Rafał Meller 305 175 prof Maurin.

zad. 2

a) rozpatrujemy $h = f \circ b_{-p}$.

wtedy $h(0) = f \circ b_{-p}(0) = f(p) = 0$.

$h \in H(D)$, a ponieważ $f(D) \subset D$ i b_{-p} to biholomorficzne przekształcenie dysku w siebie, i więc $h(D) \subset D$.

Spełnione są założenia lematu Schwarza o dysku, więc

$|h(z)| \leq |z|$ $z \in D$ ale $z = b_p(w)$ dla $w \in D$, więc

$|h(b_p(w))| \leq |b_p(w)|$ dla $w \in D$

19p

$|f \circ b_{-p} \circ b_p(w)| \leq |b_p(w)|$ czyli $|f(w)| \leq |b_p(w)|$ bo $b_{-p} \circ b_p(w) = w$

Równość jest $\iff$ f stała.

ale jeśli $|f(w)| \leq |b_p(w)|$ to i $f = b_p\, g$ dla $w \in D \Rightarrow$

czym jest g? – nie zostało dobrze określone.

$\Rightarrow |g| \leq 1$. inaczej nie mogło by być $|f(w)| \leq |b_p(w)|$.

~~Jeśli zachodzi dla pewnego $z \in D$ $|g| = 1$, to $|g(z)| = 1$~~

~~$|f| = 1$ $|f(z)| = |b_p(z)|$ i z lematu Schwarza~~

~~f to funkcja stała zachodzi $|f| = |b_p\, z|$ na D~~

~~$|b_p$ wtedy $f \circ b_{-p}$ to przekształcenie $c \cdot z$ dla $|c| = 1$~~

~~stąd $|g|^{-1}$ jest stałe na D, i z ciągłości $|g| = 1$ na ∂D~~

Rafał Meller

Zad. 7.

~~tutaj korzystamy z tego, że p_2 różne~~ wnioskujemy, że musi być $g_1(p_2)=0$

b) $f = b_{p_1} \cdot g_1$ tak jak ~~z tamtego~~ w a).

jeśli $f(p_2)=0$ to musi być $g_1(p_2)=0$ bo $b_p(z)=0 \iff z=p$.

stąd $b_{p_1} \cdot g_1 = b_{p_1} \cdot b_{p_2} \cdot g_2$ (stosujemy a) do funkcji g_1)

Indukcyjnie mamy, że

$f = b_{p_1} \cdot \ldots \cdot b_{p_n} \cdot g_n$ ~~w a~~ Wstawiając w a) pokazaliśmy, że

$|g_n| \le 1.$

Stąd $|f| \le \prod_{i=1}^{n} |b_{p_i}|$

Dobrze.

tutaj korzystamy z tego, że ~~$g_1(p_2)=0$~~, p_1, p_2 są różne, więc $b_{p_1}(p_2) \neq 0$ i musi być $g_1(p_2)=0$.