Kacper Morawski, 320220, gr p. A. Katamajskiej.

zad. 4.   20p A. Kał

Funkcję $\sin z$ można rozwinąć wokół zera w szereg Maclaurina:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

Również funkcję e^z i e^{-z} można rozwinąć:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Wobec tego:

$$z^2(e^z - e^{-z}) = z^2\left(2z + 2\frac{z^3}{3!} + 2\frac{z^5}{5!} + \dots\right) = 2z^3\left(1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots\right)$$

$$z - \sin z = \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \dots = z^3\left(\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \dots\right)$$

Czyli:

$$f(z) = \frac{2z^3\left(1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots\right)}{z^3\left(\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \dots\right)} = 2\,\frac{1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \dots}$$ 10

Zauważmy, że dla $z=0$ mianownik jest równy $\frac{1}{3!}$, więc nie ma problemu z jego zerowaniem, zaś licznik jest równy 1. Wobec tego f można przedłużyć do funkcji $\tilde{f}$ holomorficznej w okolicy zera i $\tilde{f}(0) = 2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{3!}} = 12$.

Aby wyznaczyć współczynniki $c_0, \dots, c_3$ zastosuję otrzymane wcześniej rozwinięcie f wokół zera. Mam zatem:

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + o(z^3) = 2\,\frac{1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + o(z^4)}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} + o(z^4)}$$

Mnożąc stronami przez mianownik otrzymam:

$$(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + o(z^3))\left(\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} + o(z^4)\right) = 2 + \frac{2z^2}{3!} + \frac{2z^4}{5!} + o(z^4).$$

Porównuję teraz współczynniki przy odpowiednich potęgach z:

Lewa strona: $\frac{c_0}{3!} + \frac{c_1}{3!}z + \left(-\frac{c_0}{5!} + \frac{c_2}{3!}\right)z^2 + \left(\frac{-c_1}{5!} + \frac{c_3}{3!}\right)z^3 + o(z^3)$.

$$c_0 \cdot \frac{1}{3!} = 2 \Rightarrow c_0 = 12$$

$$c_1 \cdot \frac{1}{3!} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$-\frac{c_0}{5!} + \frac{c_2}{3!} = \frac{2}{3!} \Rightarrow -\frac{1}{10} + \frac{c_2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{c_2}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{13}{30} \Rightarrow c_2 = \frac{13}{5}$$

$$-\frac{c_1}{5!} + \frac{c_3}{3!} = 0 \Rightarrow \frac{c_3}{3!} = 0 \Rightarrow c_3 = 0.$$

Zatem te współczynniki to:

$c_0 = 12$, $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{13}{5}$, $c_3 = 0$.   10