmentem wykładu są one związane. Zacznę od niektórych zadań zaległych (patrz porcja

15, lecz od tego czasu rozwiązano 12.5, 11.4, 5.6 i część 14.2, a doszły 17.4 i części 16.3 i 14.2).

Pozostała część 14.2: własności sprzężenia, związek między operatorami i ich macierzami.

14.4: własności macierzy Jordana, wzory umożliwiające znalezienie postaci Jordana (to ostatnie też w 14.3).

8.4: geometria przestrzeni E^3 (ogólniej: E^n), twierdzenie 1 w §V.5.1.

6.5: to zadanie dotyczy wzoru z wniosku 1 w §V.4.2, lecz wymaga wprawy w liczeniu wyznaczników, czy też przeczytania o tzw. wyznaczniku Cauchy'ego – a w trudne wyznaczniki nie warto już brnąć przy przygotowaniu do kolokwium.

1.3: patrz wskazówka w porcji 17.

1. Niech $f(\mathbf{v}) = v_1^2 + ... + v_s^2 - v_{s+1}^2 - ... - v_{s+t}^2$ dla $\mathbf{v} = (v_i)_{i=1}^k \in \mathbb{R}^k$. (Tu, $s + t \leq k$.)

a) Dowieść, że maksimum wymiarów podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^k$, zawartych w $f^{-1}(0)$, jest równe $k - \max(s, t)$. (Wskaz"owka: dowód lematu, z którego otrzymano twierdzenie o bezwładnosci.)

b) Wyznaczyć analogiczne maksimum przy $f^{-1}(0)$ zastąpionym przez $f^{-1}([0, \infty))$.

2. Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą symetryczną nad $\mathbb{F}$ i niech r oznacza jej rząd, zaś a_i jej i-ty minor początkowy. Dowieść, że jeśli $a_i \neq 0$ dla $i = 1, ..., r$, to $\mathbf{A} = \mathbf{C}^t\mathbf{D}\mathbf{C}$, gdzie $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(a_1, a_2/a_1, ..., a_r/a_{r-1}, 0, ..., 0)$, a $\mathbf{C}$ macierzą górnie trójkątną, z jedynkami na przekątnej.

(Wskaz"owka: dowód kryterium Sylvestera dodatniej określoności macierzy. Przypomnę, że dowód ten oparty był na wykorzystaniu algorytmu diagonalizacji macierzy, będącego „usymetrycznioną” wersją algorytmu Gaussa z pierwszego semetsru. Tak więc to zadanie, podobnie jak zadanie 4 serii 17, ma też na celu przemyślenie tego algorytmu.)

3. Dowieść, że gdy funkcja $g : V \times V \to \mathbb{F}$ jest dwuliniowa, to dla każdych liniowo zależnych wektorów $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k \in V$ macierz $(g(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j))_{1 \leq i,j \leq k}$ jest osobliwa.

4. Niech w przestrzeniach V i V' wyróżnione będą formy metryczne g i g', odpowiednio. Dla operatora $L \in \mathcal{L}(V, V')$ i baz $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ i $\mathcal{V}'$ w V i V', odpowiednio, dowieść równoważności warunków:

a) $g'(L(\mathbf{u}), L(\mathbf{w})) = g(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ dla wszystkich $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$

b) $g'(L(\mathbf{v}_i), L(\mathbf{v}_j)) = g(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ dla $i, j = 1, ..., k$;

c) $\mathbf{A} = \mathbf{C}^t\mathbf{B}\mathbf{C}$, gdzie $\mathbf{C} := [L]_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}}$, zaś $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ to macierze form g i g' w bazie $\mathcal{V}$ i $\mathcal{V}'$, odpowiednio.

Zadania 3 i 4 nie wymagają niczego, poza definicjami.

Siedemnasta porcja zadań.

Pozostały zadania zaległe, wymienione w serii 15 (od tego czasu rozwiązano 12.5 i 5.6); część z nich rozwiązał p. Chudziak, lecz namawiam wszystkich na namysł. Z ostatniej serii zostało zadanie 16.3 i dokończenie zadania 16.5

Wskazówki do niektórych z tych zadań:

16.3: w a) chcemy de facto obrać wielomian $p = \sum_i c_i x^i$ tak, by jego pochodne zerowały się w odpowiednich punktach, a on sam przyjmował w tych punktach odpowiednie wartości. Należy odczytać te warunki z tego, o czym mowa w §VI.4.2, i uzasadnić istnienie takiego p.

1.3: czegoś podobnego dowodzono na ćwiczeniach, gdy $r = l = k$. :-)

1. Dowieść, że każda 2×2 zespolona macierz unitarna jest postaci $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -\varepsilon\overline{b} \\ b & \varepsilon\overline{a} \end{pmatrix}$ dla pewnych $a, b, \varepsilon \in \mathbb{C}$ takich, że $|a|^2 + |b|^2 = 1$ oraz $|\varepsilon| = 1$. Ponadto, $\varepsilon = \det(\mathbf{A})$.

2. Udowodnić, że zadanie 14.1 pozostanie prawdziwe, gdy mowa o operatorach ortonormalnie diagonalizowalnych nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i ortonormalnych bazach diagonalizujących; o V zakładamy, że jest przestrzenią unitarną nad $\mathbb{F}$. (Wskaz"owka: można powtarzać rozwiązanie tamtego zadania, lub wykorzystać jego tezę.)

3. a) Niech macierz $\mathbf{A}$, o wierszach $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)$, będzie nieosobliwa. Wyliczyć wyznacznik macierzy formy $(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 + (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3)^2$. (Wskaz"owka: odpowiednie podstawienie.)

b) To samo bez założenia nieosobliwości.

4. (**twierdzenie Kroneckera**) Niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ będzie macierzą symetryczną, której klatka wyznaczona przez pierwszych r wierszy i kolumn jest nieosobliwa. Dowieść, że formę $q_{\mathbf{A}}$ można podstawieniem liniowym przeprowadzić w formę $\sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}y_iy_j + \sum_{i,j=r+1}^{k} b_{ij}y_iy_j$, dla pewnych współczynników b_{ij}. Ponadto, można uzyskać, by podstawienie nie zmieniało zmiennych $x_{r+1}, \ldots, x_k$. (Wskaz"owka: algorytm diagonalizacji przez kongruencję.)

b) Dowieść, że gdy $r = \mathrm{rk}(\mathbf{A})$, to wszystkie współczynniki b_{ij} są równe 0.

Poniższe zadanie jest pisemne, na najbliższy piątek (wraz z P 10 i P 9):

P **11.** Niech $g : V \times V \to \mathbb{F}$ będzie funkcją dwuliniową i niech $f(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ dla $\mathbf{v} \in V$. Udowodnić następującą **tożsamość Cauchy'ego**: $f(\mathbf{u})\big(f(\mathbf{u})f(\mathbf{w}) - g(\mathbf{u}, \mathbf{w})g(\mathbf{w}, \mathbf{u})\big) = f\big(f(\mathbf{u})\mathbf{w} - g(\mathbf{u}, \mathbf{w})\mathbf{u}\big)$ dla $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$.

