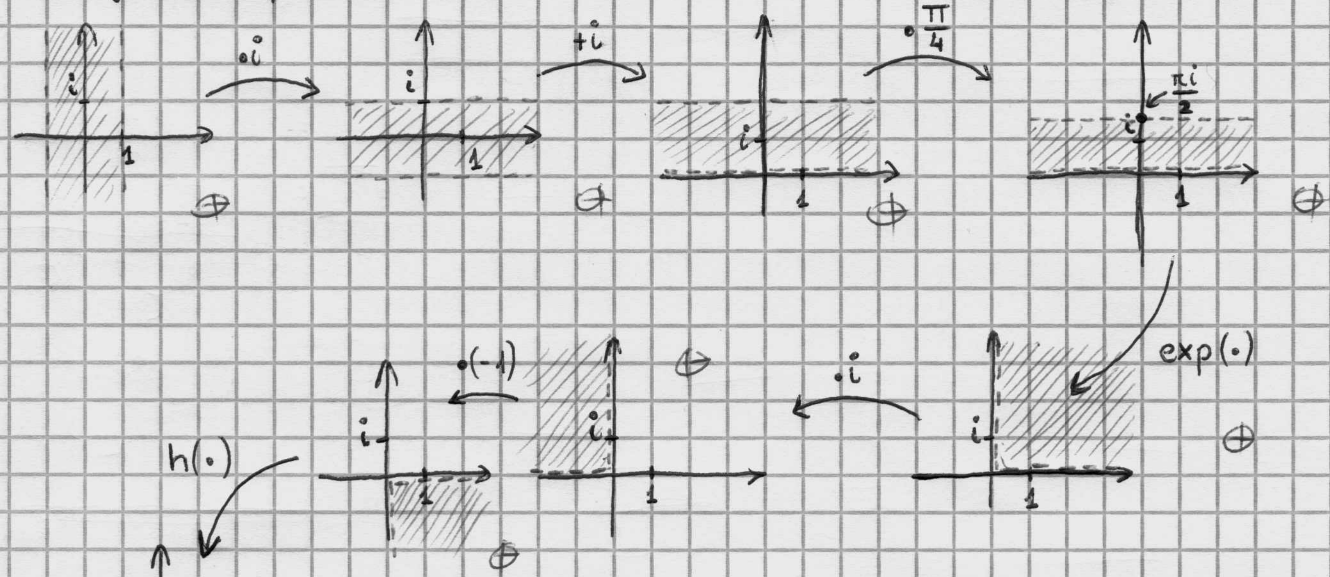
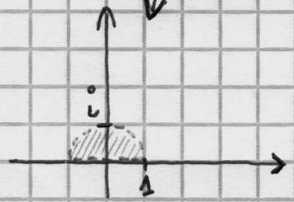
ZADANIE 1.

15 + 5

BARTŁOMIEJ KIEŁAK 319655
WOJCIECHOWSKI

a) Będziemy stopniowo przekształcać obszar:





, gdzie $h(z)=\frac{z+i}{z-i}$. Uzasadnienia wymaga przede wszystkim ostatni krok. ✓

Bezpośrednio wyliczamy, że

$$h(i)=\infty,\quad h(0)=-1,\quad h(-i)=0,$$ ✓

więc obrazem uogólnionego okręgu $i\mathbb{R}$ jest uogólniony okrąg $\mathbb{R}$. Ponadto

$$h(-1)=\frac{-1+i}{-1-i}=\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{1-2i+i^2}{1^2-i^2}=\frac{-2i}{2}=-i,$$

$$h(1)=\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{1+2i+i^2}{1^2-i^2}=\frac{2i}{2}=i,$$

więc obrazem uogólnionego okręgu $\mathbb{R}$ jest okrąg, przechodzący przez punkty $h(-1)=-i$, $h(0)=-1$, $h(1)=i$, tj. okrąg jednostkowy o środku w zerze. Zatem każda z ćwiartek układu przejdzie na jeden z czterech obszarów wyznaczonych przez $h(\mathbb{R})$ oraz $h(i\mathbb{R})$. Ale ✓

$$h(1-i)=\frac{(1-i)+i}{(1-i)-i}=\frac{1}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i}=\frac{1}{5}+i\frac{2}{5},$$

$$\mathrm{Re}\,h(1-i)=\frac{1}{5}>0,\quad |h(1-i)|=\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{4}{25}}<1,$$

więc punkt z IV ćwiartki przechodzi na punkt właściwego obszaru (docelowego półkola), skąd cała ćwiartka przechodzi na to półkole. ✓

b) Nie można. W przeciwnym razie brzeg pasa przeszedłby na brzeg półkola, ale brzegiem pasa jest suma dwóch uogólnionych okręgów (proste), więc jego obraz, również byłby sumą dwóch uogólnionych okręgów przy homografii, a brzeg półkola nią nie jest. ✓