$\boxed{\text{ZAD 6}}$ $\mathcal{U}$ - domen w $\mathbb{C}$ $\overline{D} \subseteq \mathcal{U}$, $f, g \in H(\mathcal{U})$ Σ 2.0

$\forall z \in \partial D$ $|f(z)| = |g(z)|$ ŁUKASZ TREDZIOTKO

(a) $f(z) g(z) \neq 0$ dla $z \in \overline{D}$

Rozważmy $h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$, $h \in H(\overline{D})$, bo ani $g(z)$ ani $f(z)$ nie zerują się na $\overline{D}$ (a więc również na pewnym otwartym otoczeniu $\overline{D}$, bo o $\overline{D}$ jest zwarty, a zera funkcji holomorficznych są odosobnione).

Dla $z \in \partial D$ mamy

$$|h(z)| = 1$$

Na mocy zasady maksimum $\forall z \in \overline{D}$ $|h(z)| \leq 1$

Ale jednocześnie

$$\frac{1}{h(z)} \in H(\overline{D})$$

$$\left|\frac{1}{h(z)}\right| = 1 \text{ na } \partial\overline{D}, \text{ czyli analogicznie}$$

$$\left|\frac{1}{h(z)}\right| \leq 1 \text{ na } \overline{D}.$$

Mocnego?

Konsekwentnie $|h(z)| = 1$ $\forall z \in \overline{D}$. Wiemy jednak, że jeśli funkcja jest holomorficzna i ma na pewnym obszarze stały moduł, to musi być stała.

10

$|h(z)| = \lambda \in \mathbb{C}$ dla pewnej λ, $|\lambda| = 1$

Czyli $f = \lambda g$ na $\mathcal{U}$

(b) Wiemy, że $|f(z)| = |g(z)|$ $\forall z \in \partial D$. Niech $f(z) \cdot g(z) \neq 0$ na D

Wówczas $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ jest holomorficzna na D. ~~$\forall z \in \partial D$~~

~~$\lim_{w \to z} \left|\frac{f(w)}{h(w)}\right| \leq$~~ ~~Skoro~~ ~~Jeśli $f(z)$ jest tożsamo~~ Jeśli $f(z)$ jest tożsamościowo równa zeru na ∂D, to równa na $\mathcal{U}$ i $g = f \equiv 0$ na $\mathcal{U}$. Załóżmy, że jest inaczej. Wówczas f ma tylko skończoną liczbę zer na ∂D (bo ∂D jest zwarty). Tak samo g ma również skończoną liczbę zer na ∂D.

Niech ~~te same~~ zera f, g na ∂D to $a_1, \ldots, a_n$. Krotność tego zera ~~jest punktem pewnego otoczenia~~ jest skończoną krotnością dla f i g, bo w przeciwnym przypadku f by się zerowała na całym pewnym otwartym otoczeniu jednego z tych zer.

Konsekwentnie dla $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ ~~mogą~~ zera $a_1,\dots,a_n$ mogą być albo biegunami, albo punktami pozornie osobliwymi. ~~Jest wszystko osobliwe się~~ ~~[illegible] pozorn., to~~

Niech np. w otocz. w punkcie a_1

$$h(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a_1)^m}+\dots+\frac{c_{-1}}{z-a_1}+c_0+c_1(z-a_1)+\dots$$

Jeśli a_1 jest biegunem to $\lim_{z\to a_1} h(z)=\infty$. Ale wtedy zmierzając dowolnie do granicy wnętrz ∂D ok tam $|h(z)|\le 1$ ~~d.d.d~~ dla z dostatecznie bliskich a_1 bo a_1 jest ~~[illegible]~~ zerem f i g, a więc jest oddalone od innych zer dodatnią odległością. Mamy sprzeczność, a więc $a_1,\dots,a_n$ mogą być tylko osobliwościami pozornymi.

Konsekwentnie $h(z)$ jest analityczna na pewnym obszarze otwartym zawierającym $\overline{D}$. W szczególności jest ciągła i $|h(z)|=1$ na $\partial D\setminus\{a_1,\dots,a_n\}$ implikuje, iż $|h(z)|=1$ na ∂D.

$h(z)\neq 0$ na $\overline{D}$. A więc $h(z)$ i $\frac{1}{h(z)}$ są holomorficzne na $\overline{D}$ i można używając takich samych argumentów jak w (a) pokazać, iż $h(z)=$ ~~[illegible]~~ λ, $|\lambda|=1$, $\lambda\in\mathbb{C}$. ∎