Szesnasta porcja zadań. Proszę pamiętać o zadaniach zaległych. Ponieważ staramy się „dopiąć" materiał objęty kolokwium (od następnych ćwiczeń będziemy coraz bardziej zajmować się materiałem dalszym), więc jest to też dobry moment, by omówić na ćwiczeniach to, co budzi w nim wątpliwości–proszę przygotować ewentualne pytania czy wybrane zadania, warte omówienia!

1. a) Dowieść, że gdy macierz zespolona $\mathbf{D} \in \mathcal{M}_k$ jest diagonalna i ma nieujemne wyrazy na przekątnej, to $\|\mathbf{D} - \mathbf{U}\| \geq \|\mathbf{D} - \mathbf{I}_k\|$ dla unitarnych macierzy $\mathbf{U} \in \mathcal{M}_k$. Gdy ponadto $\det(\mathbf{D}) \neq 0$, to nierówność jest ostra dla unitarnych macierzy $\mathbf{U} \neq \mathbf{I}_k$. (Normę macierzy określamy jak w serii 5.)

b) Niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ i $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Dowieść, że gdy $\mathbf{A} = \mathbf{UH}$ jest rozkładem biegunowym, to $\|\mathbf{A} - \mathbf{W}\| > \|\mathbf{A} - \mathbf{U}\|$ dla każdej unitarnej macierzy $\mathbf{W} \neq \mathbf{U}$. (Wskaz"owka: a) i zad. 6 z serii 5.)

2. a) Wykorzystując rozkład biegunowy dowieść następującego **twierdzenia Krasnosielskiego**: operator liniowy $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k)$ wtedy i tylko wtedy jest unitarny, gdy dla pewnego $n < k$ zachowuje n–wymiarową miarę w $\mathbb{R}^k$ (tzn. $\mu_n(R) = \mu_n(L(R))$ dla każdego równoległościanu rozpiętego na n wektorach).

b) Czy każdy operator $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k)$ zachowujący k–wymiarową miarę jest unitarny?

3. a) Niech $\mathbf{J}$ będzie macierzą Jordana, a $\mathbf{B}$ – macierzą diagonalną z tą samą przekątną, co $\mathbf{J}$. Dowieść, że $\mathbf{B}$ jest *wielomianem macierzy* $\mathbf{J}$, tzn. $\mathbf{B} = \sum_{s=1}^{n} c_s\mathbf{J}^s$ dla pewnych skalarów $c_0, ..., c_n$. Zakładamy tu, że ciało skalarów jest liczbowe, tzn. jest podciałem ciała $\mathbb{C}$.

b) Udowodnić, że każda macierz zespolona jest sumą dwóch macierzy, będących jej wielomianami, z których jedna jest diagonalizowalna, a druga nilpotentna.

c)* Udowodnić, że opisany w b) **rozkład Jordana** jest jednoznaczny. (Wskaz"owka: gdy $\mathbf{D}+\mathbf{N} = \mathbf{D}' + \mathbf{N}'$ są takimi rozkładami, to macierz $\mathbf{D} - \mathbf{D}'$ jest diagonalizowalna, patrz zad. 2 serii 12.)

4. Dla macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ dowieść równoważności warunków: a) $\mathbf{A}$ jest macierzą nilpotentną, b) $\chi_{\mathbf{A}} = (-x)^k$, oraz c) $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$.

5. Dowieść, że gdy macierz symetryczna $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa, to macierz $\mathrm{diag}(\mathbf{A}, -\mathbf{A})$ jest kongruentna z macierzą $\mathrm{diag}(\mathbf{I}, -\mathbf{I})$.

Poniższe zadania są pisemne; należy je oddać nie później, niż w piątek 20 IV <u>na początku ćwiczeń</u> i numerować jak niżej. Jedno jeszcze zadanie dodam we wtorek.

9. (P) Znaleźć podstawienie liniowe, sprowadzające do postaci diagonalnej formę $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4$.

10. (P) Dla jakich wartości $\lambda \in \mathbb{R}$ forma $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ jest dodatnio określona?

Piętnasta porcja zadań polega w większości na wykorzystaniu przerwy poświatecznej na przemyślenie zadań zaległych: zadań 2,3,4 z serii 14, zad. 12.5, 11.4, sporej części 8.4, 6.5, 5.6, 1.3.

Dodaję tylko dwa nowe zadanie. Przypominam też, że w notatkach z wykładu zapisane są „Problemy", których rozwiązania zawsze można zgłaszać.

1. Ustalmy operator $L \in \mathcal{L}(V)$ i niezerowy wektor $\mathbf{v} \in V$.

a) Dowieść istnienia liczby $s \in \mathbb{N}$ i skalarów $c_0, ..., c_s$ takich, że $L^{s+1}(\mathbf{v}) = \sum_{i=0}^{s} c_i L^i(\mathbf{v})$.

b) Dowieść, że jeśli $c_0, ..., c_s$ jest najkrótszym z takich ciągów (tzn. liczba s jest najmniejsza z możliwych), to $\mathbf{v}, L(\mathbf{v}), ..., L^s(\mathbf{v})$ jest bazą L–niezmienniczej podprzestrzeni V_0, a wielomian charakterystyczny p indukowanego operatora $L_0 \in \mathcal{L}(V_0)$ jest równy $\pm(x^{s+1} - \sum_{i=0}^{s} c_i x^i)$ i spełnia warunek $p(L)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

c) Wywnioskować, że $\chi_L(L)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ i wobec tego $\chi_L(L) = 0$ (jest to **twierdzenie Cayley'a–Hamiltona**).

2. $L \in \mathcal{L}(V)$ jest operatorem, który nie jest proporcjonalny do I_V. W tym zadaniu zakładamy dla uproszczenia, że w ciele skalarów $\mathbb{F}$ jest $n_{\mathbb{F}} \neq 0_{\mathbb{F}}$ $\forall n$. Dowieść że:

a) Dla każdego skalara c istnieje rozkład $V = \mathbb{F}\mathbf{w} \oplus U$ taki, że $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ i $L(\mathbf{w}) - c\mathbf{w} \in U$.

b) Przekątna macierzy operatora L w pewnej bazie jest równa $(0, ..., 0, \mathrm{tr}(L))$. (Wskaz"owka: dowód tw. Schura, przy $\mathbf{w}$ i U obranych jak wyżej dla $c = \mathrm{tr}(L)$.)

Czternasta porcja zadań. (Zmieniłem zdanie i daję jednak zadania pisemne. Po rozmowie z niektórymi z Państwa wracam też do „starego" sposobu wyznaczania zadań ustnych.)

1. a) Dowieść, że gdy $\{L_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{L}(V)$ jest przemienną rodziną diagonalizowalnych operatorów, to istnieje baza przestrzeni V, diagonalizująca każdy z nich. (Wskaz"owka: wykorzystać indukcję względem $\dim(V)$ i zadania z serii 12.)

b) Wywnioskować, że gdy dwie przemienne macierze zespolone są diagonalizowalne i mają tylko nieujemne wartości własne, to ich iloczyn też jest taki.

