Dawid Miftodinow
320198
p. Anna Zdunik

20A A. Kotn

Zadanie 2

$$f(z) = \frac{1}{(z^3+1)(z^3-2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z^3-2} - \frac{1}{z^3+1}\right).$$

Mamy

$$\frac{1}{z^3-2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z^3}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^3}{2}\right)^n \quad , \text{dla } \left|\frac{z^3}{2}\right| < 1$$
$$(|z| < 2^{\frac{1}{3}})$$

$$\frac{1}{z^3+1} = \frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^3}} = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^3}\right)^n \quad , \text{dla } \left|\frac{1}{z^3}\right| < 1$$
$$(|z| > 1)$$

Dla $1 < |z| < 2^{\frac{1}{3}}$ powyższe szeregi mają zsumowań, więc

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^3}{2}\right)^n - \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^3}\right)^n\right).$$

12

-1 jest zerem jednokrotnym funkcji $\frac{1}{z^3+1}$, zatem

$$\mathrm{res}_{-1}\frac{1}{z^3+1} = \lim_{z\to -1}\frac{z+1}{z^3+1} \underset{\uparrow}{=} \lim_{z\to -1}\frac{1}{3z^2} = \frac{1}{3}$$

(tutaj stosuję regułę de l'Hospitala, mogę bo -1 jest biegunem jednokrotnym $(z+1)$ i (z^3+1))

$$\mathrm{res}_{-1}\frac{1}{z^3-2} = 0.$$

zatem $\mathrm{res}_{-1} f(z) = \frac{1}{3}\left(0 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{9}.$

8