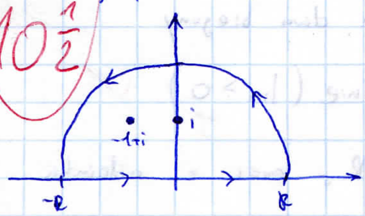
b) Niech $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$ $\qquad (z^2+1)^2(z^2+2z+2)=(z+i)^2(z-i)^2(z+1+i)(z+1-i)$

Całkujemy f po konturze takim jak w a)

$10\frac{1}{2}$



Funkcja f ma cztery osobliwości na płaszczyźnie zespolonej, w tym dwie na górnej półpłaszczyźnie:

- biegun rzędu 2 w punkcie $z=i$
- biegun rzędu 1 w punkcie $z=-1+i$

$$\operatorname{res}_i f=\operatorname{res}_i \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}=\lim_{z\to i}\left(\frac{z^2}{(z+i)^2(z^2+2z+2)}\right)'=\lim_{z\to i}\frac{2z(z+i)^2(z^2+2z+2)-z^2\big(2(z+i)(z^2+2z+2)+(z+i)^2(2z+2)\big)}{(z+i)^4(z^2+2z+2)^2}=$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{2z(z+i)(z^2+2z+2)-2z^2(z^2+2z+2)-2z^2(z+i)(z+1)}{(z+i)^3(z^2+2z+2)^2}=\frac{2i\cdot 2i\cdot(i^2+2i+2)-2i^2(i^2+2i+2)-2i^2\cdot 2i(i+1)}{8i^3(i^2+2i+2)^2}=$$

$$=\frac{-4(1+2i)+2(1+2i)+4(i-1)}{-8i(4i-3)}=\frac{-4-8i+2+4i+4i-4}{32+24i}=\frac{-6}{32+24i}=-\frac{3}{16+12i}=-\frac{12-9i}{100}$$

(tak, brawo)

6/6

$$\operatorname{res}_{-1+i} f=\operatorname{res}_{-1+i}\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+2z+2)}=\lim_{z\to -1+i}\frac{z^2}{(z^2+1)(z+1+i)}=\frac{(-1+i)^2}{((-1+i)^2+1)(-1+i+1+i)}=\frac{-2i}{(1-2i)2i}=$$

$$=-\frac{1}{1-2i}=-\frac{20+40i}{100}=-\frac{1+2i}{5}$$

, nie $\left(=\dfrac{3-4i}{25}\right)$

1/2

Zatem z twierdzenia o residuach:

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz=2\pi i\left(-\frac{12-9i}{100}-\frac{20+40i}{100}\right)=2\pi i\left(\frac{-12+9i-20-40i}{100}\right)=2\pi i\,\frac{-32+49i}{100}=\frac{-64\pi i-98\pi}{100}$$

Konsekwencja błędu wyżej

$$\left|\int_{\partial R} f(z)\,dz\right|=\left|\int_{\partial R}\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\,dz\right|\le\int_{\partial R}\frac{|z|^2}{|z^2+1|^2\,|z^2+2z+2|}\,|dz|\le\int_{\partial R}\frac{|z|^2}{(|z|^2-1)^2(|z|^2-2|z|-2)}\,|dz|=$$

$$=\frac{R^2\cdot\cancel{2}\pi R}{(R^2-1)^2(R^2-2R-2)}=\frac{\cancel{2}\pi R^3}{(R^2-1)^2(R^2-2R-2)}=\frac{\cancel{2}\pi R^3}{R^6+o(R^5)}\xrightarrow{R\to\infty}0$$

2/2

Zatem $\lim_{R\to\infty}\oint_\Gamma f(z)\,dz=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\,dz$, czyli zbieżność całki z zad., choć wolałbym dokładniej to opisać...

1.5/2

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx=-\frac{64\pi i+98}{100}$$

Prawdopodobnie pomyłka przy liczeniu residuum, bo powinna wyjść liczba rzeczywista.

właśnie w tym Łatwiejszym (biegun rzędu 1)