2. a) Udowodnić, że każda macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ ma podprzestrzeń niezmienniczą wymiaru 1 lub 2. (Wskaz"owka: fragment dowodu twierdzenia 2 w §3.3.)

b) Udowodnić, że gdy macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ ($\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) ma podprzestrzeń niezmienniczą wymiaru n, to $\mathbf{A}^h$ ma podprzestrzeń niezmienniczą wymiaru $k - n$.

c) Udowodnić, że każdy operator na k–wymiarowej przestrzeni rzeczywistej ma podprzestrzeń niezmienniczą wymiaru 1 lub 2, a także wymiaru $k-1$ lub $k-2$; natomiast każdy operator na k–wymiarowej przestrzeni zespolonej ma podprzestrzeń niezmienniczą wymiaru $k-1$.

3. Niech $L \in L(V)$, gdzie χ_L rozkłada się na czynniki liniowe, i niech $L' := L_{|V'} \in \mathcal{L}(V')$ dla pewnej L–niezmienniczej podprzestrzeni $V' \subset V$. Dla $n \in \mathbb{N}$ i $\lambda \in \mathbb{F}$ dowieść, że:

a) liczba $\mathrm{rk}(L^{n-1}) - \mathrm{rk}(L^n)$ jest równa $\dim\big(\ker(L_{|L^{n-1}(V)})\big)$.

b) $p_n(\lambda) \geq p'_n(\lambda)$, gdzie $p_n(\lambda)$ (odp. $p'_n(\lambda)$) jest liczbą odpowiednich klatek dla operatora L (odp. L'), jak ją zdefiniowano w tw. 2 w §VI.4.1.

c) Czy zawsze $q_n(\lambda) \geq q'_n(\lambda)$?

4. Dla $t < k$ i $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_t) \in \mathbb{F}^t$ oznaczmy przez $\mathbf{A_z}$ macierz rozmiaru $k \times k$, taką, że jej ij–ty wyraz jest równy z_j jeśli $i - j = k - t$, zaś równy 0 w przeciwnym razie. (Tak więc $\mathbf{z}$ tworzy jedyną ukośną linię poniżej przekątnej, która ma t wyrazów.)

a) Wyznaczyć wzorem przekształcenie $\mathbb{F}^k \ni \mathbf{v} \mapsto \mathbf{A_z v} \in \mathbb{F}^k$, które oznaczę $L_{\mathbf{A_z}}$

b) Wyznaczyć wzorem złożenie $L_{\mathbf{A_y}} \circ L_{\mathbf{A_z}}$, gdzie $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_s)$ i $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_t)$.

c) Gdy $\mathbf{z}$ ma wszystkie współrzędne różne od 0, wyznaczyć postać Jordana macierzy $\mathbf{A_z}$.

5. Dla wielomianu $p \in \mathbb{F}[x]$ i macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$, której wielomian charakterystyczny rozkłada się nad $\mathbb{F}$ na czynniki liniowe, dowieść równoważności warunków:

a) $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$;

b) $(D^j p)(\lambda) = 0$ dla $\lambda \in \operatorname{spec}(\mathbf{A})$ i $0 \le j \le m_\lambda - 1$ (liczby m_λ zdefiniowano w zadaniu 3 serii 11);

c) wielomian p jest podzielny przez $q := \prod_{\lambda \in \operatorname{spec}(\mathbf{A})} (x - \lambda)^{m_\lambda}$

Uwaga 1. Powyższy wielomian q nazywamy **wielomianem minimalnym** macierzy $\mathbf{A}$; ma on najniższy stopień spośród wszystkich, które zerują się na $\mathbf{A}$. Latwo zauważyć, że jest on dzielnikiem wielomianu charakterystycznego $\chi_{\mathbf{A}}$.

Poniższe zadania są pisemne; należy je oddać do czwartku 5 IV. (Każde zadanie=3p.) Proszę je numerować jak niżej. O znajdywaniu macierzy $\mathbf{S}$ jak w zadaniu P8 będzie jeszcze mowa we wtorek.

6. (P) (Zadanie z jednego z egzaminów.) Niech operator $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie zadany wzorem $L(x_1, x_2, x_3, x_3) = (2x_1, x_1 + 2x_2, -x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4)$ i niech $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Czy operator L jest diagonalizowalny?

b) Znaleźć postać Jordana macierzy $\mathbf{B}$.

c) Czy istnieje taka baza $\mathcal{V}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$, że $[L]_{\mathcal{V}} = \mathbf{B}$?

7. (P) Niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ będzie macierzą, której wielomian charakterystyczny rozkłada się nad $\mathbb{F}$ na czynniki liniowe: $\chi_{\mathbf{A}} = (\lambda_1 - x)...(\lambda_k - x)$, gdzie $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{F}$.

a) Dowieść, że dla każdego wielomianu $p \in \mathbb{F}[x]$ mamy $\chi_{p(A)} = (p(\lambda_1) - x)...(p(\lambda_k) - x)$; w szczególności, $\operatorname{tr}(p(\mathbf{A})) = \sum_i p(\lambda_i)$ oraz $\det(p(\mathbf{A})) = \prod_i p(\lambda_i)$.

b) Uogólnić a) na przypadek dowolnej funkcji $\mathbf{A}$–dopuszczalnej (w miejsce p). Gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, czemu jest równy wyznacznik macierzy $\exp(\mathbf{A})$?

8. (P) Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą o wierszach $(1, 1, -1), (-3, -3, 3), (-2, -2, 2)$.
Wyznaczyć postać Jordana $\mathbf{J}$ tej macierzy oraz macierz nieosobliwą $\mathbf{S}$ taką, że $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \mathbf{J}$.

Trzynasta porcja zadań.

Szanowni Państwo, postanowiłem trochę zmienić dobór omawianych na ćwiczeniach zadań. Obecny system ma tę wadę, że ćwiczenia mogą być mniej ciekawe dla tych, co się do nich przygotowują – bo oni rowiązania referowanych zadań na ogół znają. Pomyślałem spróbować kilka ćwiczeń poprowadzić tak, by omawiać zadania wywieszone w skrypcie. Mogą je Państwo wcześniej przemyśleć i wybierać te, do których chcą się Państwo zgłaszać „na ochotnika" (będę puszczał listę), ale będziemy próbować rozwiązywać i takie, gdzie ochotników nie ma, zwłaszcza jeśli ktoś się zadaniem zainteresuje. Przez to, że wybór jest większy, opisana wada się zmniejszy.

Na najbliższe ćwiczenia proponuję zadania z §3.2, §3.4 i §4.1 (pomijam te, które były już omawiane). Proszę pamiętać tez o zadanaich zaległych i niedokończonych.

Dziś lub jutro dopiszę jeszcze zadania pisemne (na wtorek) i wywieszę jako zad13.pdf (obecny plik to zad12,5.pdf).

Dwunasta porcja zadań. Dla większego wyboru jest więcej zadań (a są jeszcze i zaległe!).

1. Niech $K, L \in \mathcal{L}(V)$. Dowieść, że:

a) Jeśli $V_0 \supset \mathrm{im}(L)$ lub $V_0 \subset \ker(L)$, to podprzestrzeń V_0 jest L-niezmiennicza.

b) Podprzestrzeń L–niezmiennicza jest i $p(L)$–niezmiennicza, dla $p \in \mathbb{F}[x]$.

c) Jeśli $KL = LK$ i podprzestrzeń V_0 jest L–niezmiennicza, to $K(V_0)$ i $K^{-1}(V_0)$ też są takie. W szczególności, L–niezmiennicze są $\ker(K)$, $\mathrm{im}(K)$, czy ogólniej podprzestrzenie $\ker(p(K))$ i $\mathrm{im}(p(K))$, dla $p \in \mathbb{F}[x]$, w tym podprzestrzenie własne operatora K.

