Zad. 5 a)

Mamy: $\lim_{z\to 0} \frac{z(1-z)(e^{z}+e^{-z})}{(e^{z}-e^{-z})} = \lim_{z\to 0} \frac{z(1-z)(e^{z}+e^{-z})}{\underbrace{2\left(z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\dots\right)}_{\text{liczę to na drugiej stronie}}} =$

$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0} \frac{(1-z)(e^{z}+e^{-z})}{1+\underbrace{\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\dots}_{0}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 2}{1} = \boxed{1}$

Zatem $g(z)$ ma osobliwość usuwalną w 0.

Definiując $\tilde{g}(z) = \begin{cases} g(z) & \text{dla } z\neq 0 \\ 1 & \text{dla } z = 0 \end{cases}$ uzyskujemy funkcję holomorficzną na całej płaszczyźnie.

(współczynniki Maclaurina liczę na drugiej stronie).

Korzystając z uzyskanego rozwinięcia Maclaurina funkcji $g(z)$ możemy łatwo rozwinąć $\frac{g(z)}{z^4}$ w szereg Laurenta. Część osobliwa zawiera bowiem obliczone wcześniej współczynniki:

$$(\text{część główna}) = \left(\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3z^2} - \frac{1}{3z}\right).$$

Korzystając z faktu, że residuum w 0 jest równe -1-szemu współczynnikowi w rozwinięciu Laurenta wokół 0 dostajemy res. $\frac{g(z)}{z^4} = -\frac{1}{3}$.

~~Rozwinięcie~~ Część główna rozwinięcia Laurenta (wokół 0) funkcji $\frac{g(z)}{z^4}$ zawiera 4 wyrazy. Funkcja ta ma zatem w zerze biegun 4-tego rzędu.

Przepiszmy f do równoważnej postaci:

(1) $(e^z - e^{-z})g(z) = z(1-z)(e^z + e^{-z})$. Dla $z \neq 0$.

Ponieważ lewa strona jest rozwijalna w szereg Taylora to możemy założyć, że $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ [$(e^{+z} + e^{-z})g(z)$ jest całkowita]. Mamy:

$$(e^z - e^{-z}) = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots - 1 + z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} - \ldots\right) =$$
$$= 2\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots\right) \quad (2)$$

$$(e^z + e^{-z}) = 2\left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots\right)$$ {dwójkę można skrócić po obu stronach równania (2)!}

zatem (1) jest postaci:

$$g(z)\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots\right) = (z - z^2)\left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots\right) =$$
$$= \left(z - z^2 + \frac{z^3}{2!} - \frac{z^4}{2!} + \frac{z^5}{4!} - \frac{z^6}{4!} + \ldots\right).$$

Dalej:

$$\left(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots\right)\left(z + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \ldots\right) =$$
$$= \left(z - z^2 + \frac{z^3}{2!} - \frac{z^4}{2!} + \frac{z^5}{4!} - \frac{z^6}{4!} + \ldots\right)$$

Co daje (po zestawieniu ze sobą współczynników):

$c_0 = 1 \quad (c_0 z = z)$

$c_1 = -1 \quad (c_1 z^2 = -z^2)$

$c_2 = \frac{1}{3} \quad \left(c_0 \frac{1}{3!} z^3 + c_2 z^3 = \left(\frac{1}{6} + c_2\right) z^3 = \frac{1}{2} z^3\right)$

$c_3 = -\frac{1}{3} \quad \left(c_1 \frac{1}{3!} z^4 + c_3 z^4 = \left(-\frac{1}{6} + c_3\right) z^4 = -\frac{1}{2} z^4\right)$