Zadanie 5

Oznaczmy $S = S(0,1)$

a) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos t + a^2}\, dt = \left\{ \begin{array}{l} \ln(z) = it \\ -i\ln(z) = t \\ \frac{-i}{z}\, dz = dt \end{array}\right\} = \int_S \frac{1}{1-2a\cdot\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})+a^2}\cdot\frac{-i}{z}\, dz =$

$$= \int_S \frac{-i}{z - az^2 + a + a^2 z}\, dz = \int_S \frac{-i}{-az^2+(a^2+1)z-a}\, dz$$

Znajdźmy osobliwości funkcji podcałkowej.

$\Delta = (a^2+1)^2 - 4a^2 = (a^2-1)^2$ stąd osobliwości to $z_i = \frac{-a^2-1 \pm\sqrt{(a^2-1)^2}}{-2a}$

tzn $z_1 = \frac{-a^2-1-a^2+1}{-2a} = a$

$z_2 = \frac{-a^2-1+a^2-1}{-2a} = \frac{-2}{-2a} = \frac{1}{a}$ } gdy $a \neq 0$

Mamy zatem dwa punkty osobliwe, z których tylko jeden (z_1) znajduje się w dysku ograniczonym S.

Stąd $\int_S \frac{-i}{-az^2+(a^2+1)z-a}\, dz = 2\pi i \cdot \mathrm{res}_a \frac{-i}{-a(z-a)(z-\frac{1}{a})}$.

Funkcja $\frac{-i}{a(z-\frac{1}{a})}$ jest holomorficzna w otoczeniu a (ponieważ $a\in(-1,1)$). Zatem rozwija się wokół niego w szereg Taylora. W takim razie

$$\mathrm{res}_a \frac{-i}{(z-a)(-a)(z-\frac{1}{a})} = \left(\frac{-i}{-az+1}\right)(a) = \frac{-i}{1-a^2}$$

Wobec tego $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1-2a\cos t+a^2} = \int_S \frac{-i}{-a(z-a)(z-\frac{1}{a})}\, dz = 2\pi i\cdot \mathrm{res}_a \frac{-i}{-a(z-a)(z-\frac{1}{a})} = \frac{2\pi}{1-a^2}$

Pominięto przypadek $a=0$ 9p/10 (z=a).

b) $\int_S \frac{\exp(z^{-2})}{z(1+z^2\pi^2)}\, dz$ Funkcja podcałkowa ma 3 punkty osobliwe tj. $0, \frac{i}{\pi}, \frac{-i}{\pi}$.

Jeżeli w dysku $D=\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Ind}_S(z) \geq 1\}$ nie ma żadnego z nich, to jest holomorficzna w jego otoczeniu i każda całka po krzywej zamkniętej wewnątrz jest równa 0.

Jeżeli takie punkty są, to $\int_S [\ ] = 2\pi i \sum_{p\text{-osob.}} \mathrm{res}_p f$. ✓

Znajdźmy więc $\mathrm{res}_0 f$, $\mathrm{res}_{\frac{i}{\pi}} f$ i $\mathrm{res}_{\frac{-i}{\pi}} f$.

Zadanie 5 cd.

Znajdźmy $\operatorname{res}_{\frac{i}{\pi}} f$.

$$f = \frac{e^{1/z^2}}{z(1-iz\pi)(1+iz\pi)} = \frac{e^{1/z^2}}{z(1-iz\pi)\frac{\pi}{i}\cdot\left(\frac{i}{\pi}-z\right)}.$$

funkcja $\frac{e^{1/z^2}}{\frac{\pi}{i}z(1-iz\pi)}$ jest holomorficzna w otoczeniu $\frac{i}{\pi}$, zatem rozwija się w szereg Taylora wokół $\frac{i}{\pi}$. Stąd też $\operatorname{res}_{\frac{i}{\pi}} f = \left(\frac{e^{1/z^2}}{\frac{\pi}{i}z(1-iz\pi)}\right)\left(\frac{i}{\pi}\right) = \frac{e^{-\pi^2}}{2}$ ✓

Analogicznie znajdujemy $\operatorname{res}_{-i/\pi} f$.

$$f = \frac{e^{1/z^2}}{\frac{-\pi}{i}z(1+iz\pi)\left(\frac{-i}{\pi}-z\right)}.$$

funkcja $\frac{e^{1/z^2}}{-\frac{\pi}{i}z(1+iz\pi)}$ jest holomorficzna w otoczeniu $\frac{-i}{\pi}$ a więc rozwija się wokół $\frac{-i}{\pi}$ w szereg Taylora. zatem

$$\operatorname{res}_{\frac{-i}{\pi}} f = \frac{e^{-\pi^2}}{2}$$ ✓

Znajdźmy teraz $\operatorname{res}_0 f$.

Mamy $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z(1+z^2\pi^2)} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} z^{-2i}\cdot\frac{1}{i!}}{z(1+z^2\pi^2)} = \frac{1}{z}\cdot\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} z^{-2i}\cdot\frac{1}{i!}\right)}_{A}\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}(z\pi)^{2n}(-1)^n\right)}_{B}.$

Szeregi A, jak i B są w otoczeniu 0 zbieżne bezwzględnie, a zatem można je wymnożyć. Wtedy otrzymamy szereg $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k z^k$.

$$c_0 = 1 + \frac{-1}{1!}\cdot(\pi^2)^1 + \frac{1}{2!}(\pi^2)^2 + \frac{(-1)}{3!}(\pi^2)^3 + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}(\pi^2)^m = e^{-\pi^2}$$ ✓

stąd $\operatorname{res}_0 f = e^{-\pi^2}$. ✓

Zatem możliwe wartości szukanej całki to

$$0,\ \pi i e^{-\pi^2},\ 2\pi i e^{-\pi^2},\ 3\pi i e^{-\pi^2},\ 4\pi i e^{-\pi^2}.$$

10p / 10