2. Niech W będzie przestrzenią niezmienniczą diagonalizowalnego operatora $L \in \mathcal{L}(V)$.

a) Udowodnić, że gdy $V = \oplus_\lambda V_\lambda$ jest rozkładem na podprzestrzenie własne operatora L, to $W = \oplus_\lambda (W \cap V_\lambda)$. (Wskazówka: jedno z poprzednich zadań.)

b) Wywnioskować, że operator indukowany $L_{|W}$ jest diagonalizowalny i $V = W \oplus W'$ dla pewnej L–niezmienniczej podprzestrzeni $W' \subset V$.

c) Wywnioskować też, że jeśli L ma $k = \dim(V)$ różnych wartości własnych, to ma dokładnie 2^k podprzestrzeni niezmienniczych.

Wskazówka do zadań 3 i 4: twierdzenia o operatorach normalnych na przestrzeni euklidesowej.

3. a) Udowodnić, że rząd antysymetrycznej macierzy rzeczywistej jest liczbą parzystą.

b) Jeśli powyżej rząd jest równy $2m$, to macierz jest sumą m macierzy antysymetrycznych rzędu 2.

c) Wyznacznik takiej macierzy jest nieujemny.

4. Dowieść, że izometria $L \in \mathcal{L}(E)$ zachowuje orientację wtedy i tylko wtedy, gdy wymiar podprzestrzeni $Fix(L) := \{\mathbf{v} \in E : L(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\}$ o liczbę parzystą różni się od wymiaru przestrzeni euklidesowej E.

5. a) Wykorzystując rozkład biegunowy dowieść następującego **twierdzenia Krasnosielskiego**: operator liniowy $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k)$ wtedy i tylko wtedy jest unitarny, gdy dla pewnego $n < k$ zachowuje n–wymiarową miarę w $\mathbb{R}^k$ (tzn. $\mu_n(R) = \mu_n(L(R))$ dla każdego równoległościanu rozpiętego na n wektorach).

b) Czy każdy operator $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k)$ zachowujący k–wymiarową miarę jest unitarny?

6. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$; wektory $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^k$ traktujemy jako kolumny.

a) Dowieść, że jeśli $\mathbf{Au} \perp \mathbf{u}$ dla każdego $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^k$, to $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. (Wskaz"owka: twierdzenie Schura.)

b) Dowieść, że jeśli $\langle \mathbf{Au}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{Bu} \rangle$ dla każdego wektora $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^k$, to $\mathbf{B} = \mathbf{A}^h$.

c) Dowieść, że gdy $\mathbf{u}^h \mathbf{Au} \in \mathbb{R}$ dla każdego wektora $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^k$, to $\mathbf{A}^h = \mathbf{A}$.

d) Czy tezy te pozostaną prawdziwe, gdy $\mathbb{C}^k$ zamienić na $\mathbb{R}^k$?

Jedenasta porcja zadań

Przypominam o zadaniach zaległych (dotąd nieomówionych): 1.3, 3.4, 3.5, 5.6, 6.5, 8.4

1. Niech $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ będą wektorami własnymi endomorfizmu $L \in \mathcal{L}(V)$, odpowiadającymi jego parami różnym wartościom własnym. Dowieść, że jeśli W jest podprzestrzenią L–niezmienniczą (tzn. taką, że $L(W) \subset W$) i $\sum_i \mathbf{v}_i \in W$, to $\mathbf{v}_i \in W \ \forall i$.

2. a) Dowieść, że dwie podobne macierze normalne są unitarnie podobne, a dwie podobne macierze, które są rzeczywiste i symetryczne, są ortogonalnie podobne.

b) To samo dla operatorów.

Wskazówka do poniższych zadań: zacząć od diagonalnej macierzy $\mathbf{A}$.

3. Jeśli $\mathbf{v}$ jest wektorem własnym macierzy normalnej $\mathbf{A}$, odpowiadającym wartości λ, to jest też wektorem własnym macierzy $\mathbf{A}^h$, odpowiadającym wartości $\overline{\lambda}$.

4. Dowieść równoważności warunków:

a) macierz $\mathbf{A}$ jest normalna i $\mathrm{spec}(\mathbf{A}) \subset [0, \infty)$;

b) macierz $\mathbf{A}$ jest samosprzężona i dodatnio półokreślona (tzn. $\langle \mathbf{Av}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{Av}\rangle \geq 0$ dla wszystkich $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$);

c) macierz $\mathbf{A}$ jest unitarnie podobna do macierzy diagonalnej, której przekątna ma wyłącznie wyrazy ≥ 0;

d) $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$ dla pewnej macierzy samosprzężonej $\mathbf{B}$;

e) $\mathbf{A} = \mathbf{B}^h\mathbf{B}$ dla pewnej macierzy kwadratowej $\mathbf{B}$.

Dziesiąta porcja zadań

Przypominam o zadaniach zaległych (dotąd nieomówionych): 1.3, 3.4, 3.5, 5.5, 5.6, 6,4, 6.5, 8.4.

1. Udwodnić, że jeśli baza przestrzeni V jest złożona z wektorów własnych operatora $L \in \mathcal{L}(V)$, to te z jej wektorów, które odpowiadają danej wartości własnej λ, tworzą bazę przestrzeni $V_L(\lambda)$.

2. Gdy $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$, to $V_{\mathbf{A}}(\lambda) = V_{\mathbf{A}_1}(\lambda) \times V_{\mathbf{A}_2}(\lambda)$. Ogólniej: gdy $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_s)$, to $V_{\mathbf{A}}(\lambda) = \prod_i V_{\mathbf{A}_i}(\lambda)$ dla $\lambda \in \mathbb{F}$. (Przez $\mathrm{diag}(\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_s)$ oznaczam macierz, w której wzdłuż przekątnej ustawione są kolejne klatki $\mathbf{A}_i$, a poza nimi są same zera.)

3. Rozpatrzmy przestrzeń $C^\infty(\mathbb{R})$ funkcji posiadających wszystkie pochodne.

a) Dowieść, że funkcja $\exp(\lambda t)$ jest wektorem własnym operatora różniczkowania $f \mapsto Df$, zaś funkcja $\sin(\lambda t)$ jest wektorem własnym operatora $f \mapsto D^2 f$.

b) Udowodnić, że funkcje $\sin(\lambda_1 t), ..., \sin(\lambda_n t)$ są liniowo niezależne gdy $|\lambda_i| \neq |\lambda_j| \neq 0$ dla $i \neq j$, a funcje $\exp(\lambda_1 t), ..., \exp(\lambda_n t)$ – gdy $\lambda_i \neq \lambda_j$ dla $i \neq j$.

