Kolokwium z Funkcji Analitycznych 5 XII 2013

Każdą oddawaną kartkę proszę czytelnie podpisać, podając numer indeksu i nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy ćwiczeniowej, oraz opatrzeć numerem rozwiązywanego zadania (tylko jednego na kartce!).

Proszę dawać wyczerpujące wyjaśnienia i uzasadnienia, umożliwiające śledzenie toku rozumowania. Proszę też jawnie wskazywać na wykorzystywane rezultaty. Sposób redakcji (kompletność uzasadnień, czytelność przedstawienia) ma wpływ na ocenę!

Z poniższych 6 zadań proszę wybrać 5; za każde można dostać do 20p. Wolno też rozwiązywać pozostałe zadanie; wtedy najgorzej rozwiązane zadanie będzie ocenione w skali 0–10.

1. a) Przekształcić biholomorficznie obszar $\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re} z| < 1\}$ na półkole $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ i } \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

b) Czy można za żądane przekształcenie obrać homografię? (Odpowiedź uzasadnić.)

2. Rozwinąć w szereg Laurenta funkcję

$$f(z) = \frac{1}{(z^3+1)(z^3-2)}$$

w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2^{1/3}\}$. Obliczyć też $res_{-1} f$ funkcji f w punkcie 1.

3. Znaleźć, jeśli istnieje, taką funkcję holomorficzną $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, której część rzeczywista, wyrażona jako funkcja zmiennych $x = \mathrm{Re} z$ i $y = \mathrm{Im} z$, jest równa funkcji

$$u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3 + x$$

Wskazać też funkcję v, harmonicznie sprzężoną do u i wyrazić f jako funkcję zmiennej zespolonej z, bez użycia $\mathrm{Re} z, \mathrm{Im} z$ czy $\overline{z}$. Jeśli żądane funkcje nie istnieją, podać uzasadnienie.

4. Niech

$$f(z) = \frac{z^2(e^z - e^{-z})}{(z - \sin z)}$$

Dowieść, że funkcję f można przedłużyć do funkcji $\widetilde{f}$, holomorficznej w otoczeniu zera. Wyznaczyć też współczynniki $c_0, ..., c_3$ rozwinięcia Maclaurina $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ funkcji $\widetilde{f}$.

5. a) Obliczyć $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos t+a^2}\mathrm{d}t$, gdzie $a \in (-1,1)$.

b) Wyznaczyć wartości, które może przyjmować całka $\displaystyle\int_S \frac{\exp(1/z^2)}{z(1+z^2\pi^2)}\mathrm{d}z$, gdy S jest dowolnym dodatnio zorientowanym okręgiem, rozłącznym z $\{0, \mathbf{i}/\pi, -\mathbf{i}/\pi\}$. (Uwzględnić wszystkie takie okręgi.)

6. Niech $f(z) = 1-z^2$. Wyjaśnić, czy istnieje gałąź pierwiastka kwadratowego funkcji $f : U \to \mathbb{C}$, gdy

a) $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;
b) $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.