Zadanie 6)   Strona 1/3

a) Zauważmy, że $\frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} + 1 + \frac{1}{2!}z + \frac{1}{3!}z^2 \dots$ (z rozwinięcia funkcji exp)

8+7+6 = 21 p

dla $z \neq 0$, tj. $\frac{e^z}{z}$

równa się jednemu szeregowi Laurenta wokół punktu 0, czyli szereg

ten jest zbieżny na całym $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, a więc musi być zbieżny niemal normalnie do $\frac{e^z}{z}$.

W obszarze $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ funkcja $f = \frac{e^z}{z}$ jest holomorficzna,

a także z rozwinięcia (z sz. Laurenta) dostajemy $res_0 f = 1$, więc z uwagi na to, iż 0 leży

wewnątrz koła o brzegu $\{z : |z| = 2\}$, to na mocy wzoru całkowego Cauchy'ego

(droga $|z| = 2$ spełnia założenia warunek $\int_{|z|=2} h\,dz = 0$ gdy $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorficzna na mocy tw. Cauchy'ego)

dostajemy: $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z}\,dz = 2\pi i \, res_0 f = 2\pi i$ ✓

b) Postępując analogicznie, rozwijamy $f(z) = \frac{e^{1/z}}{z}$ holomorficzną na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

w szereg Laurenta wokół 0 (korzystając z rozwinięcia funkcji exp w szereg)

$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!\,z^3} + \dots$,

stwierdzamy, iż $res_0 f = 1$

i aplikujemy wzór całkowy Cauchy'ego (założenia są w mocy na tej samej zasadzie co w pkt a)) ?

$\int_{|z|=2} \frac{e^{1/z}}{z}\,dz = 2\pi i \, res_0 f = 2\pi i$ ✓

Stosuje Pan inne twierdzenie, są dodatkowe rozumowania — coś trzeba jeszcze dopisać.

c) Niech $f(z) = \frac{1}{i} \frac{z}{\left(2z + \frac{z^2-1}{2i}\right)^2}$ (Tam gdzie f jest dobrze określone)

Zadanie 6) Strona 2/3

Zauważmy, że:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\sin t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{ie^{it}\left(2+\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2}\,dt = \left[e^{it} \text{ to parametryzacja okręgu } |z|=1\right]$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(2+\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2} = \int_{|z|=1} \frac{z\,dz}{i\left(2z+\frac{z^2-1}{2i}\right)^2} = \int_{|z|=1} f(z)\,dz$$ ✓

f jest określona poza punktami z, dla których $2z+\frac{z^2-1}{2i}=0$

$\iff \quad 4zi+z^2=1$ (*)

$\iff \quad (z+2i)^2=-3$

czyli $\quad z=-2i \pm i\sqrt{3} = i(-2\pm\sqrt{3})$

Zatem
$$\begin{cases} z_1 = -(2+\sqrt{3})i & |z_1|>4 \\ z_2 = -(2-\sqrt{3})i & |z_2|<1 \end{cases} \implies \begin{aligned} z_1-z_2 &= -2\sqrt{3}\,i \\ z_1+z_2 &= -4i \end{aligned}$$ ✓

błąd nie, bo $\sqrt{3}<2$ więc $|z_1|<2+2$

Rozważając f w obszarze $U=\{z: |z|<4\}$ dostaję, że jest ona holomorficzna (jako pewien iloraz funkcji holomorficznych) w obszarze $U\setminus\{z_2\}$. Dlaczego nie $U\setminus\{z_1,z_2\}$?

Krzywa $|z|=2$ otacza punkt z_2 jednokrotnie, więc mogę zastosować twierdzenie całkowe Cauchy'ego:

$$\int_{|z|=2} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z_2} f$$

Dlaczego 2? W podstawieniach na górze było to, że $|z|=1$, zmiana powinna na 2 nie ma wpływu na wynik, ale zmiana na 4 już by miała (patrz (*)).

Mamy:
$$f(z) = \frac{z}{i\left(2z+\frac{z^2-1}{2i}\right)^2} = \frac{-4z}{i(4zi+z^2-1)^2} = \frac{-4z}{i(z-z_1)^2(z-z_2)^2}$$

Zachodzi więc $f(z) = \frac{G(z)}{(z-z_2)^2}$, gdzie $G(z)=\frac{-4z}{i(z-z_1)^2}$ jest funkcją holomorficzną w otoczeniu z_2, więc na mocy lematu z wykładu:

$$\cancel{\operatorname{res}_{z_2} f = \frac{1}{1!}G'(z_2) = \frac{(-4)i(z-z_1)^2+4z\,i\,2(z-z_1)}{(-1)(z-z_1)^4}\Big|_{z=z_2}} =$$

$$= \frac{(-4i)(-12)+(4i)z_2(-2\sqrt{3}i)}{\ldots}$$

Zadanie 6) Strona 3/3

$$\operatorname{res}_{z_2} f = G'(z_2) = \frac{-4}{i}\left(\frac{(z-z_1)^2 - z\,2(z-z_1)}{(z-z_1)^4}\right)\Bigg|_{z=z_2} =$$

$$= \cancel{-}\,4i\left(\frac{(z_2-z_1) - 2z_2}{(z_2-z_1)^2}\right) = 4i\,\frac{-(z_1+z_2)}{2\sqrt{3}\,i} = \frac{4}{2\sqrt{3}}(-4i) = -\frac{8}{\sqrt{3}}\,i$$

A zatem ostatecznie

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\sin t)^2}\,dt = \int_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot -\frac{8}{\sqrt{3}}\,i = \frac{16\pi}{\sqrt{3}}$$

jakiś błąd się przyplątał

- p.kt $\frac{6\pi}{3\sqrt{3}}$