4. Niech $K \in \mathcal{L}(V, W)$, $L \in (W, V)$ i $S \in \mathcal{L}(V)$, gdzie $\dim(V) = k$ i $\dim W = l$.

a) Przy $\widetilde{S} \in \mathcal{L}(V \times W)$ określonym jako $\widetilde{S} = S \times \mathbf{0}_W$, wyrazić $\chi_{\widetilde{S}}$ przez χ_S.

b) Udowodnić, że $(-x)^k \cdot \chi_{KL} = (-x)^l \cdot \chi_{LK}$.

c) Udowodnić **tożsamość Sylvestera**: $\det(I_W + KL) = \det(I_V + LK)$.

Poniższe zadania są pisemne; należy je oddać w piątek 23 III na początku ćwiczeń i numerować jak niżej. (Przestrzenie $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ rozważamy ze standardowym iloczynem skalarnym; każde zadanie=3p.)

P **3.** Niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ będzie macierzą o wierszach $(1, 1, 1, 1), (1, 1, -1, -1), (1, -1, 1, -1), (1, -1, -1, 1)$. Znaleźć macierz ortogonalną $\mathbf{S}$ i diagonalną $\mathbf{D}$, dla których $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \mathbf{D}$. Wyznaczyć też macierz $\mathbf{S}^{-1}$. (Wskazówka: $\chi_{\mathbf{A}}(2) = \chi_{\mathbf{A}}(-2) = 0$.)

P **4.** =ćwiczenie ze str. 16 notatek VI-MAC.pdf

P **5.** Dowieść, że rzut liniowy $P : V \to V$ jest ortogonalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle P(\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle \geq 0$ $\forall \mathbf{v} \in V$. (Tu, V jest rzeczywistą lub zespoloną przestrzenią unitarną.)

Dziewiąta porcja zadań

1. Zdefiniować podobieństwo permutacji $\sigma, \tau \in \mathbf{S}_k$ i dowieść, że ma ono miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy w przedstawieniu σ w postaci iloczynu cykli rozłącznych występuje dla każdego n tyle cykli długości n, co w przedstawieniu τ w postaci takiego iloczynu.

2. Niech $\mathbf{E}_{ij} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ oznacza $k \times k$–macierz, której ij–tym wyrazem jest jedynka, a pozostałymi – zera. Dowieść, że:

a) Macierze $\mathbf{E}_{ii}$ i $\mathbf{E}_{jj}$ są podobne (nad $\mathbb{F}$).

b) Dla $i \neq j$ i $\lambda \neq 0$, macierz $\mathbf{E}_{ij}$ jest podobna do $\lambda\mathbf{E}_{ij}$.

c) Gdy $\#\mathbb{F} > 2$ i $f : \mathcal{M}_k(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ jest funkcją liniową, przyjmującą na każdych dwóch macierzach podobnych tę samą wartość, to $f(\mathbf{A}) = f(\mathbf{E}_{11})\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$.

3. Dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ oznaczmy przez $c_i(\mathbf{A})$ współczynniki wielomianu $\chi_\mathbf{A}$: $\chi_\mathbf{A} = \sum_{i=0}^k c_i(\mathbf{A})x^i$. Dowieść, że:

a) $c_i(\mathbf{A}) = c_i(\mathbf{B})$ dla macierzy podobnych $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ (tzn. funkcje c_i są niezmiennikami podobieństwa).

b) $c_0(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$, $c_k(\mathbf{A}) = (-1)^k$ i $c_{k-1}(\mathbf{A}) = (-1)^{k-1}\mathrm{tr}(\mathbf{A})$.

c) Ogólniej, $c_s(\mathbf{A}) = (-1)^s \sum_{\#P=k-s} \det(\mathbf{A}_P)$ dla $s = 0, ..., k-1$, gdzie $\mathbf{A}_P$ oznacza podmacierz wyznaczoną przez wiersze i kolumny o numerach ze zbioru $P \subset \{1, ..., k\}$.

d) Gdy $\chi_\mathbf{A}$ ma, uwzględniając krotności, k pierwiastków $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{F}$, to $\sum_i \lambda_i = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$, $\prod_i \lambda_i = \det(\mathbf{A})$ oraz, ogólniej,

$$\sum_{\#P=s} \prod_{i \in P} \lambda_i = \sum_{\#P=s} \det(\mathbf{A}_P).$$

4. a) Wyrazić wielomian $\chi_{\mathbf{A}^{-1}}$ w zależności od $\chi_\mathbf{A}$ i $\det(\mathbf{A})$, gdy $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

b) Dowieść, że gdy macierz $\mathbf{A}^{-1}$ jest podobna do $\mathbf{A}$ lub do $\mathbf{A}^t$, to $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$ i współczynniki $c_i(\mathbf{A})$ (patrz zadanie 3) spełniają zależności $c_{k-i}(\mathbf{A}) = \varepsilon c_i(\mathbf{A})$ dla $i = 0, ..., k$, gdzie $\varepsilon = \det(\mathbf{A})(-1)^k$ i k jest stopniem macierzy $\mathbf{A}$.

5. * Udowodnić, że gdy rzuty liniowe $P_i \in \mathcal{L}(V), i = 1, ..., l$, spełniają warunek $\sum_i P_i = I$, to suma $\sum_i P_i(V)$ jest prosta i $P_iP_j = 0$ dla $i \neq j$. (Wskaz"owka: na ćwiczeniach zauważyliśmy, ze $\mathrm{rk}(P) = \mathrm{tr}(P)$ dla rzutów liniowych P.)

Ósma porcja zadań

1. Niech E będzie przestrzenią euklidesową wymiaru ≥ 2 i niech wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ będą równej długości. Dowieść istnienia izometrii $L \in \mathcal{L}(E)$ takiej, że $L(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ i $\det(L) = 1$.

2. a) Dowieść, że obrót liniowy przestrzeni E^3 jest złożeniem dwóch liniowych symetrii lustrzanych, i odwrotnie.

b) Wywnioskować, że izometria $L \in \mathcal{L}(E^3)$ jest obrotem wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(L) > 0$.

c) Wywieść stąd twierdzenie Eulera: złożenie obrotów liniowych przestrzeni E^3 też jest takim obrotem.

3. Dowieść, że każda zmieniająca orientację liniowa izometria przestrzeni E^3 jest złożeniem obrotu wokół pewnej prostej $\mathbb{R}\mathbf{u}$ z odbiciem względem płaszczyzny $\mathbf{u}^\perp$. (Wskaz"owka: gdy $L : E^3 \to E^3$ zmienia orientację, to $-L$ ją zachowuje.)

4. **Obrotem o** π przestrzeni euklidesowej E nazwiemy kanoniczne przedłużenie obrotu $-I_U$ dowolnej dwuwymiarowej podprzestrzeni U tej przestrzeni. Dowieść, że:

a) Gdy L jest symetrią lustrzaną i $\dim E = 3$, to $-L$ jest obrotem o π.

b) Gdy $\dim E \geq 3$, to złożenie dwóch symetrii lustrzanych jest też złożeniem dwóch obrotów o π.

c) Gdy $k := \dim E \geq 3$, to każdy obrót przestrzeni E jest złożeniem dwóch obrotów o π, a każda zachowująca orientację izometria przestrzeni E jest złożeniem k lub mniejszej liczby obrotów o π.

