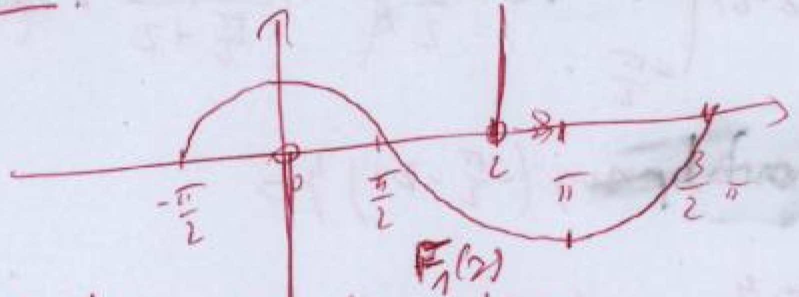
1

Zad 3:

a)



$f(z) = \frac{1}{z}$ ma pierwotną w obszarze

$\Omega_1 = \{ ~~z\in~~ \mathbb{C} \setminus ~~\{\ldots\}~~ \{it,\ t \le 0\}$

$F_1(z) = \mathrm{Log}_1 z = \ln|z| + i \arg_1 z$

gdzie szukamy f-cji pierwotnej z argument podany z przedziału $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$

$f(z) = \frac{1}{z-2}$ ma f-cję pierwotną $F_2(z)$ w obszarze

$\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus \{2 + it,\ t \ge 0\}$

$F_2(z) = \mathrm{Log}_2(z-2) = \ln|z-2| + i \arg_2(z-2)$

↑ argument podany z przedziału $(\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi)$

b) ~~Niech~~ Mamy:

$$f = \frac{1}{z(z-2)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-2}\right),$$

więc
$$\int_\gamma f = -\frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{z-2} = A + B$$

$\frac{1}{z}$ ma pierwotną w otoczeniu γ i z a) wiadomo, że

$$A = -\frac{1}{2}\mathrm{Log}_1 z \Big|_{\gamma(-\frac{\pi}{2})}^{\gamma(\frac{3}{2}\pi)} = -\frac{1}{2}\mathrm{Log}_1 z \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = -\frac{1}{2}\left(\ln\frac{|\frac{3}{2}\pi|}{|\frac{\pi}{2}|} + i\left(\mathrm{Arg}\,\tfrac{3}{2}\pi - \mathrm{Arg}\,\tfrac{-\pi}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2}\ln 3 + i\frac{(-\pi)}{2}$$

$$B = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}_2(z-2)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = \frac{1}{2}\Big\{ \ln\frac{\frac{3}{2}\pi-2}{\frac{\pi}{2}+2} + \cancel{i\left(\mathrm{Arg}\left(\tfrac{3}{2}\pi-2\right)-\mathrm{Arg}\right)}$$

$$+\, i\left(\mathrm{Arg}\left(\tfrac{3}{2}\pi-2\right)-\mathrm{Arg}\left(-\tfrac{\pi}{2}-2\right)\right)\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{3\pi-4}{\pi+4} + i(0-\pi)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{3\pi-4}{\pi+4} - i\frac{\pi}{2}$$

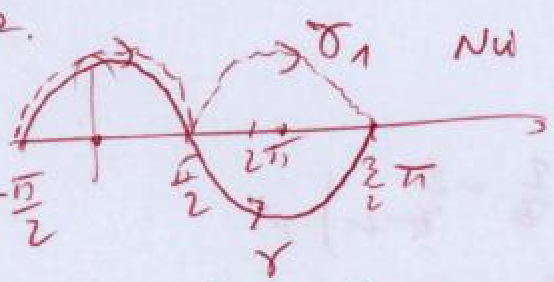
$$A+B = \frac{1}{2}\left(-\ln 3 + \ln\frac{3\pi-4}{\pi+4}\right) - i\frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\,\frac{3\pi-4}{(\pi+4)}\right) - i\pi =$$

$$= \ln\sqrt{\frac{3\pi-4}{3\pi+12}} - i\pi.$$

Przy dowolnym wyborze gałęzi argumentu różnica wartości argumentów na końcach drogi pozostaje taka sama.

c)



γ_1 – [illegible] [illegible] przywrócony.

Gdyby $\int_\gamma f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz \iff \int_\gamma f\,dz - \int_{\gamma_1} f\,dz = 0$

$\iff \int_{\gamma-\gamma_1} f\,dz = 0 \iff$

$\iff \int f\,dz = 0$ pętla. :

robimy pętlę

$\int_{K(2)} \frac{\frac{1}{2}}{z-2}\,dz = 2\pi i\,\frac{1}{2} = -\pi i \neq 0$

W tę i z powrotem obiegamy po tej drodze po