305 085

gr. P. Kostowskiego

Zad. 2

8

a) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx = ?$ $\quad a>0$

Ponieważ funkcja podcałkowa jest parzysta, to

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx$$

Gdy $z\in\mathbb{R}$ to

$$e^{iz} = e^{-y+ix} = \cos x + i\sin x$$

Stąd $\cos x = Re(e^{iz})$.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos z}{z^2+a^2}dz = \int_{\mathbb{R}} \frac{Re(e^{iz})}{z^2+a^2}dz = \int_{\mathbb{R}} Re\left(\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\right)dz = Re\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}}_{f(z)}dz$$

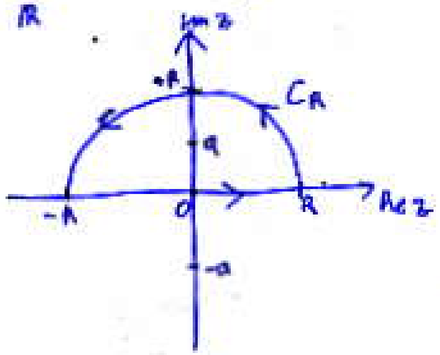
(ładnie i starannie)

1° $f(z)$ jest holomorficzna na $\mathbb{C}\setminus\{-ia, +ia\}$.

Mamy

2° $\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in\Pi_+}} f(z)\cdot e^{-iz} = \lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in\Pi_+}} \frac{1}{z^2+a^2} = 0$, zatem z tw. z wykładu $\overbrace{\text{całka}}^{\text{(założenia 1° i 2° spełnione)}}$

$\int_{\mathbb{R}} f$ istnieje, a ponadto $\int_{C_R} f \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$, gdzie C_R to półokrąg $Re^{it}, t\in[0,\pi]$.



Z tw. o residuach:

$$\int_{C_R+[-R,R]} f = 2\pi i \; res_{ia}(f)$$ [ponieważ tylko osobliwość ia wpada do wewnątrz obszaru o brzegu $C_R \cup [-R,R]$ dla d.d. R]

ia to biegun rzędu 1 $f(z)$, stąd:

$$res_{ia}(f) = \lim_{z\to ia}(z-ia)f(z) = \lim_{z\to ia}\frac{e^{iz}}{(z+ia)} = \frac{e^{-a}}{2ia}$$

Zatem

$$\int_{C_R} f + \int_{[-R,R]} f = 2\pi i\cdot\frac{e^{-a}}{2ia} = \frac{\pi e^{-a}}{a}$$

przechodząc z R do ∞ otrzymujemy

$$\int_{\mathbb{R}} f = \frac{\pi e^{-a}}{a}$$