Proszę przeczytać informacje o kwaternionach, podane na stronach 42-43 (przed tw. 1) pliku V-UNI.pdf notatek z wykładu. Na razie proponuję przyjąć bez uzasadnienia łączność mnożenia (omówimy ją na ćwiczeniach, wiążąc kwaterniony z pewnymi macierzami) i w oparciu o nią rozwiązać poniższe zadanie.

5. Dowieść, że:

a) Dla kwaternionów $x = x_0 + x_q$ i $y = y_0 + y_q$ zachodzi $xy = z_0 + z_q$, gdzie $z_0 = x_0y_0 - \langle x_q, y_q \rangle$ oraz $z_q = x_0y_q + y_0x_q + x_q \times y_q$.

b) Przy $[x, y] := xy - yx$ zachodzi $[x, y] = 2x_q \times y_q$

c) Ma miejsce **tożsamość Jacobiego**: $[[x, y], z] + [y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ (prawdziwa w każdym pierścieniu).

d) $(u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v = 0$ dla kwaternionów czystych u, v, w.

Uwaga 1. Planowane jest zrefrowanie na ćwiczeniach dalszych wiadomości o zastosowaniu kwaternionów do opisu izometrii przestrzeni E^3, podanych na stronach 43–45 w V-UNI bądź w innych źródłach. Chętnych do zajęcia się tym proszę o zgłaszanie się e-mailem lub na ćwiczeniach. Najlepiej, jeśli skompletujemy do tego zespół 2-3 osób, które podzielą się referowaniem i wspólnie się przygotują. (Służę też pomocą na konsultacjach.)

Siódma porcja zadań

1. Dla $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathbb{R}^3$ dowieść, że (orientacja i iloczyn skalarny są standardowe):

$$a) \qquad \text{Jeli } \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}, \text{ to } \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$$

$$b) \qquad \langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle$$

$$c) \qquad \langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \times \mathbf{w}' \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}' \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}' \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \det(\mathbf{AB}), \text{ gdzie } \mathbf{A} \text{ jest macierzą}$$
$$\text{o wierszach } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \text{ zaś } \mathbf{B} \text{ macierzą o kolumnach } \mathbf{w}, \mathbf{w}'.$$

$$d) \qquad (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{u} \text{ (Wskaz"owka: b),c) i definicja iloczynu wektorowego);}$$

$$e) \qquad (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} + (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} + (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

2. Dowieść, że jeśli $T : E \to E'$ jest izometrią zachowującą orientację, to $T(\mathbf{v}_1 \times ... \times \mathbf{v}_{k-1}) = T(\mathbf{v}_1) \times ... \times T(\mathbf{v}_{k-1})$ dla każdych $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1} \in E$. (Tu E i E' to zorientowane przestrzenie euklidesowe.)

Definicja. Dla $\mathbf{v} \in V$ zdefiniujmy $\varphi_{\mathbf{v}} \in V^*$ wzorem $\varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$ $(\mathbf{x} \in V)$ i oznaczmy przez $F_V : V \to V^*$ przekształcenie, przyporządkowujące każdemu wektorowi $\mathbf{v} \in V$ funkcjonał $\varphi_{\mathbf{v}}$. Na podstawie tw. 3 w §1.3, F_V jest bijekcją.

3. Udowodnić, że dla dowolnego $L \in \mathcal{L}(V, W)$ ma miejsce równość $L^* \circ F_W = F_V \circ L^h$, gdzie $L^*(\varphi) := \varphi \circ L$ $(\varphi \in W^*)$.

Przypominam, że pozostało sporo zadań z poprzednich serii. W piątek 9 III można też oddawać na początku ćwiczeń zadania pisemne.

Szósta porcja zadań

1. Obliczyć odległość między warstwami A i B, jeśli $A = (-4, 3, -3, 2, 4) + \text{lin}((2, 0, 1, 1, 1), (-5, 1, 0, 1, 1))$, zaś B jest zadana układem równań $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 6$; $x_1 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 0$.

2. Niech przekształcenie $L \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie różnowartościowe i niech $\mathbf{b} \in W$. Dla $\mathbf{x}_0 \in V$ dowieść równoważnosci warunków: a) $L^h L(\mathbf{x}_0) = L^h(\mathbf{b})$, oraz b) $L(\mathbf{x}_0)$ jest rzutem ortogonalnym wektora $\mathbf{b}$ na podprzestrzeń $\text{im}(L)$.

3. Niech R będzie równoległościanem w przestrzeni euklidesowej V, rozpiętym na k wektorach, i niech R' będzie obrazem R przy rzutowaniu ortogonalnym przestrzeni V na jej podprzestrzeń. Dowieść, że $\mu_k(R') \leq \mu_k(R)$.

4. * Niech V będzie przestrzenią euklidesową i niech $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l \in V$.

a) Dowieść, że $\mu_{k+l}(R(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l)) = \mu_k(R(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)) \cdot \mu_l(R(\mathbf{w}'_1, ..., \mathbf{w}'_l))$, gdzie $\mathbf{w}'_i$ oznacza rzut ortogonalny wektora $\mathbf{w}_i$ na $\text{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)^\perp$.

b) Dowieść, że $\mu_{k+l}(R(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l)) \leq \mu_k(R(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)) \cdot \mu_l(R(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l))$.

5. * W przestrzeni $\mathbb{R}[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx$ obliczyć odległość x^k od $\text{lin}(1, x, ..., x^{k-1})$.

Poniższe zadania są pisemne; należy je oddać w piątek 9 III na początku ćwiczeń i numerować jak niżej. Przestrzenie $\mathbb{R}^n$ rozważamy ze standardowym iloczynem skalarnym.

P **1.** (3×2p.) a) Uzupełnić układ $((1,1,1,2),(1,2,3,-3))$ do bazy ortogonalnej przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

b) Wyznaczyć bazę dopełnienia ortogonalnego powłoki linowej układu $((1,1,1,1),(-1,1,-1,1),(2,0,2,0))$.
c) Wyznaczyć równania, opisujące dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni, danej układem równań $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0;\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0;\ 4x_1 + x_2 + 18x_3 - 23x_4 = 0.$

P **2.** (2×3p.) a) Wyznaczyć odległość wektora $(3,3,-4,2)$ od podprzestrzeni danej układem równań

$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0;\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0.$

b) Obliczyć odległość między warstwami A i B, jeśli $A = (0,2,6,-5)+\mathrm{lin}((-7,1,1,1),(-10,1,2,3))$, zaś B jest zadana układem równań $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3;\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6.$

Piąta porcja zadań

1. (=II. 4.2.3 u Kostrykina). Przestrzeń ma bazę ortonormalną $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Operator L ma w bazie $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ macierz o wierszach $(1,2)$ i $(1,-1)$. Wyznaczyć macierz w tej bazie operatora L^h.

2. Niech $L \in \mathcal{L}(V,W)$ będzie zanurzeniem izometrycznym, a P operatorem rzutu ortogonalnego przestrzeni V na jej podprzestrzeń V_0. Dowieść, że LPL^h jest operatorem rzutu ortogonalnego przestrzeni W na podprzestrzeń $W_0 := L(V_0)$.

