Kolokwium z Funkcji Analitycznych 17 XII 2012

Każdą oddawaną kartkę proszę czytelnie podpisać, podając numer indeksu i nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy ćwiczeniowej, oraz opatrzeć numerem rozwiązywanego zadania (może być tylko jedno na kartce).

Proszę dawać wyczerpujące wyjaśnienia i uzasadnienia, umożliwiające śledzenie toku rozumowania. Proszę też jawnie wskazywać na wykorzystywane rezultaty. Sposób redakcji (kompletność uzasadnień, czytelność przedstawienia) ma wpływ na ocenę!

Z poniższych 6 zadań proszę wybrać 4; za każde można dostać do 25p. Wolno rozwiązywać jeszcze jedno zadanie; wtedy najgorzej rozwiązane zadanie będzie ocenione w skali 0–10, jako dodatkowe.

1. Niech $U = \Pi_+ \setminus \overline{D}$ będzie obszarem, powstałym z otwartej półpłaszczyzny $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ przez usunięcie z niej punktów dysku $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

a) Opisać obraz $h(U)$ obszaru U przy homografii

$$h(z) = \frac{z+1}{z-1} .$$

b) Znaleźć odwzorowanie biholomorficzne, przeprowadzające U na dysk D.

2. Znaleźć, jeśli istnieje, taką funkcję holomorficzną $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, której część rzeczywista, wyrażona jako funkcja zmiennych $x = \mathrm{Re} z$ i $y = \mathrm{Im} z$, jest równa funkcji $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy - x$. Wskazać też funkcję v, harmonicznie sprzężoną z u. Jeśli żądane funkcje nie istnieją, podać uzasadnienie.

Uwaga: f należy wyrazić jako funkcję zmiennej zespolonej z, zaś v jako funkcję zmiennych x i y.

3. Niech $\gamma(t) = t + \mathbf{i} \cos t$ dla $t \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$.

a) Udowodnić, że każda z funkcji $1/z$ i $1/(z-2)$ ma funkcje pierwotne w obszarze, zawierającym obraz drogi γ. (Obszary mogą być różne dla różnych funkcji.) Wskazać proponowane obszary i funkcje pierwotne, w tym funkcje wyrazić wzorami nie używającymi znaku całki.

b) Wyznaczyć $\int_\gamma f$, gdzie

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)} .$$

c) Czy $\int_\lambda f = \int_\gamma f$ dla każdej drogi λ od $-\frac{1}{2}\pi$ do $\frac{3}{2}\pi$, omijającej 0 i 2? (Odpowiedź uzasadnić i dla odpowiedzi negatywnej wskazać przykład poświadczającej to drogi.)

4. Rozwinąć funkcję

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-3} + \frac{1}{z-1}$$

w szereg Laurenta w pierścieniu $1 < |z| < 3$, o środku w zerze. Obliczyć też residuum $\text{res}_3 f$ funkcji f w punkcie 3.

5. Niech

$$g(z) = \frac{z(1-z)(e^z + e^{-z})}{(e^z - e^{-z})} \quad \text{i} \quad f(z) = \frac{g(z)}{z^4} \qquad (z \neq 0).$$

a) Dowieść, że funkcję g można przedłużyć do funkcji $\widetilde{g}$, holomorficznej w otoczeniu zera i wyznaczyć współczynniki $c_0, ..., c_3$ rozwinięcia Maclaurina $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ funkcji $\widetilde{g}$. (Wskazówka: wykorzystać rozwinięcie funkcji exp w szereg.)

b) Wyznaczyć część główną rozwinięcia Laurenta funkcji f wokół zera, residuum tej funkcji w zerze oraz rodzaj osobliwości w zerze (czy istotna, czy pozorna, czy biegun, i którego rzędu).

6. Obliczyć następujące całki (okrąg $|z| = 2$ zorientowany jest dodatnio):

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z} dz$ b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z} dz$ c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\sin t)^2} dt$