Zadanie 6   RAFAŁ MARKO Nr 305174 Gr. p. Gutowskiego

$f \in H(D)$, $f(D) \subseteq D$.

a) Jeśli $p \in D$ i $f(p)=0$, ~~$f = b_p \cdot g$~~

wtedy $f(z) = (z-p) \cdot \tilde{g}(z)$ gdzie $\tilde{g}(z)$ - holomorficzna.

Mamy $b_p : \partial D \to \partial D$ ~~....~~ z wykładu (były).

$$f(z) = (z-p) \cdot \tilde{g}(z) = \frac{z-p}{1-\bar{p}z} \cdot \tilde{g}(z) \cdot (1-\bar{p}z) = b_p(z) \cdot g(z)$$

gdzie $g(z) = \tilde{g}(z) \cdot (1-\bar{p} \cdot z)$ - funkcja holomorficzna.

$|g(z)| = |b_p(z)| \cdot |f(z)| = |f(z)|$ dla $z \in \partial D$.

A zatem z zasady maksimum (o ile $g \neq const$) $|g(z)| \leq |f(z)| \overset{z\ zał.}{\leq} 1$ dla $z \in \bar{D}$

A zatem $g(D) \subseteq D$. lub $g = const$.

b) ~~....~~ $f(z) = b_{p_1}(z) \cdot g(z)$ o ile $g \neq const$ wtedy a) rozumowanie

dalej dla $g_1(z)$ (bo z a) spełnia założenia) i tak dalej (i tak dalej indukcyjnie)

$g_1(z) = b_{p_2}(z) \cdot g_2(z)$

$f(z) = b_{p_1}(z) \cdot \ldots \cdot b_{p_n}(z) \cdot g_n(z)$, gdzie $|g_n(z)| \leq 1$

$|f(z)| = |b_{p_1}(z) \cdot \ldots \cdot b_{p_n}(z)| \cdot |g_n(z)| \leq |b_{p_1}(z)| \cdot \ldots \cdot |b_{p_n}(z)|$.

Dobrze gdy $f \in H(\bar{D})$.
Gdy f nie jest określone na ∂D, potrzebny jest ~~....~~ dodatkowy krok, jak w lemacie Schwarza.

1,8 p