3. Dowieść, że gdy przekształcenie $L \in \mathcal{L}(V,W)$ jest różnowartościowe, to
a) $L^hL : V \to V$ jest izomorfizmem, oraz
b) $L(L^hL)^{-1}L^h : W \to W$ jest rzutowaniem ortogonalnym na podprzestrzeń $L(V)$.

4. a) Wywnioskować z poprzedzającego zadania, że gdy $(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k)$ jest bazą danej podprzestrzeni $W_0 \subset \mathbb{F}^l$, to macierzą (w standardowych bazach) rzutu ortogonalnego przestrzeni $\mathbb{F}^l$ na W_0 jest $\mathbf{B} := \mathbf{A}(\mathbf{A}^h\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^h$, gdzie $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ to macierz o kolumnach $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$.

5. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ (którą utożsamiamy z $\mathbb{R}^{k+1}$) ustalmy wektor jednostkowy $(\mathbf{u}_0, c_0) \neq (\mathbf{0}_k, 1)$ i przyjmijmy $V := (\mathbf{u}_0, c_0)^\perp$. Dowieść, że przekształcenie $F : V \to \mathbb{R}^k$, zadane wzorem

$$F(\mathbf{u}, c) = \mathbf{u} + \frac{c}{1 - c_0}\mathbf{u}_0 \text{ dla } (\mathbf{u}, c) \in V,$$

jest izometrią.

6. Niech $\mathcal{M} := \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{C})$ i dla $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}$ przyjmijmy $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle := \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^h) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}^h\mathbf{A})$.
a) Dowieść, że $(\mathcal{M}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ jest przestrzenią unitarną i $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$. Ile wynosi norma macierzy unitarnej? Przy $k = l = 2$ wyznaczyć $(\mathrm{lin}\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\})^\perp$, gdzie $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
b) Niech $L(\mathbf{X}) = \mathbf{C}\mathbf{X}$ dla $\mathbf{X} \in V$, gdzie $\mathbf{C}$ jest ustaloną $l \times l$ macierzą zespoloną. Określić wzorem przekształcenie $L^h : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$.
c) Dowieść, że gdy macierz $\mathbf{C}$ jest unitarna, to L jest izometrią.

Czwarta porcja zadań

1. Niech wiersze macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{C})$ tworzą układ ortonormalny. Dowieść, że $||\mathbf{A}\mathbf{v}||_{\mathbb{C}^l} \leq ||\mathbf{v}||_{\mathbb{C}^k}$ dla wszystkich $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^k$.

2. Niech V będzie przestrzenią unitarną, a $P : V \to V$ pewnym jej rzutem liniowym. Dowieść, że jeśli $||P(\mathbf{v})|| \leq ||\mathbf{v}||$ dla wszystkich $\mathbf{v} \in V$, to rzut P jest ortogonalny.

3. a) Dowieść, że gdy rząd macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{C})$ jest równy k, to istnieje górnie trójkątna $k \times k$-macierz $\mathbf{S}$ taka, że $\mathbf{AS}$ jest macierzą zanurzenia izometrycznego.

b) Wywnioskować, że gdy wyżej dodatkowo $l = k$, to $\mathbf{A}$ ma tzw. QR-rozkład: $\mathbf{A} = \mathbf{US}$, gdzie macierz $\mathbf{U}$ jest unitarna, a $\mathbf{S}$ górnie trójkątna, o dodatnich wyrazach na przekątnej.

c) Dowieść, że rozkład taki jest jedyny.

4. Dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{C})$ i $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^k$ dowieść, że $||\mathbf{Av}||_{\mathbb{C}^l} \leq \sqrt{||\mathbf{A}^h\mathbf{Av}||_{\mathbb{C}^k}||\mathbf{v}||_{\mathbb{C}^k}}$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{A}^h\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$ dla pewnego skalara λ.

5. Niech $L \in \mathcal{L}(V, W)$, gdzie V i W są przestrzeniami unitarnymi. Udowodnić, że jeśli $L \neq 0$ i L zachowuje ortogonalność wektorów (tzn. $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle_V = 0 \Rightarrow \langle L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2)\rangle_W = 0$), to istnieje skalar c taki, że cL jest zanurzeniem izometrycznym.

Trzecia porcja zadań

1. a) Dowieść, że jeśli $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$ i $\mathbf{u} \neq \pm\mathbf{v}$, to $\angle\{\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\} = \pi/2$. (Co mówi to o rombie?)

b) Jeśli $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$ i $\|\mathbf{w}-\mathbf{u}\| = \|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|$, to $\angle\{\mathbf{w}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\} = \pi/2$.

c) Dla trójkąta, którego wierzchołkami są $\mathbf{0}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, udowodnić „twierdzenie sinusów”: $\sin(\angle\{\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{u}\})/\|\mathbf{v}\| = \sin(\angle\{\mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{v}\})/\|\mathbf{u}\|$.

2. Niech $\mathbf{v}'$ będzie rzutem ortogonalnym wektora $\mathbf{v}$ na podprzestrzeń liniową W i niech $\mathbf{w} \in W$. Dowieść, że:

a) $\angle\{\mathbf{v}, \mathbf{v}'\} \leq \angle\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$;

b) $\angle\{\mathbf{w}, \mathbf{v}\} \leq \pi/2 \Leftrightarrow \angle\{\mathbf{w}, \mathbf{v}'\} \leq \angle\{\mathbf{w}, \mathbf{v}\}$.

Uwaga 1. $\angle\{\mathbf{v}, \mathbf{v}'\}$ nazywamy **miarą kąta pomiędzy wektorem v i podprzestrzenią** W. Z zadania wynika, że jest ona najmniejszą z liczb $\angle\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, gdzie $\mathbf{w} \in W$.

3. a) Dowieść, że $\angle\{\mathbf{v}-\mathbf{u}, \mathbf{u}\} = \pi/2 \Leftrightarrow \|\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{v}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{v}\|$. Dać interpretację geometryczną.

b) Niech $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$ będą rzutami ortogonalnymi wektora $\mathbf{v}$ na dwie podprzestrzenie. Dowieść, że $\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\| \leq \|\mathbf{v}\|$.

4. Jeśli dla $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{R})$ przyjąć $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle = \operatorname{tr}(\mathbf{AB}^t)$ i $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\langle \mathbf{A}, \mathbf{A}\rangle}$, to

a) $(\mathcal{M}_{l,k}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ jest przestrzenią euklidesową;

b) $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|$ dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$ i $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{k,m}$;

c) $\mathbf{A} \mapsto \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^t)$ jest rzutem ortogonalnym przestrzeni $(\mathcal{M}_k, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ na podprzestrzeń $U = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k : \mathbf{A} = \mathbf{A}^t\}$ (wszystkich macierzy symetrycznych); wyznaczyć też $U^\perp$.

d)* $\|\mathbf{AA}^t - \mathbf{A}^t\mathbf{A}\|^2 \leq 2\|\mathbf{A}\|^4$.

5. Przy oznaczeniach zadania 4 (lecz przy $l = k$), określić wzorem ortogonalny rzut przestrzeni $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ na podprzestrzeń macierzy skalarnych (tzn. na zbiór $\{\lambda\mathbf{I}_k : \lambda \in \mathbb{R}\}$).

