6. Niech $f(z) = 1 - z^2$. Wyjaśnić, czy istnieje gałąź pierwiastka kwadratowego funkcji $f : U \to \mathbb{C}$, gdy

a) $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;

b) $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

Rozwiązanie.

a). Funkcja $z \mapsto -z^2$ przekszałca dysk U w siebie, a przesunięcie $z \mapsto 1 + z$ przekształca go na dysk $D = \{z : |z-1| < 1\}$. Na dysku D istnieje gałąź p pierwiastka kwadratowego, bo jest on rozłączny z półprostą $(-\infty, 0]_{\mathbb{R}}$, wychodzącą z zera. Gdy przyjmiemy $g(z) = p(1 - z^2)$ dla $z \in U$, to otrzymamy szukaną gałąź pierwiastka z $1 - z^2$: istotnie, $g^2(z) = (p(1 - z^2))^2 = 1 - z^2$ dla $z \in U$, przy czym funkcja g jest holomorficzna jako złożenie funcji holomorficznej z wielomianem $1 - z^2$.

b). Tym razem, funkcja $f(z) = 1-z^2$ przekształca zbiór U na pieścień $\{z : |z-1| > 1\}$, na którym nie istnieje gałąź pierwiastka kwadratowego . To skłoniło większość z Państwa do stwierdzenia, że nie istnieje też gałąź pierwiastka z f. Takie rozumowanie jest jednak niepoprawne, co szczególnie prosto widać przy funkcji f zmienionej na z^2, która oczywiście ma gałąź pierwiastka (jest nią funkcja z).

W przypadku funkcji $f(z) = 1-z^2$ z zadania, zachodzi równość $f(z) = -z^2(1-\frac{1}{z^2})$, przy czym zarówno $-z^2$, jak i $(1 - \frac{1}{z^2})$ mają w U gałęzie pierwiastka kwadratowego, którymi są iz oraz $g(1/z)$, odpowiednio, gdzie g jest wzięte z a). (Korzystam tu z tego, że funkcja $z \mapsto 1/z$ przeprowadza pierścień $\{z : |z| > 1\}$ w dysk $\{z : |z| < 1\}$. Stąd wynika, że szukana w b) gałąź istnieje i można ją zadać wzorem $h(z) = izg(1/z)$.