a) Obliczmy najpierw $h(\Pi_+)$.

Wiemy, że homografia przekształca okrąg uogólniony w okrąg uogólniony.

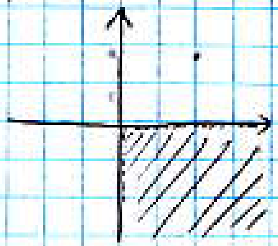
Policzmy wartości h w punktach $1, 0, -1, i$.

$h(1) = \infty$
$h(0) = \frac{1}{-1} = -1$
$h(-1) = 0$
$h(i) = \frac{i+1}{i-1} = -i$

Stąd prosta ~~$\mathbb{R}$ ...~~ $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, a ponieważ $i \in \Pi_+$, to $h(\Pi_+) = \Pi_-$
gdzie $\Pi_- = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z < 0\}$.

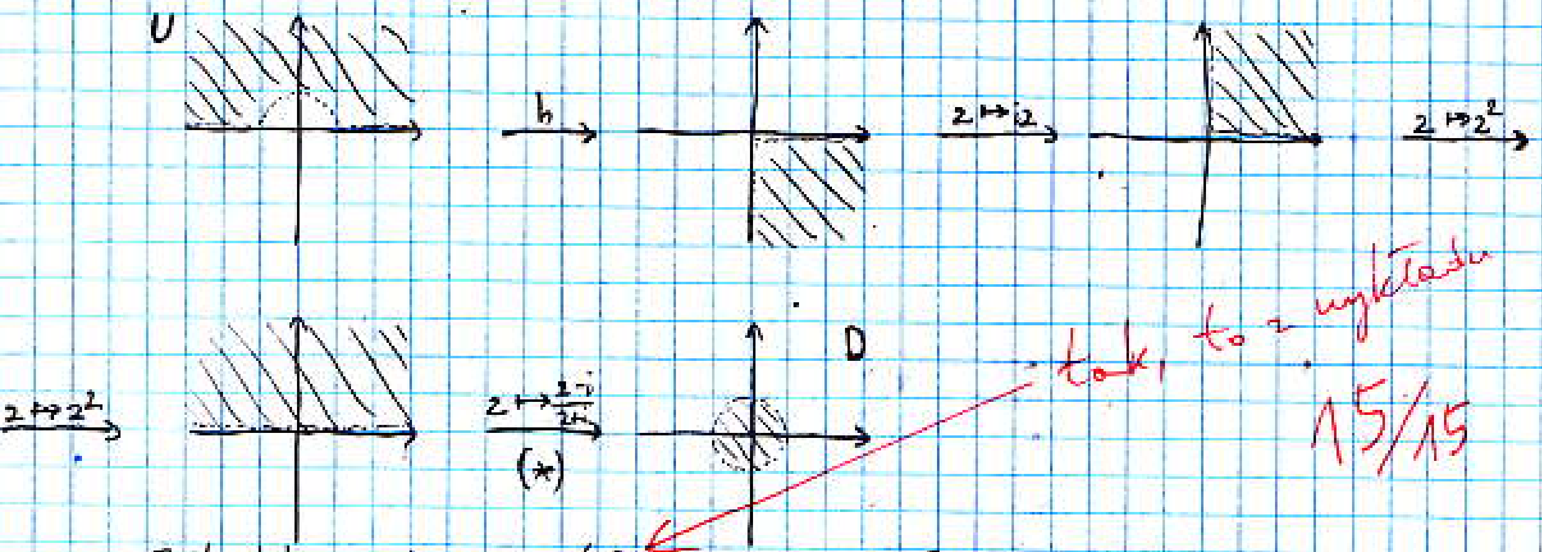
Obliczmy teraz $h(\overline{D})$. Okrąg $|z| = 1$ przejdzie na prostą przechodzącą przez punkty 0 oraz $-i$ (bo $h(1) = \infty$, $h(-1) = 0$, $h(i) = -i$), a ponieważ $0 \in \overline{D}$ to $h(\overline{D}) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \leq 0\}$.

Stąd $h(\Pi_+ \setminus \overline{D}) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z < 0 \wedge \mathrm{Re}\, z > 0\}$



10/10

b) Spójrzmy na ~~...~~ następujący ciąg przekształceń biholomorficznych:



tak, to z wykładu

15/15

Jeśli tylko pokażę, że (*) przeprowadza Π_+ na D, to składając wszystkie napisane przekształcenia uzyskamy odwz. biholomorficzne przeprowadzające U na D. VERTE

$$\left.\begin{array}{l} h_2(0) = -1 \\ h_2(1) = \frac{1-i}{1+i} = -i \\ h_2(-1) = \frac{-1-i}{-1+i} = i \\ h(i) = 0 \end{array}\right\} \text{stgd} \quad \mathbb{R} \overset{h_2}{\mapsto} \{|z| = 1\} \Bigg\} \text{stgd} \quad \Pi_+ \overset{h_2}{\mapsto} D$$

QED.