Druga porcja zadań

1. Dowieść, że gdy klatki $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$ są kwadratowe, a jedna z klatek $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ jest zerowa, to wyznacznik macierzy $\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{X} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}$ jest równy iloczynowi $\det(\mathbf{P})\det(\mathbf{Q})$.

2. (II.4.1 u Kostrykina.) Wektory bazy ortonormalnej przestrzeni V zrzutowano ortogonalnie na jej podprzestrzeń. Dowieść, że suma kwadratów długości tych rzutów jest równa wymiarowi podprzestrzeni. (Zakładamy, że $\dim V < \infty$.)

3. Niech $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ będzie bazą przestrzeni V. Dowieść istnienia i jednoznaczności takiego układu wektorów $(\mathbf{w}_i)_{i=1}^k$, że $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j\rangle$ jest jedynką gdy $i = j$ i zerem w przeciwnym razie ($i, j = 1, ..., k$). Dowieść też, że układ ten jest bazą i dla dowolnego wektora $\mathbf{v} \in V$ zachodzi $\mathbf{v} = \sum_i \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i\rangle \mathbf{w}_i$.

4. * Udowodnić **nierówność Ptolomeusza**: $||\mathbf{v}-\mathbf{x}||\cdot||\mathbf{w}-\mathbf{y}|| \le ||\mathbf{v}-\mathbf{w}||\cdot||\mathbf{x}-\mathbf{y}||+||\mathbf{v}-\mathbf{y}||\cdot||\mathbf{w}-\mathbf{x}||$ dla $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Definicja. **Drogą** w k–wymiarowej przestrzeni V nad $\mathbb{F}$ nazwiemy funkcję $\mathbf{f} : [a, b] \to V$ taką, że dla pewnej bazy $\mathcal{V}$ tej przestrzeni, funkcja $t \mapsto [\mathbf{f}(t)]_{\mathcal{V}} \in \mathbb{F}^k$ jest ciągła. (Jak zwykle, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{V}}$ oznacza ciąg współrzędnych wektora $\mathbf{v}$ w bazie $\mathcal{V}$.) **Drogą baz** w V nazwiemy układ dróg $\mathbf{f}_i : [a, b] \to V$ $(i = 1, ..., k)$ taki, że $(\mathbf{f}_i(t))_{i=1}^k$ jest bazą w V, dla każdego $t \in [a, b]$.

5. Dowieść, że:

a) Bez zmiany znaczenia można wyżej zastąpić „dla pewnej" przez „dla każdej".

b) Gdy $L \in \mathcal{L}(V, W)$ i $\mathbf{f} : [a, b] \to V$ jest drogą w V, to $L \circ \mathbf{f}$ jest drogą w W.

c) W dowolnej przestrzeni rzeczywistej V (a nie tylko w $\mathbb{R}^k$), dwie bazy uporządkowane są zgodnie zorientowane wtedy i tylko wtedy, gdy można je połączyć drogą baz.

Pierwsza porcja zadań

1. Dowieść, że endomorfizm przestrzeni rzeczywistej zachowuje orientację wtedy i tylko wtedy, gdy ma dodatni wyznacznik.

2. (Część a) jest już już rozwiązana, a b)–zaawansowana.) Niech $V_{\mathbb{C}}$ będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$, a $V_{\mathbb{R}}$ przestrzenią mającą ten sam, co $V_{\mathbb{C}}$, zbiór wektorów, lecz zbiór skalarów $\mathbb{R}$. (Działania w $V_{\mathbb{R}}$ są wzięte z $V_{\mathbb{C}}$.) Udowodnić, że:

a) Gdy $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_n)_{n=1}^k$ jest bazą w $V_{\mathbb{C}}$, to $\mathcal{U}' = (\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k, i\mathbf{u}_1, ..., i\mathbf{u}_k)$ jest nią w $V_{\mathbb{R}}$.

b) Gdy $L_{\mathbb{R}} \in \mathcal{L}(V_{\mathbb{R}})$ jest przekształceniem wyznaczonym przez $\mathbb{C}$–liniowy operator $L \in \mathcal{L}(V_{\mathbb{C}})$, to $\det(L_{\mathbb{R}}) = |\det(L)|^2$.

c) Każdy $\mathbb{C}$–liniowy operator nieosobliwy $L \in \mathcal{L}(V_{\mathbb{C}})$ zachowuje orientację przestrzeni $V_{\mathbb{R}}$; ponadto, gdy wychodząc od innej bazy $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ przestrzeni $V_{\mathbb{C}}$ utworzyć jak w a) bazę $\mathcal{V}'$ przestrzeni $V_{\mathbb{R}}$, to bazy $\mathcal{U}'$ i $\mathcal{V}'$ będą zgodnie zorientowane.

3. a) Dowieść, że każdą macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{R})$ można dla pewnego r połączyć drogą macierzy rzędu r z macierzą (b_{ij}), gdzie $b_{ij} = 1$ gdy $i = j < r$, $b_{rr} = \pm 1$ i $b_{ij} = 0$ w przeciwnym razie.

b) Gdy $r < \max(k, l)$, to wyżej można przyjąć $b_{rr} = 1$.

Niżej V jest przestrzenią z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i odpowiadającą mu normą.

4. Uogólnić tożsamość równoległoboku następująco: dla $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ zachodzi $\sum_\varepsilon \| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbf{v}_i\|^2 = 2^n \sum_{i=1}^n \|\mathbf{v}_i\|^2$, gdzie sumowanie jest po wszystkich ciągach $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$. (Inaczej: średnią arytmetyczną liczb $c_\varepsilon := \| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbf{v}_i\|^2$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}^n$, jest $\sum_{i=1}^n \|\mathbf{v}_i\|^2$.)

5. Przyjmijmy $\mathbf{v}' = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}$ dla $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. (Przekształcenie $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}'$ nazywane jest **inwersją** względem sfery $\|\mathbf{v}\| = 1$.) Dowieść, że $\|\mathbf{v}' - \mathbf{w}'\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|/\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$.

6. Dla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ wyprowadzić **tożsamość Cauchy'ego** $\|\mathbf{v}\|^2(\|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{w}\|^2 - |\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle|^2) = \|\mathbf{u}\|^2$, gdzie $\mathbf{u} := \|\mathbf{v}\|^2\mathbf{w} - \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle\mathbf{v}$, a z niej **nierówność Cauchy'ego–Buniakowskiego–Schwarza**: $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \le \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|$, ostrą dla liniowo niezależnych wektorów $\mathbf{v}, \mathbf{w}$. (Dyskusja i inny dowód są w p.3.)

7. Ustalmy $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in V$ i $m_1, ..., m_k \in \mathbb{R}$, i niech $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k m_i\|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|^2$ dla $\mathbf{x} \in V$. Dowieść, że

a) gdy $M := \sum_i m_i \ne 0$, to przy $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^k m_i\mathbf{a}_i$ zachodzi $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + M\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$,

b) gdy $M > 0$, to funkcja f przyjmuje w $\mathbf{x}_0$ swe minimum, równe $\sum_i m_i\|\mathbf{a}_i\|^2 - \frac{1}{M}\| \sum_i m_i\mathbf{a}_i\|^2$.

c) Jak jest, gdy $M = 0$?