Egzamin z Funkcji Analitycznych (teoria). 4. II. 2014

Każdą oddawaną kartkę należy czytelnie podpisać, podając numer indeksu i nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy ćwiczeniowej. Rozwiązania różnych zadań powinny być wyraźnie rozdzielone i opatrzone numerem zadania. (Nie muszą być zapisane na różnych kartkach.)

Każda część każdego zadania może przynieść do 10p. Części c) można wymieniać na któryś z tematów zastępczych d1) czy d2), który jednak przyniesie tylko do 7p.

Proszę dawać obszerne wyjaśnienia, w tym wyjaśniać znaczenie pojęć, występujących w przytaczanych twierdzeniach i definicjach.

1. a) Wyjaśnić, kiedy funkcja ma w punkcie $p \in \mathbb{C}$ osobliwość istotną, pozorną czy biegun. Wyjaśnienie dać tak w terminach zachowania się funkcji w nakłutym otoczeniu punktu $p \in \mathbb{C}$, jak i rozwinięcia jej w szereg Laurenta.

b) Powtórzyć punkt a), lecz przy $p = \infty$.

c) Udowodnić twierdzenie Casoratiego-Sochockiego-Weierstrassa.

2. a) Sformułować Zasadę Otwartości i Zasadę Maksimum dla funkcji holomorficznych.

b) Sformułować homotopijną wersję twierdzenia Cauchy'ego o równości całek i wyjaśnić znaczenie występującego tam pojęcia homotopii.

c) Udowodnić Zasady, wymienione w a).

3. a) Sfromułować lemat Schwarza o przekształceniach dysku.

b) Sformułować twierdzenia Weierstrassa oraz Montela–Osgooda–Stjeltjesa o zbieżności funkcji holomorficznych.

c) Udowodnić, że każde biholomorficzne przekształcenie dysku na siebie jest homografią.

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

Tematy zastępcze:

d1) Udowodnić, że każda funkcja harmoniczna w obszarze jednospójnym jest częścią rzeczywistą funkcji holomorficznej w tym obszarze.

d2) Sformułować i udowodnić zasadę argumentu.

Egzamin z Funkcji Analitycznych (zadania). 4 II 2014

Każdą oddawaną kartkę proszę czytelnie podpisać, podając numer indeksu i nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy ćwiczeniowej, oraz opatrzeć numerem rozwiązywanego zadania (może być tylko jedno na kartce).

Proszę dawać wyczerpujące wyjaśnienia i uzasadnienia, umożliwiające śledzenie toku rozumowania. Proszę też jawnie wskazywać na wykorzystywane rezultaty. Sposób redakcji (kompletność uzasadnień, czytelność przedstawienia) ma wpływ na ocenę!

Z poniższych siedmiu zadań proszę wybrać 5; za każde można dostać do 20p.

1. a) Przeprowadzić biholomorficznie obszar $\{z : \mathrm{Im}(z) < 1, |z| > 1\}$ na dysk $\{z : |z| < 1\}$ tak, by obrazem $-2\mathbf{i}$ było zero.

b) Obliczyć $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos t)^2}\mathrm{d}t$ i $\int_{|z|=1} z^3 \sin(z^{-2})\mathrm{d}z$ (okrąg $|z| = 1$ orientujemy dodatnio).

2. Obliczyć następujące całki niewłaściwe: a) $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\mathrm{d}x$, b) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^4+1}\mathrm{d}x$.

3. Uzasadnić istnienie sumy $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(-1)^n(\frac{1}{w-n} + \frac{1}{n})$, gdzie $w \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, i wyznaczyć ją metodami analizy zespolonej.

4. a) Ile pierwiastków wielomianu $z^{24} + 4z^2 + z + 1$, z uwzględnieniem ich krotności, leży w dysku $\{z : |z| < 1\}$, a ile w pierścieniu $\{z : 1 < |z| < 1.1\}$?

b) Ile pierwiastków wielomianu $z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3$, z uwzględnieniem ich krotności, leży w w pierwszej ćwiartce płaszczyzny $\{z : \mathrm{Re}z > 0, \mathrm{Im}z > 0\}$?

5. a) Udowodnić, że dla dostatecznie dużych R istnieją w pierścieniu $\{z : |z| > R\}$ dokładnie dwie gałęzie pierwiastka kwadratowego z funkcji $f(z) = z^2 + 6z - 1$.

b) Oznaczmy przez g tę z powyższych gałęzi, która w punkcie $2R$ przyjmuje wartość rzeczywistą dodatnią. Znaleźć współczynniki c_0, c_1, c_{-1} rozwinięcia g w szereg Laurenta w wymienionym pierścieniu, oraz wyznaczyć całkę $\int_{|z|=2R} g(z)\mathrm{d}z$, gdzie okrąg $|z| = 2R$ jest zorientowany dodatnio.

6. Niech $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ oznacza górną półpłaszczyznę płaszczyzny zespolonej.

a) Udowodnić, że jeśli h jest homografią, spełniającą warunek $h(\Pi) = \Pi$, to $h(z) = (az + b)/(cz + d)$ dla $z \in \mathbb{C}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i $ad - bc > 0$.

b) Udowodnić, że teza pozostanie słuszna, jeśli $h : \Pi \to \Pi$ jest przekształceniem biholomorficznym.

7. Funkcja $f : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ jest meromorficzna w całej sferze Riemanna $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ i spełnia następujące warunki:

i) $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{1, 2\})$ i f ma biegun rzędu 1 w punkcie 1, a rzędu 2 w punkcie 2;

ii) $\mathrm{res}_1 f = 1$ i $\mathrm{res}_2 f = 2$;

iii) $f(0) = -1$ i $f(3) = 1/2$.

Znaleźć postać ogólną funkcji f i zbadać, czy f może dodatkowo być ograniczona w otoczeniu punktu ∞, a jeśli tak, to jaką wtedy ma postać.